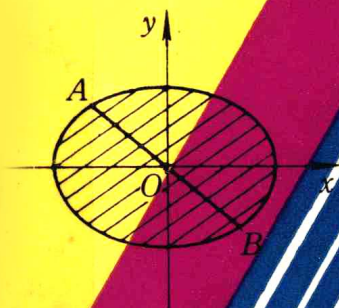


怎样学好数学

平面解析几何



上海教育出版社

怎样学好数学

平面解析几何

上海中学 顾正明、周晓雯

上海教育出版社

(沪)新登字 107 号

怎样学好数学

平面解析几何

上海中学 顾正明、周晓雯

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 江苏太仓印刷厂印刷

开本 787 × 1092 1/32 印张 7.25 字数 157,000

1991 年 12 月第 1 版 1991 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—5,300 本

ISBN 7-5320-2378-8/G·2313 定价 2.45 元

写在前面

数学是现代科学的基础学科之一。数学水平的高低将会直接或间接地影响我国科学技术的发展。为了帮助青年学生在中学阶段系统而又牢固地掌握基础的基础，加深对中学数学基本概念、公式的理解，熟练基本运算技能，锻炼积极思维，培养分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《怎样学好数学》的小丛书，供中学生、自学青年参考、学习之用。

这套小丛书是以中学现行数学课本为依据而编写的，合共十一册：初中代数、几何各两册；高中代数两册，三角、立体几何、解析几何各一册；数学学习与思考两册。在内容编排上力求配合教材，在知识方面适当地作了拓广。它的特点是，每册书的每章内容大致从五个栏目去展开：(1) 知识拓广(基础知识)，(2) 疑难辨析，(3) 解题方法，(4) 错在哪里，(5) 练习和思考。具体体现如下：

在知识拓广部分：介绍一些数学知识产生的背景；围绕教材的重点、难点，有针对性地讲清基本概念，从不同的角度定义某一概念，以及扩展和这一内容有关的知识，使学生比较深入地理解和掌握基础知识。

在疑难辨析部分：对教材中的难点或学生容易混淆的概念，讲清知识的内在联系和本质的区别，同时作一定的对比、分析，使学生养成严密地剖析思维的良好习惯。

在解题方法部分：介绍几种典型例题的解题思路，指导学生的解题途径，有的采取一题多解，开阔学生的解题思路和

判断解法优劣的能力,有的采取小综合题,提高学生运用知识的能力和培养分析的习惯。至于在证题方法中,除了指导学生掌握定理本身的内容外,还引导学生掌握证明过程中所用的方法。

在错在哪里部分:中学生目前在学习教学中,常常由于审题不周密,或者概念不清楚,或者推理无依据,或者讨论不全面,或者计算不准确,或者作图不认真而导致这样和那样的错误,故在分析和订正里引导学生认真剖析错误所在,找出造成错误的原因,然而订正错误,总结教训,有利于学生从反面加深对基础知识的理解和基本技能的掌握,从而提高分析问题和解决问题的能力。

在练习和思考部分:安排一定数量的练习题和思考题,引导学生独立思考,复习和巩固已学的知识,进一步提高运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

这套小丛书由本市上海中学、复旦附中、华东师大一附中、华东师大二附中、五十一中学、七一中学、杨浦区教育学院部分数学教师协同编写。由于我们水平有限,又缺乏编写经验,缺点、错误一定存在,希望多加批评指正。

唐寿颖
一九八五年八月

目 录

第一章 直线1

• 知识拓广 •

1. 有向直线和有向线段(1)
2. 几个重要公式(3)
3. 直线方程的形式(7)
4. 直线的法线式方程(8)
5. 点到直线的距离(11)
6. 两条直线的位置关系(13)
7. 常见的直线系方程(17)

• 疑难辨析 •

1. 怎样表示线段和射线的方程(19)
2. 一次函数的解析式和直线方程之间的关系(20)
3. 怎样理解两个独立条件决定一条直线(21)

• 解题方法 •

1. 怎样用解析法证题(22)
2. 灵活地运用定比分点公式(26)
3. 怎样求直线的方程(28)
4. 求对称点和对称直线的方法(31)
5. 怎样证明三点共线、三线共点(35)
6. 证明动直线过定点的方法(38)

• 错在哪里 •

- 问题 1 (40) 问题 2 (41) 问题 3 (42) 问题 4 (44)
问题 5 (45) 问题 6 (45)

• 练习和思考 •

- 1~36 (47)~(50)

第二章 圆锥曲线53

• 知识拓广 •

1. 曲线和方程的关系(53)
2. 充要条件(58)
3. 圆

方程的两种形式(60) 4. 常见的圆系方程(63) 5. 椭圆和双曲线的性质比较(67) 6. 圆锥曲线的焦点半径公式(72) 7. 曲线的切线和法线的定义(75) 8. 圆锥曲线的切线方程(76) 9. 圆锥曲线的切线或法线的性质(84) 10. 圆锥曲线的直径(87)

• 疑难辨析 •

1. 椭圆或双曲线的两种定义是否等价(90) 2. 共轭双曲线与有共同渐近线的双曲线之间的关系(93) 3. 用“ $\Delta=0$ ”判断直线和圆锥曲线相切时需要注意什么(93) 4. 直线和双曲线什么时候相交、相切、相离(95)

• 解题方法 •

1. 选用适当的点坐标表示几何量进行证题(97) 2. 求曲线轨迹方程的两种方法(99) 3. 怎样判断直线和圆相切(110) 4. 韦达定理在解有关直线和圆锥曲线的位置关系问题中的应用(111) 5. 有关圆锥曲线的最值问题(118)

• 错在哪里 •

问题 1 (124)	问题 2 (125)	问题 3 (126)
问题 4 (127)	问题 5 (127)	问题 6 (128)
问题 7 (128)	问题 8 (129)	

• 练习和思考 •

1~19 (130)~(134)

第三章 坐标变换136

• 知识拓广 •

1. 坐标轴的平移(136) 2. 二元二次方程 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的化简、讨论(137) 3. 对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线方程(139) 4. 坐标轴的旋转(141) 5. 一般二元二次方程的化简、讨论(143) 6. 圆锥曲线系(151)

• 疑难辨析 •

1. 坐标轴的平移与图象平移之间的关系(154) 2. B^2-

$4AC < 0, > 0, = 0$ 分别是二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示椭圆、双曲线、抛物线的什么条件(156)

• 解题方法 •

1. 利用平移公式变换点的坐标和曲线的方程(156)
2. 怎样化简二元二次方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (158)
3. 求对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线方程(161)

• 错在哪里 •

问题 1 (163) 问题 2 (164)

• 练习和思考 •

1~5 (164)~(165)

第四章 参数方程和极坐标166

• 知识拓广 •

1. 曲线参数方程的概念(166)
2. 参数方程和普通方程的互化(167)
3. 常见曲线的参数方程(168)
4. 点的极坐标和直角坐标间的关系(172)
5. 圆锥曲线的统一极坐标方程(174)

• 疑难辨析 •

1. 曲线的参数方程与含参数的曲线方程有什么区别(176)
2. 直线、圆、椭圆的参数方程一样吗(177)
3. 在极坐标系中,两条曲线的交点坐标一定是相应方程组的公共解吗(181)
4. 极坐标方程和直角坐标方程互化时,何时可以同乘或同除 ρ (183)
5. 在极坐标系中,怎样讨论曲线的对称性(185)
6. 圆锥曲线的统一极坐标方程与圆锥曲线的标准方程可以互化吗(188)

• 解题方法 •

1. 怎样化参数方程为普通方程(191)
2. 直线参数方程的应用(194)
3. 圆锥曲线参数方程的应用(201)
4. 怎样建立曲线的极坐标方程(205)
5. 圆锥曲线的统一极坐标方程在解题中的应用(208)

• 错在哪里 •

问题 1 (210) 问题 2 (212) 问题 3 (213) 问题 4 (214)

问题 5 (215)

• 练习和思考 •

1~37 (218)~(223)

第一章 直 线

知识拓广

1. 有向直线和有向线段

(1) 有向直线

在平面几何中,对于一条直线,我们只考虑它的位置而不考虑它自身的方向.但在日常生活和科学研究中,常常还需要考虑直线自身的方向.例如,上海的南京路有西、东之分;上海与北京间的航线有往返之别.因此,给直线以一定的方向就可以更客观地反映许多实际问题,特别是运动着的物体.为了使数学更好地反映运动与变化,我们就引进了有向直线的概念.把规定了正方向的直线叫做有向直线.初中学过的数轴就是一种有向直线.而平面几何中的直线可以看作是尚未赋予方向的直线.

(2) 有向线段

(1) 有向线段的概念 在平面几何中,直线上两点间的部分叫做线段.从运动的观点来看,质点从直线段 AB 的 A 点运动到 B 点,与从 B 点运动到 A 点,虽然在轨迹上是同一直线段,但意义毕竟是不同的.为了更客观地反映这一差别,在解析几何中还引入了有向线段,把规定了起点和终点的线段叫做有向线段.以 A 为起点、 B 为终点的有向线段记作 \overline{AB} .显然, \overline{BA} 是与 \overline{AB} 不同的有向线段, \overline{BA} 是指以 B 为起点、 A 为终点的有向线段.

沿直线段 AB , 从 A 运动到 B 与从 B 运动到 A 所经过的路程是相同的, 这个路程就是平面几何中线段 AB 的长度. 它也称为有向线段 \overline{AB} 的长度, 记作 $|AB|$. 显然, $|AB| = |BA|$.

当有向线段 \overline{AB} 在有向直线 l 上或与 l 平行时, 根据 \overline{AB} 与 l 的方向相同或相反, 可以得到有向线段 \overline{AB} 的数量 AB .

当 \overline{AB} 与 l 同向时, $AB = |AB|$;

当 \overline{AB} 与 l 异向时, $AB = -|AB|$. 显然, $AB = -BA$.

这里要注意区别, 记号 \overline{AB} 表示有向线段 (认定起点为 A 、终点为 B 的几何图形); $|AB|$ 表示 \overline{AB} 的长度 (用单位长度度量 \overline{AB} 所得的非负实数); AB 表示 \overline{AB} 的数量 (与有向直线 l 比较同向或异向后, $|AB|$ 连同它前面的正号或负号所得的实数).

(ii) 有向线段的加法定理 在同一条有向直线上的有向线段是可以相加的, 运用完全归纳法, 可以证明*:

设 A 、 B 、 C 是同一条有向直线上的三个点, 那么不论它们的位置如何, 有向线段 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的数量满足关系式

$$AB + BC = AC.$$

这个公式称为沙尔 (Chasles, 1793—1880, 法国数学家) 公式, 也称为有向线段的加法定理.

(iii) 有向线段的数量公式 我们知道, 数轴是一条有向直线, 数轴上的点和实数有一一对应关系, 和数轴上一点相对应的实数叫做这点的坐标. 从有向线段的观点来看, A 点的坐标 x_1 就是有向线段 \overline{OA} 的数量.

* 沙尔公式的证明与课本上对 $AB = OB - OA$ 的证明类似. 具体证法可以参阅《直线和圆》第3页, 陈森林、揭方琢编, 上海教育出版社1981年出版.

对于数轴上的有向线段 \overline{AB} , 根据沙尔公式, 可得

$$AB = AO + OB = -OA + OB = OB - OA = x_2 - x_1.$$

从而可得数轴上 A 、 B 两点间的距离为

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

在平面直角坐标系中,

对于平行于 x 轴的有向线段 $\overline{P_1P_2}$, 设 $P_1(x_1, b)$ 、 $P_2(x_2, b)$ 在 x 轴上的射影分别是 $M_1(x_1, 0)$ 、 $M_2(x_2, 0)$, 则有

$$P_1P_2 = M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

对于平行于 y 轴的有向线段 $\overline{Q_1Q_2}$, 设 $Q_1(a, y_1)$ 、 $Q_2(a, y_2)$ 在 y 轴上的射影分别是 $N_1(0, y_1)$ 、 $N_2(0, y_2)$, 则有

$$Q_1Q_2 = N_1N_2 = y_2 - y_1.$$

2. 几个重要公式

(1) 两点间的距离公式

从数轴上两点的距离公式出发, 运用勾股定理, 很容易推出平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

使用这个公式时要注意:

(i) 它与线段的端点位置的顺序无关, 因此也可以写成

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

(ii) 平方根号内是两点的同名坐标之差的平方和.

(2) 直线的斜率公式

(i) 直线的倾角 为了反映直线在平面直角坐标系中的方位, 我们规定一条直线向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾角. 当直线与 x 轴平行时规定直线的倾角为 0 . 因此, 任何直线都有倾角 α , $\alpha \in [0, \pi)$.

(ii) 直线的斜率公式 除了倾角之外, 还可以引进直线的斜率概念来刻划直线的方位. 倾角的正切叫做这条直线的

斜率.

当 $x_1 \neq x_2$ 时, 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线斜率

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

当倾角 α 为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 直线的斜率不存在.

(3) 线段的定比分点公式

(i) 线段定比分点的定义 有向直线 l 上一点 P , 把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的数量比叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比, 比值通常记作 λ , 即

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}.$$

这里, 比的前项是有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的起点 P_1 到分点 P 的有向线段 $\overline{P_1P}$ 的数量, 后项是分点 P 到终点 P_2 的有向线段 $\overline{PP_2}$ 的数量, 顺序是起点 \rightarrow 分点, 分点 \rightarrow 终点, 不能搞错. 当 λ 为定值时, 点 P 在 l 上的位置是确定的, 因此, 点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点.

定比 λ 的数值和分点 P 的位置之间有如下的关系:

如果点 P 在线段 P_1P_2 上, 点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点. 这时, 不论 l 的方向如何, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 同向, 所以 $\lambda > 0$.

如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上, 点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点. 这时不论 l 的方向如何, $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 异向, 所以 $\lambda < 0$ (因为 $|P_1P|$ 与 $|PP_2|$ 不可能相等, 所以 $\lambda \neq -1$).

如果分点 P 和 P_1 重合, $P_1P = 0$, 那么 $\lambda = 0$.

如果分点 P 和 P_2 重合, $PP_2 = 0$, 那么 λ 不存在.

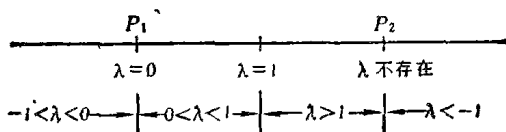


图 1-1

上述关系可以表示成图 1-1.

(ii) 定比分点的坐标公式 当已知 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点为 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$, 点 $P(x, y)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ ($\lambda \neq -1$) 时, 分点 P 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

特别地, 当点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

(iii) 三角形的重心坐标公式 当三角形的顶点为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 时, 利用中线的性质, 可得重心 $G(x, y)$ 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

(4) 三角形的面积

已知平面上的三点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$, 可以求出以这三个点为顶点的三角形的面积. 下面我们用这三个点的坐标来表示 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积.

如图 1-2, 从 P_1 、 P_2 、 P_3 分别向 x 轴引垂线 P_1M_1 、 P_2M_2 、 P_3M_3 , 再作 $P_1Q \perp P_2M_2$, 垂足分

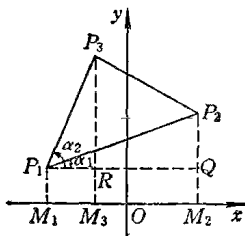


图 1-2

别为 M_1 、 M_2 、 M_3 、 Q ，其中 P_1Q 与 P_3M_3 相交于点 R 。设 $|P_1P_2| = d_1$ ， $|P_1P_3| = d_2$ ， P_1P_2 和 P_1P_3 的倾角分别是 α_1 和 α_2 ， P_1P_2 和 P_1P_3 的夹角是 θ [$\theta \in (0, \pi)$]，那么 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \theta = \frac{1}{2} d_1 d_2 |\sin(\alpha_2 - \alpha_1)| \\ &= \frac{1}{2} d_1 d_2 |\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1| \\ &= \frac{1}{2} |d_1 \cos \alpha_1 \cdot d_2 \sin \alpha_2 - d_1 \sin \alpha_1 \cdot d_2 \cos \alpha_2|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore d_1 \sin \alpha_1 &= |QP_2| = QP_2 = y_2 - y_1, \\ d_1 \cos \alpha_1 &= |P_1Q| = P_1Q = x_2 - x_1, \\ d_2 \sin \alpha_2 &= |RP_3| = RP_3 = y_3 - y_1, \\ d_2 \cos \alpha_2 &= |P_1R| = P_1R = x_3 - x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)| \\ &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1|. \end{aligned}$$

绝对值符号里的数 $x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1$ 恰好等于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的值。为了便于记忆，常把上述三角形的面积公式*写成行列

* 在处理有些面积问题时，需要进一步考虑顶点 P_1 、 P_2 、 P_3 的顺序，用

$$S' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的值进行运算。这时，} S' \text{ 的值叫做 } \triangle P_1 P_2 P_3 \text{ 的有向面积。}$$

关于有向面积，可以参阅《直线和圆》第 126 页。

式的形式: $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值.}$$

例 1 点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之比是 3:4, 且它与点 $A(1, 2)$ 、 $B(-3, 4)$ 所组成的三角形面积是 5, 求点 P 的坐标.

解 设点 P 的坐标为 (x, y) , 由已知得

$$\begin{cases} \frac{|y|}{|x|} = \frac{3}{4}, & \text{①} \\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值} = 5. & \text{②} \end{cases}$$

由 ①, 得 $3x \pm 4y = 0$.

由 ②, 得 $x + 2y = 0$, 或 $x + 2y = 10$.

解方程组

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ x + 2y = 10; \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + 2y = 0; \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + 2y = 10. \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x=-20, \\ y=15; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$

因为比的后项不能为 0, 即 $x \neq 0$, 所以, 所求点 P 的坐标为 $(4, 3)$ 或 $(-20, 15)$.

3. 直线方程的形式

(1) 四种特殊形式

一条直线在平面上的位置, 可以由不同的条件来确定. 因

此,表示这条直线的方程,可以有多种形式.根据给定直线的几何特征,可以建立起下列四种特殊形式的直线方程.

名称	方程的形式	各常数的几何意义	适用范围
点斜式	$y - y_1 = k(x - x_1)$	(x_1, y_1) 是直线上一个定点, k 是斜率	不垂直于 x 轴
斜截式	$y = kx - b$	k 是斜率, b 是 y 轴上的截距	不垂直于 x 轴
两点式*	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	(x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 是直线上两个定点	不垂直于 x 轴和 y 轴
截距式	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a 、 b 分别是 x 轴、 y 轴上的非零截距	不垂直于 x 轴和 y 轴, 不过原点

(2) 直线方程的一般形式

上述点斜式、斜截式、两点式和截距式方程,以及平行于 y 轴或 x 轴的直线方程 $x = x_1$ 或 $y = y_1$, 都是含有变数 x 与 y (至少含一个)的一次方程.这就是说,平面内任意一条直线的方程都是关于 x 和 y 的一次方程.

反过来,关于 x 和 y 的一次方程的一般形式是

$$Ax + By + C = 0, \quad (A、B \text{ 不同时为零})$$

无论 A 、 B 、 C 取什么值,它都表示一条直线.

因此,直线方程的一般形式是

$$Ax + By + C = 0. \quad (A、B \text{ 不同时为零})$$

4. 直线的法线式方程

直线方程的形式,除了点斜式、斜截式、两点式、截距式和

* 直线的两点式方程还可以写成 $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$ 或

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 的形式, 它们都可以表示任意位置的直线.}$$