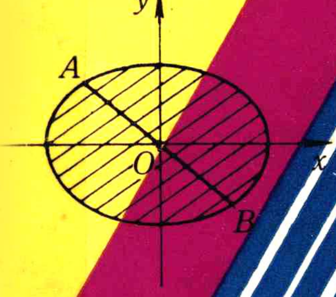
怎样学好数学

平面解析几何



上海教育出版社

怎样学好数学

平面解析几何

上海中学　顾正明、周晓雯

上海教育出版社

(沪)新登字 107 号

怎 样 学 好 数 学

平面解析几何

上海中学 顾正明、周晓雯

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 江苏太仓印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.25 字数 157,000

1991 年 12 月第 1 版 1991 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—5,300本

ISBN 7-5320-2378-8/G·2313 定价: 2.45 元

写在前面

数学是现代科学的基础学科之一．数学水平的高低将会直接或间接地影响我国科学技术的发展．为了帮助青年学生在中学阶段系统而又牢固地掌握基础的基础，加深对中学数学基本概念、公式的理解，熟练基本运算技能，锻炼积极思维，培养分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套«怎样学好数学»的小丛书，供中学生、自学青年参考、学习之用．

这套小丛书是以中学现行数学课本为依据而编写的，合共十一册：初中代数、几何各两册；高中代数两册，三角、立体几何、解析几何各一册；数学学习与思考两册．在内容编排上力求配合教材，在知识方面适当地作了拓广．它的特点是，每册书的每章内容大致从五个栏目去展开：(1) 知识拓广（基础知识），(2) 疑难辨析，(3) 解题方法，(4) 错在哪里，(5) 练习和思考．具体体现如下：

在知识拓广部分：介绍一些数学知识产生的背景；围绕教材的重点、难点，有针对性地讲清基本概念，从不同的角度定义某一概念，以及扩展和这一内容有关的知识，使学生比较深入地理解和掌握基础知识．

在疑难辨析部分：对教材中的难点或学生容易混淆的概念，讲清知识的内在联系和本质的区别，同时作一定的对比、分析，使学生养成严密地剖析思维的良好习惯．

在解题方法部分：介绍几种典型例题的解题思路，指导学生的解题途径，有的采取一题多解，开阔学生的解题思路和

判断解法优劣的能力，有的采取小综合题，提高学生运用知识的能力和培养分析的习惯。至于在证题方法中，除了指导学生掌握定理本身的内容外，还引导学生掌握证明过程中所用到的方法。

在错在哪里部分：中学生目前在学习数学中，常常由于审题不周密，或者概念不清楚，或者推理无依据，或者讨论不全面，或者计算不准确，或者作图不认真而导致这样和那样的错误，故在分析和订正里引导学生认真剖析错误所在，找出造成错误的原因，然而订正错误，总结教训，有利于学生从反面加深对基础知识的理解和基本技能的掌握，从而提高分析问题和解决问题的能力。

在练习和思考部分：安排一定数量的练习题和思考题，引导学生独立思考，复习和巩固已学的知识，进一步提高运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

这套小丛书由本市上海中学、复旦附中、华东师大一附中、华东师大二附中、五十一中学、七一中学、杨浦区教育学院部分数学教师协同编写。由于我们水平有限，又缺乏编写经验，缺点、错误一定存在，希望多加批评指正。

唐秀颖
一九八五年八月

目　　录

第一章　直　　线

知识拓广

1. 有向直线和有向线段

(1) 有向直线

在平面几何中，对于一条直线，我们只考虑它的位置而不考虑它自身的方向. 但在日常生活和科学研究中，常常还需要考虑直线自身的方向. 例如，上海的南京路有西、东之分；上海与北京间的航线有往返之别. 因此，给直线以一定的方向就可以更客观地反映许多实际问题，特别是运动着的物体. 为了使数学更好地反映运动与变化，我们就引进了有向直线的概念. 把规定了正方向的直线叫做有向直线. 初中学过的数轴就是一种有向直线. 而平面几何中的直线可以看作是尚未赋予方向的直线.

(2) 有向线段

(1) 有向线段的概念　在平面几何中，直线上两点间的部分叫做线段. 从运动的观点来看，质点从直线段 AB 的 A 点运动到 B 点，与从 B 点运动到 A 点，虽然在轨迹上是同一直线段，但意义毕竟是不同的. 为了更客观地反映这一差别，在解析几何中还引入了有向线段，把规定了起点和终点的线段叫做有向线段. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overline{AB}$. 显然，$\overline{BA}$ 是与 $\overline{AB}$ 不同的有向线段，$\overline{BA}$ 是指以 B 为起点、A 为终点的有向线段.

沿直线段 AB，从 A 运动到 B 与从 B 运动到 A 所经过的路程是相同的，这个路程就是平面几何中线段 AB 的长度. 它也称为有向线段 $\overline{AB}$ 的长度，记作 $|AB|$. 显然，$|AB|=|BA|$.

当有向线段 $\overline{AB}$ 在有向直线 l 上或与 l 平行时，根据 $\overline{AB}$ 与 l 的方向相同或相反，可以得到有向线段 $\overline{AB}$ 的数量 AB.

当 $\overline{AB}$ 与 l 同向时，$AB=|AB|$;

当 $\overline{AB}$ 与 l 异向时，$AB=-|AB|$. 显然，$AB=-BA$.

这里要注意区别，记号 $\overline{AB}$ 表示有向线段（认定起点为 A、终点为 B 的几何图形）；$|AB|$ 表示 $\overline{AB}$ 的长度（用单位长度度量 $\overline{AB}$ 所得的非负实数）；AB 表示 $\overline{AB}$ 的数量（与有向直线 l 比较同向或异向后，$|AB|$ 连同它前面的正号或负号所得的实数）.

(ii) 有向线段的加法定理　在同一条有向直线上的有向线段是可以相加的. 运用完全归纳法，可以证明*：

设 A、B、C 是同一条有向直线上的三个点，那么不论它们的位置如何，有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的数量满足关系式

$$AB+BC=AC.$$

这个公式称为沙尔 (Chasles, 1793—1880, 法国数学家) 公式，也称为有向线段的加法定理.

(iii) 有向线段的数量公式　我们知道，数轴是一条有向直线，数轴上的点和实数有一一对应关系，和数轴上一点相对应的实数叫做这点的坐标. 从有向线段的观点来看，A 点的坐标 x_1 就是有向线段 $\overline{OA}$ 的数量.

---

* 沙尔公式的证明与课本上对 $AB=OB-OA$ 的证明类似. 具体证法可以参阅《直线和圆》第 3 页，陈森林、揭方琢编，上海教育出版社 1981 年出版.

对于数轴上的有向线段 $\overline{AB}$，根据沙尔公式，可得

$$AB=AO+OB=-OA+OB=OB-OA=x_2-x_1.$$

从而可得数轴上 A、B 两点间的距离为

$$|AB|=|x_2-x_1|.$$

在平面直角坐标系中，

对于平行于 x 轴的有向线段 $\overline{P_1P_2}$，设 $P_1(x_1, b)$、$P_2(x_2, b)$ 在 x 轴上的射影分别是 $M_1(x_1, 0)$、$M_2(x_2, 0)$，则有

$$P_1P_2=M_1M_2=x_2-x_1;$$

对于平行于 y 轴的有向线段 $\overline{Q_1Q_2}$，设 $Q_1(a, y_1)$、$Q_2(a, y_2)$ 在 y 轴上的射影分别是 $N_1(0, y_1)$、$N_2(0, y_2)$，则有

$$Q_1Q_2=N_1N_2=y_2-y_1.$$

2．几个重要公式

(1) 两点间的距离公式

从数轴上两点的距离公式出发，运用勾股定理，很容易推出平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

使用这个公式时要注意：

(i) 它与线段的端点位置的顺序无关，因此也可以写成

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

(ii) 平方根号内是两点的同名坐标之差的平方和.

(2) 直线的斜率公式

(i) 直线的倾角　为了反映直线在平面直角坐标系中的方位，我们规定一条直线向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾角．当直线与 x 轴平行时规定直线的倾角为 0．因此，任何直线都有倾角 α，$\alpha\in[0, \pi)$.

(ii) 直线的斜率公式　除了倾角之外，还可以引进直线的斜率概念来刻划直线的方位．倾角的正切叫做这条直线的

斜率.

当 $x_1 \neq x_2$ 时，经过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的直线斜率

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

当倾角 α 为 $\frac{\pi}{2}$ 时，直线的斜率不存在.

(3) 线段的定比分点公式

（i）线段定比分点的定义　有向直线 l 上一点 P，把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的数量比叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比，比值通常记作 λ，即

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

这里，比的前项是有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的起点 P_1 到分点 P 的有向线段 $\overline{P_1P}$ 的数量，后项是分点 P 到终点 P_2 的有向线段 $\overline{PP_2}$ 的数量，顺序是起点→分点，分点→终点，不能搞错. 当 λ 为定值时，点 P 在 l 上的位置是确定的，因此，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点.

定比 λ 的数值和分点 P 的位置之间有如下的关系：

如果点 P 在线段 P_1P_2 上，点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点. 这时，不论 l 的方向如何，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 同向，所以 $\lambda>0$.

如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上，点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点. 这时不论 l 的方向如何，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 异向，所以 $\lambda<0$（因为 $|P_1P|$ 与 $|PP_2|$ 不可能相等，所以 $\lambda\neq -1$）.

如果分点 P 和 P_1 重合，$P_1P=0$，那么 $\lambda=0$.

如果分点 P 和 P_2 重合，$PP_2=0$，那么 λ 不存在.

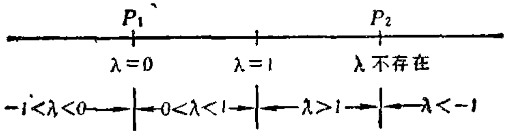


图 1-1

上述关系可以表示成图 1-1.

(ii) 定比分点的坐标公式　当已知 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ $(\lambda\neq-1)$ 时，分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

特别地，当点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时，

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ \ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

(iii) 三角形的重心坐标公式　当三角形的顶点为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ 时，利用中线的性质，可得重心 $G(x, y)$ 的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

(4) 三角形的面积

已知平面上的三点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$，可以求出以这三个点为顶点的三角形的面积. 下面我们用这三个点的坐标来表示 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积.

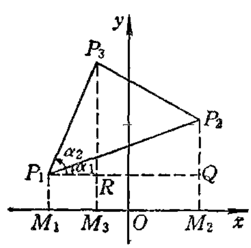


图 1-2

如图 1-2，从 P_1、P_2、P_3 分别向 x 轴引垂线 P_1M_1、P_2M_2、P_3M_3，再作 $P_1Q\perp P_2M_2$，垂足分

别为 M_1、M_2、M_3、Q，其中 P_1Q 与 P_3M_3 相交于点 R. 设 $|P_1P_2|=d_1$，$|P_1P_3|=d_2$，P_1P_2 和 P_1P_3 的倾角分别是 α_1 和 α_2，P_1P_2 和 P_1P_3 的夹角是 $\theta[\theta\in(0,\pi)]$，那么 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta=\frac{1}{2}d_1d_2|\sin(\alpha_2-\alpha_1)|$$
$$=\frac{1}{2}d_1d_2|\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\sin\alpha_1|$$
$$=\frac{1}{2}|d_1\cos\alpha_1\cdot d_2\sin\alpha_2-d_1\sin\alpha_1\cdot d_2\cos\alpha_2|.$$

$$\because\quad d_1\sin\alpha_1=|QP_2|=QP_2=y_2-y_1,$$
$$d_1\cos\alpha_1=|P_1Q|=P_1Q=x_2-x_1,$$
$$d_2\sin\alpha_2=|RP_3|=RP_3=y_3-y_1,$$
$$d_2\cos\alpha_2=|P_1R|=P_1R=x_3-x_1,$$
$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|$$
$$=\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1|.$$

绝对值符号里的数 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1$ 恰好等于三阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的值. 为了便于记忆，常把上述三角形的面积公式*写成行列

---

* 在处理有些面积问题时，需要进一步考虑顶点 P_1、P_2、P_3 的顺序，用 $S'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的值进行运算. 这时，S' 的值叫做 $\triangle P_1P_2P_3$ 的有向面积. 关于有向面积，可以参阅《直线和圆》第 126 页.

式的形式：$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值.}$$

例 1 点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之比是 3:4，且它与点 $A(1, 2)$、$B(-3, 4)$ 所组成的三角形面积是 5，求点 P 的坐标.

解 设点 P 的坐标为 (x, y)，由已知得

$$\begin{cases} \dfrac{|y|}{|x|}=\dfrac{3}{4}, & ① \\ \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}=5. & ② \end{cases}$$

由 ①，得 $\quad 3x\pm 4y=0.$

由 ②，得 $\quad x+2y=0$, 或 $x+2y=10.$

解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ x+2y=0; \end{cases} \begin{cases} 3x+4y=0 \\ x+2y=10; \end{cases} \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x+2y=0; \end{cases} \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x+2y=10. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x=-20, \\ y=15; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

因为比的后项不能为 0，即 $x\neq 0$，所以，所求点 P 的坐标为 $(4, 3)$ 或 $(-20, 15)$.

3．直线方程的形式

(1) 四种特殊形式

一条直线在平面上的位置，可以由不同的条件来确定.因

此，表示这条直线的方程，可以有多种形式．根据给定直线的几何特征，可以建立起下列四种特殊形式的直线方程．

名称	方程的形式	各常数的几何意义	适用范围
点斜式	$y-y_1=k(x-x_1)$	(x_1, y_1) 是直线上一个定点，k 是斜率	不垂直于 x 轴
斜截式	$y=kx+b$	k 是斜率，b 是 y 轴上的截距	不垂直于 x 轴
两点式*	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 是直线上两个定点	不垂直于 x 轴和 y 轴
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	a、b 分别是 x 轴、y 轴上的非零截距	不垂直于 x 轴和 y 轴，不过原点

(2) 直线方程的一般形式

上述点斜式、斜截式、两点式和截距式方程，以及平行于 y 轴或 x 轴的直线方程 $x=x_1$ 或 $y=y_1$，都是含有变数 x 与 y（至少含一个）的一次方程．这就是说，平面内任意一条直线的方程都是关于 x 和 y 的一次方程．

反过来，关于 x 和 y 的一次方程的一般形式是

$$Ax+By+C=0, \quad (A、B\text{ 不同时为零})$$

无论 A、B、C 取什么值，它都表示一条直线．

因此，直线方程的一般形式是

$$Ax+By+C=0. \quad (A、B\text{ 不同时为零})$$

4．直线的法线式方程

直线方程的形式，除了点斜式、斜截式、两点式、截距式和

* 直线的两点式方程还可以写成 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$ 或 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的形式，它们都可以表示任意位置的直线．