



学 · 术 · 经 · 典 · 译 · 丛

# 科学推断

(英) 哈罗德·杰弗里 (Harold Jeffreys) 著

龚凤乾 译



YZLI 0890092050



厦门大学出版社  
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

国家一级出版社  
全国百佳图书出版单位



学 · 术 · 经 · 典 · 译 · 丛

# 科学推断

(英) 哈罗德·杰弗里 (Harold Jeffreys) 著

龚凤乾 译



YZLI 0890092050



厦门大学出版社 国家一级出版社  
XIAMEN UNIVERSITY PRESS 全国百佳图书出版单位

**图书在版编目(CIP)数据**

科学推断/(英)杰弗里(Jeffreys, H.)著;龚凤乾译. —厦门:厦门大学出版社, 2011. 1

(学术经典译丛)

ISBN 978-7-5615-3708-4

I. ①科… II. ①杰…②龚… III. ①贝叶斯推断 IV. ①0212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 210371 号

著作权合同登记号:图字 13-2011-001

*Scientific Inference*, 2nd (ISBN 9780521084468) by Harold Jeffreys first published by Cambridge University Press 1957.

All rights reserved.

This simplified Chinese edition for the People's Republic of China is published by arrangement with the Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom.

© Cambridge University Press & Xiamen University Press 2010

This book is in copyright. No reproduction of any part may take place without the written permission of Cambridge University Press and Xiamen University Press.

This edition is for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong SAR, Macau SAR and Taiwan Province) only.

此版本仅限在中华人民共和国境内(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)销售。

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)

<http://www.xmupress.com>

[xmup@public.xm.fj.cn](mailto:xmup@public.xm.fj.cn)

厦门集大印刷厂印刷

2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷

开本:787×960 1/16 印张:17.5 插页:3

字数:250 千字 印数:1~3 000 册

定价:39.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

## 代译序

呈现在读者面前的这本《科学推断》是一本世界名著。

原书作者哈罗德·杰弗里(Sir Harold Jeffreys, 1891—1989)生前是英国剑桥大学著名的地球物理学家兼应用数学家,他于20世纪30年代在贝叶斯方法的基础上重新建立了统计学理论,他所提出的科学推断的一般框架以及选择先验分布方法的杰弗里原则,在许多学科(包括计量经济学)都得到了广泛的应用。学术界现在一般认为,他对近几十年来贝叶斯学派的重新兴起贡献很大。

杰弗里把概率论作为理解科学方法的必要充分条件,指出源自贝叶斯的重要定理“后验概率  $\propto$  先验概率 \* 似然”对于概率论的意义,一如毕达哥拉斯定理之于几何学,从而使概率论与科学推断自然地发生了联系。熟知,对似然的重视(贝叶斯定理断言所有来自数据的信息都已被总括到似然之中)和对先验概率无矛盾加以指派的深思熟虑,是贝叶斯方法的主要特征。由此,贝叶斯分析就成了科学地从经验和数据来获取知识的一种方法,和信息时代的要求非常合拍,是新一代统计学专门人才必须熟悉的基本方法之一。

本书观点鲜明,所用的例子源自广泛的学科领域,如植物学、数学、测量学、天文学、物理学(含相对论和量子论)、逻辑学,等等,这使得它能够多方面获取事例,深刻论证“从经验中学习并据以做出超越直接由感官所获信息的推理是可能的”这一主旨,极具启发性。加之本书语言犀利,议论鞭辟入理,即使以今天的标准衡量,它仍然不失为概率统计和科学推理方面的经典之作。

不言而喻,本书对频率学派的批评相当尖锐。需要指出的是,虽然贝

叶斯方法在应用上有不俗表现,两派学者的争辩也加深了人们对有关问题的了解,但我们绝不可以得出非此即彼的结论。事实上,正如林德列(Lindley)曾经指出的那样,“它们在方法上互相补充,联合起来比依靠任何一种方法都能更好地帮助我们理解统计学”。

本书中文译者龚凤乾博士,现为天津财经大学统计系副教授,他在攻读博士学位期间曾受教于已故驰名中外的统计学家张尧庭先生,是张先生晚年教过的统计决策与风险管理方面的学生之一。张先生生前曾希望由他的学生将哈罗德·杰弗里的《科学推断》译介绍给中国的读者,以推动关于贝叶斯统计学教学与研究的进展。现在这个任务由龚凤乾博士完成了,这既给中国的广大读者奉献了一本世界名著,也是对张尧庭先生很好的纪念,是一件很有意义的事情。是为序。

姚琦伟 于英国伦敦经济学院

2010年3月22日

## 第一版序言

这本著作源于数年前多萝西·瑞恩奇博士(Dorothy Wrinch)和我共同发表的几篇论文。在那之前及以后,已有几本旨在分析科学探索原则的书问世。但在我看来,那几本书都未能对科学探索的主要原则及人们的常识给予足够的关注:我认为从经验中学习并据以做出超越直接由感官所获信息的推理是可能的。来自哲学和逻辑学方面的讨论,常常做出这样的结论,即科学探索原则的正当性,不能仅凭逻辑予以证明,仅此而已。而另一方面,来自物理学家的讨论,则几乎没有注意到这种原则的存在。本书坦率地把科学探索的原则当作一种简单的假定,并由此逐步展现这种假定所带来的多种结果。这种假定能导致一种解释和证明,即实际上许多简单的数量定律都伴有很高的发生概率,从而导致对这些定律所涉及的过程的重新表述。测量学及动力学的发展,可以作为科学定律与经验之间实际关系的说明。我本人由于下述原因激起了对科学探索原则的兴趣:事实上,在我所从事的宇宙起源及地球物理学的工作中,当把物理定律应用于时间与距离时,这些定律常会超越其原先被证明为真确的范围,而人们一向认为这种超越是不可避免的。因此,这种物理定律外推时所涉及的问题,总是那么引人注意。

感谢剑桥大学出版社工作人员对本书的关心和所提供的方便;感谢瑞恩奇博士、纽曼先生(M. H. A. Newman),他们通读了本书的校样并提出了许多改进的建议。

哈罗德·杰弗里 1931年1月于  
剑桥圣约翰学院

## 第二版序言

自本书问世以来,科学推断的理论获得了重大发展,因此我认为有必要重写本书的大部分内容。本书总的观点,即没有概率论(它可视为关于知识接受程度的理论),科学方法的理解就失去了必要充分条件,依然没有改变。据此我认为,许多被归为科学方法论的东西,不是模糊不清、毫无用处,就是实际上会引起误解。

这一版对科学方法论给予了更多的讨论。为了引出科学方法论的主要原则,我做了足够多的叙述。这其中的一些观点在我所著的《概率论》一书中有更详细的阐述;其余的观点则在本书讨论——它们也可为进一步的研究提供基础。

理论应用的范围也扩大了,特别是我加进了关于统计方法与量子论这全新的一章。虽然不太可能用初等方法彻底阐述这一专题,但考虑到在解释问题时要提及概率论,因而我认为对概率论在其中的作用做一些说明是必要的。

感谢纽曼教授(M. H. A. Newman)、汉森博士(N. R. Hanson)及巴斯丁先生(E. W. Bastin),他们为本书的许多论点提供了建议。还要感谢我的妻子自始至终对本书所作的评论,感谢她帮助我完成了本书索引的编纂。

哈罗德·杰弗里 1955年5月于  
剑桥圣约翰学院

# 目 录

代译序

第一版序言

第二版序言

|         |                |       |
|---------|----------------|-------|
| 第一章     | 逻辑与科学推断        | (1)   |
| 第二章     | 概率             | (24)  |
| 第三章     | 抽样             | (44)  |
| 第四章     | 误差             | (64)  |
| 第五章     | 物理量            | (84)  |
| 第六章     | 测量学            | (104) |
| 第七章     | 牛顿动力学          | (133) |
| 第八章     | 光与相对论          | (155) |
| 第九章     | 对科学的三种误解及其有关问题 | (184) |
| 第十章     | 统计力学与量子论       | (213) |
| 附录 1    | 超穷数            | (240) |
| 附录 2    | 抽样论中一个加总值等式的证明 | (244) |
| 附录 3    | $\pi$ 为无理数的证明  | (245) |
| 索 引     |                | (247) |
| 词汇中英文对照 |                | (258) |
| 译后语     |                | (271) |



## 第一章 逻辑与科学推断

子曰：“由，诲汝，知之乎？知之为知之，不知为不知，是知也。”

《论语·为政》

本书的基本任务，是探讨根据经验数据对未来可能发生的事件所作推断的性质。天文学家根据《航海天文历》，会毫不怀疑地把太阳系九大行星未来几年的天体位置予以确认并把它当成已知；同样，植物学家也会对一粒芥菜籽最终会长成开黄花且具有四条长雄蕊、两条短雄蕊的植物充满信心。在这两个例子中，预期的做出受“科学定律”的支配，而这些定律均建立在先前的事例之上。这种推理不仅见于通常人们所谓的“科学”领域，在日常生活中，甚至在艺术领域，它也大行其道。当我品尝标有“木莓果酱”标签小罐里的食品时，我会根据先前的经验而期待一种确定的口感；而当作曲家谱写一小节音乐时，他会预想演奏它的乐队奏出一小节确定的乐音。

上述这些推理都不是演绎推理，事实上这些推理的作出也毫无把握可言。尽管人们依然普遍认为此类推理是靠得住的。例如，关于上述植物学家的推理，逻辑学家可能会追问导致这种推理的确切根据，于是在他们之间，就可能发生如下的一场辩论。

植物学家：植物的品种(A)<sup>①</sup>由其性状所决定，而这些性状都来自遗传。芥菜的性状包括它开黄花、有四条长雄蕊及两条短雄蕊。因此，任一品种的芥菜籽，最终都会长成开黄花，具有四条长雄蕊、两

---

① 参见章末对这些注的评论。

条短雄蕊的植物。

逻辑学家：我对你最后一句中的“最终”一词有疑问。你是在谈论芥菜的定义，还是一种植物的行为？而对这种植物你已经知道了它就是芥菜。根据你目前关于植物的经验，你列举了许多符合你对芥菜所下定义的植物，而且其后代也符合你所下的定义。就是你把“最终长成”改作“已经长成”，也无非是断言了一个你业已知晓的命题。一旦你宣称“最终长成”，你就开始超越你得自实际经验的知识了。

植物学家：如果一个规律迄今为止总能成立，就有理由猜想它将来也能继续成立。

逻辑学家：肯定一些类似你所说的推理原则正在被人们所使用。但我所求的是对这一推理原则的清楚表述。你如何确定芥菜的性状？一株芥菜高 30 厘米，20 片叶子，这些是芥菜的性状吗？如果是，它们是遗传的吗？

植物学家：这些性状对于某一芥菜品种而言，并非一成不变。从某种程度上说，它们的作用在于鉴别，因为有些种类的芥菜根本长不到 10 厘米高，还有些种类的芥菜只能长出两片叶子。就是在同一株芥菜的不同后代之间，这些性状也有变异。

逻辑学家：所以就某种性状而言，它必须总是来自遗传，对不对？

植物学家：对，我是这么说的。

逻辑学家：怎样获得这些性状？

植物学家：根据经验。

逻辑学家：我认为不完全是根据经验。有些性状总能通过遗传得以确认，但假如你考察更多的植株，就可以发现有些植株并不具备这些遗传性状。

植物学家：事实上这种事情已经出现过了。这时我们就说或者品系不纯——源于孟德尔的分离律，或者出现了变异。纯品系能够遗传的条件是没有变异。也许我应该早就指出这一点。

逻辑学家：你关于纯品系的陈述是它的定义吗？（B）

植物学家：我想这是一个行得通的定义。

逻辑学家：你又如何知道一个品系纯还是不纯？

植物学家：唯一的办法就是试种。我将采集这种植物的大量幼苗来培育它们，以确定它们中间是否出现了我所考虑的变异。

逻辑学家：这只是在不同的场合引入了同样的问题罢了。假如一个品系不纯，你就可能停止培育其幼苗，从而没有机会发现这些幼苗是否出现了变异。

植物学家：这不太可能。如果一个品系不纯，一般地说，我们有 $1/4$ 的机会得到该品系的一个新类型。因此，假如我们培育有数百棵同一品系植物的植株，那就有相当大的把握发现其中的新类型。

逻辑学家：我不清楚你说“不太可能”是什么意思，尽管人们或许能给“不太可能”找到一个解释。我的理解是，即使你培育了100株同一品系的植株，每一植株都有 $1/4$ 的机会具备某种性状，但有可能这100株植株无一具备这种性状。

植物学家：你是故意出难题。其实我们做过大量的试验。几天前我的一位从事遗传学试验的朋友还告诉我，他培育了某一品系的15 000株植株，每一株都单独观察并作记录，然后根据其系谱进行分类。这些工作完成后，我的朋友才能去分析此次试验的结果。你似乎要求他无限多地种植某种植物，然后才能就此说些什么。你这要求荒谬绝伦。

逻辑学家：这样要求当然荒谬，但我并未作此要求。假如允许我随便问一句，难道你给纯品系下的定义就没有模糊的意思吗？是不是这样说更公允，即在你心中有一个关于纯品系的观念，但实际上你从未能确知某一品系到底是纯还是不纯？

植物学家：你像是重提柏拉图<sup>①</sup>，而我认为当代哲学家均视柏拉图的观点是过时的东西。事实上，遗传学家对纯品系已经有了完全清楚的定义。在每种细胞的细胞核中，都存在被称为染色体的微粒，植物的所有遗传性状就由染色体来决定。当亲代的两个细胞进行结合并分裂繁殖时，子代细胞将具有来自相应亲代染色体的性状。如果亲代细胞在某一性状上表现一致，其子代细胞在这一性状上也会表现一致。一种植物，若其染色体都具有同一性状，则它就是纯品系植物。比起动物学家来，我们植物学家有一个相当大的优势，那就是与动物繁衍后代的两性交配不同，大多数的植物都是靠自花授粉进行繁殖。

逻辑学家：这很有趣，我不知道自己是否对此有了完全的理解。能否作出这样的推论，即植物学家会去实地检查每种植物中所有细胞的染色体，据以证实所有的细胞是不是完全一样？

植物学家：那不可能，因为细胞实在太多，检查不过来。但就一种植物检查其数百个细胞还是能做到的。一架普通显微镜就能显示这些细胞的染色体是否一样；近年来人们又采用了电子显微镜，能更清楚地显示携带遗传基因的染色体的细枝末节。

逻辑学家：几天前我曾浏览过《英国植物志》，我注意到它列举并描述了数千种有花植物。这些有花植物是否都经过电子显微镜的检查？

植物学家：远远没有。但经过检查的植物数量很多，足以使我们可以信赖遗传规律的真实性。也确有一些植物，我们对其是否为纯品系尚无把握，除非染色体分析能最终使我们对此作出明确的断言。

---

<sup>①</sup> 柏拉图(Plato, 公元前 427—347)，古希腊哲学家，古希腊三贤之一(柏拉图是古希腊著名哲学家苏格拉底的学生，而柏拉图的学生中有亚里士多德，此三人被并称为“古希腊三贤”)。他认为理念世界是第一性的，而可感觉的实物世界是第二性的，实物只是理念世界的影子。例如，芥菜就是彼岸芥菜的理念的产物——译注。

逻辑学家:看来判断纯品系植物的标准已经很清楚了。但在应用这一标准时,确实还存在一些它所不能涵盖的情形。你刚才是先定义某种植物的某一性状为特殊,如果它来自遗传的话,但假设我知道的是,在这种意义上某一性状是否真为特殊。对此进行检验并达到一定的可信度并不太难,尽管这种检验不等于逻辑演绎推理的证明。而我刚才谈及的是对未来事件的推理,现在我们谈论的是根据某一植物的一些细胞来推断其所有细胞,进而推断某一类全部植物的所有细胞。我看不出染色体在决定植物性状方面有什么帮助。为了解决这一问题,你需要对每种植物都使用电子显微镜,而这比培育它们进而确定出其各自的性状还要难。你现在似乎更依靠数据作大胆的推证了。如果说你前面推证的是某一植物其未经检验的植株也具备其已作检验植株的性状,那么你现在推证的,就是某一植物其未经检验的细胞也具备其已作检验细胞的性质。

植物学家:我认为我们正在步入一个可以彻底避免这种论证不足的新阶段。我们现在通过电子显微镜所看到的,比某些有机分子也大不了多少。长期以来,我们中的许多人都坚信活体的性质最终能得到物理及化学方面的解释。一旦做到这一点,所有生物的行为就能从数理上得到解释。事实上,生理学家们在这方面已经做了很多工作。

逻辑学家:尽管我曾试图读懂许多所谓的科普读物,但我对现代物理学却所知不多。当你谈论分子水平时,你离原子及电子水平就不远了。物理学家已经指出,在物质这些水平上的决定论是不能自圆其说的。你希望用物理决定论去证明生物决定论,看来注定会失望的。

植物学家:假设我承认我们不能用演绎法证明现在所作的结论,我能否因此放弃列举植物学(作为例证呢)? 毕竟,除了这种批评以外,我们已经把事情处理得非常好了。正如你刚才所说,在英国生存着数千种植物,但作为个体而存在的植物却数以亿计。看来把这数

以亿计的植物分类成几千个物种是可能的。植物的鉴定有时利用大约 20 个性状,而《英国植物志》在每种植物项下列出了更多的性状。这些性状在植物鉴定中都能见到。《英国植物志》通常也会列出若干不常见的植物性状,例如,植物的花瓣数就可能不同,但其数额范围要予以标明。白屈菜通常有 10 个花瓣,但其个体植株的花瓣数可从 3 瓣到 20 瓣不等。)

我猜想(我对数学从来不精通),如果你要问 20 个问题,其“是或不是”类型的答案就会有 100 万之多<sup>①</sup>。但我们植物学家利用同质性将此答案数目大大地降低了,所以我不认为这答案数目的巨大差别仅能由机会来解释。

逻辑学家:请不要放弃你的观点,哪怕我要求你这么做,但我并未对你提出这种要求。所有的逻辑学家都接受科学成果。罗素(Russell)<sup>②</sup>曾经说过将科学方法应用于哲学(研究);卡尔纳普(Carnap)<sup>③</sup>走得更远,他认为逻辑学就是科学语言的语法。另一方面,此类哲学家中的许多人没有科学研究的直接经验,所以我怀疑他们是否能够抓住对于科学至关重要的方法论问题。这些哲学家主要通过科普作品获取知识,而某些此类作品则宣称对哲学颇有贡献,以至于形成一种定见。然而也有一些科普作品受到科学家的强烈批评。如果现有的逻辑全然不可用,而一旦超越其所获数据范围时科学家们又不再争论,则科学方法(的发展)就将停滞。我所读过的有关著作对这一问题均无阐述。我曾认为可能存在演绎推理范围内引入科学方法的一些方式,但推理不再是演绎式的。这一点会带来根本的不同。

---

①  $2^{20} = 1\ 048\ 576$ ——译注。

② 罗素(Bertrand Russell, 1872—1970)是英国哲学家兼数学家、逻辑学家——译注。

③ 卡尔纳普(Rudolph Carnap, 1891—1970)是美国哲学家兼逻辑学家——译注。

在我们的讨论中,我多次注意到你使用了这样的表述,如“不可能”、“可能”、“相当有把握”等等,而这种表述又总是和你试图论证的、超越你所获数据范围的问题相联系。你能否对此做出说明呢?

植物学家:我不能。但毫无疑问,如果逻辑是科学的分析语言,对此做出说明正是逻辑学家分内的事!你真的认为作出这种说明十分重要吗?

逻辑学家:对我而言这主要是追求一种心智上的安宁而已。我们看来需要一种新式逻辑,在这种逻辑中证明的意义和演绎证明有所不同。我本应自己动手创建这种新逻辑,但我对科学所知不多,力不从心。现代逻辑学得到了一些很有趣的结果,特别是关于数学基础的结果。但我必须承认绝大多数数学家对这些结果并未给予足够的注意。另一方面,现代逻辑方法有助于完善为大多数数学家愿意接受的、作为证明的标准。几天前我曾向一位数学家谈论过这一点,他的回答是数学家们早就发现曾被人们广泛使用的(论证)方法,常会导致错误答案。数学家们也知道其中出错的原因,从而在现代逻辑学诞生之前就已经严格了证明的标准。但我仍然认为现代逻辑学还是有贡献的——它能启示数学家到何处寻找错误。在我看来,科学对(逻辑)分析的需要甚于对数学的需要。举例来说,所有的科学家都必须接受数学,就连使用数学最少的植物学家也必须有能力计数花蕊的数目才行。纵然人们时常在超越其所获数据范围的情况下进行论证,然而不超越这种范围而作论证的情形也屡见不鲜。所以除了(无论何种科学的)原理之外,人们还会需要数学以进行超越其所获数据范围的论证。

植物学家:我认为植物学家所用的数学是任何人都能接受的。但也有不少植物学家特别是遗传学家,对统计学用得很多,尽管他们不懂其中的数学原理。然而有些书,尤其是费舍(Fisher)写的书能够告诉他们如何使用统计学方法,因此他们就学会了使用。总的说来,他们干得不错。令人奇怪的倒是统计学中有不同的学派,他们互

不接受对方的原则,而且有时还会就某些具体问题得出极为不同的结果。

逻辑学家:这些不同的统计学派对超越数据(范围)进行推理有涉及否?

植物学家:一言难尽,他们中的大多数对这一点的叙述都有些含糊不清。不少统计学派的工作都与为农民提供作物处理建议的农业研究有关。为使农民能够在他们的土地上收获研究人员在试验田里达到的产量,统计学家似乎作了超越数据范围的推断。我记得看过一篇统计学家写的论文,其中声明任何人企图根据对过去的分析而推断未来都十分危险。我不清楚这位统计学家到底想说什么。论文的其余部分太过数学化我看不懂。

逻辑学家:这倒挺有趣,尽管那篇论文里的数学我也可能看不懂。我或许可以提及几本早期的有关著作。你知道是谁开始这项关于推理的研究吗?

植物学家:是贝叶斯(Bayes),但人们提起他总是颇有微词,而我也不清楚贝叶斯其人;还有就是法国人拉普拉斯(Laplace),但他仅仅是重复了贝叶斯的错误而已。

逻辑学家:什么!不可能是同一个拉普拉斯。我们都知道拉普拉斯是自牛顿以来对天体动力学贡献最大的人;是他首次详细描述了太阳系行星运行的细节,他大概是不会出错的。

植物学家:你最好还是全面了解一下拉普拉斯的生平,以免下错结论。但不管怎样,你又能希望做些什么呢?你说过超越数据(范围)进行推理不属于逻辑学范畴,那人们应该怎样做才能尝试对其进行合乎逻辑的处理呢?

逻辑学家:这就说来话长了。逻辑这一术语是非常有弹性的。对集合进行分类可以追溯到很久远的时代。希腊人曾尝试对几何作严格的逻辑处理,他们也曾获得关于有理分数的恰当理论:有理分数



实际上是以整数比较的方式定义的。但希腊人证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理分数,并怀疑 $\pi$ 也不是,尽管这两个数确实都在几何中存在。欧多克斯(Eudoxus)创立过关于无理数的令人满意的理论,这一事实载于欧几里得的著作第五卷。但数学家们似乎都忽略了这一点,直到戴德金(Dedekind)在19世纪初证明了无理数可由有理数集加以定义(或至少可由有理数集加以识别,假设无理数存在的话)。就连神秘的 $-1$ 的平方根也得到了处理。一些二次方程在实数范围内无解,但在这些方程中引入其平方等于 $-1$ 的符号 $i$ ,数学家们就证明了所有的二次方程在扩展的数系里都有解。这时数学家们尚未对 $i$ 赋予任何意义,但高斯(Gauss)指出形如 $a+bi$ 的复数可用两个实数 $a, b$ 来确定,故所有关于复数的代数都能用关于实数的代数予以重述。复代数的一个特点是保留 $i^2=-1$ 的法则,需要采用关于数偶的一个相当特殊的乘法规则。这规则一经给定,所有对实数能施加的运算对复数也能照样施行。

植物学家:既然能用实数作一切运算,为什么还要不嫌麻烦引入复数呢?

逻辑学家:主要是为了节省时间。一个用复数写的方程如换用实数表之,就需写出两个方程才行。特别是那些我们所需要的方程,用复数表示常有简单的形式。许多关于实数的结果应用复数理论可以使其得到非常容易的证明(C)。

我要指出的是,数学家们是从正整数出发一步一步地对它进行扩展,直至能够证明复数的种种性质(表示复数的数偶可不必为有理数)。不言而喻,数学家们在扩展数系的道路上已经走得相当远了。

植物学家:你这说的是数学的弹性,很不错。但你刚才提及的是逻辑的弹性,请一以贯之,不要跑题。

逻辑学家:从某种意义上说,你批评得对。但现代逻辑学始自皮亚诺和弗雷格(Peano and Frege),而这方面最重要的著作是怀特海