

新编全国各类成人高等学校统一招生考试辅导用书

(专科起点升本科)

GAODENGSHUXUE

高等数学 (一)

强化训练

钱吉林 主编

近年试卷及标准答案

全真模拟试题

同步练习 命题趋势分析

重点提示 典型题分析

中国致公出版社

新编全国各类成人高等学校统一招生考试辅导用书

(大专起点升本科)

高等数学(一) 强化训练

钱吉林 编写

中国致公出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学强化训练 / 钱吉林, 白亚根主编.—北京:中国致公出版社,2001.9

ISBN 7-80096-713-1

I.高… II.①钱… ②白… III. 高等数学—成人教育: 高等教育—入学考试—自学参考资料 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065905 号

高等数学(一)强化训练

中国致公出版社出版

新华书店经销

湖北毕昇印刷总厂印刷

850×1168 毫米 32 开本 21.625 印张 542 千字

2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—10000 册

ISBN7-80096-713-1/G · 625

全套定价:28.00 元(本册 14.00 元)

前 言

为了帮助广大考生更好地进行考前复习,提高应试能力,我们编写了这套辅导丛书,希望它能帮助考生加强理解,巩固记忆,在考试中轻松自如,从容不迫。

本丛书具有以下几大特点:

一、紧扣大纲。本丛书紧扣最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》(以下简称《考纲》),抓重点,解难点,剖疑点,帮助考生在错综复杂的知识里面进行升华提炼,力求全面突破,层层解剖,使考生在掌握知识时既可覆盖整体,又能提纲挈领。因此本丛书中设有“重点提示”和“同步练习”。

二、编写严谨。本丛书编写人员均为各高校长期从事成人教育考前辅导、考试阅卷、试卷分析的资深教授和知名专家,具有多年的辅导和阅卷经验,能全面、准确地把握《考纲》精髓和命题动向,引导考生掌握知识点,避免走弯路。本丛书的“命题趋势分析”和“典型题分析”就是各书的亮点。

三、考前强化。怎样在临场发挥中达到最佳效果?除了平时对知识的消化、巩固外,灵活运用考试技巧也是至关重要的。在考试前,有针对性地做同步练习题和全真模拟试题,就是为了提高运用技巧的能力和增加临场经验。经过集中强化训练,考生将能在考试中进入轻车熟路、游刃有余的最佳境界。因此,本丛书特别设置了“同步练习”和“全真模拟试题”。

本丛书共分九册:《政治强化训练》、《英语强化训练》、《教育理论强化训练》、《大学语文强化训练》、《高等数学(一)强化训练》、

《高等数学(二)强化训练》、《民法强化训练》、《艺术概论强化训练》、《英语词汇背诵手册》。本丛书可与辽宁大学出版社、中央广播电视大学出版社、高等教育出版社等编写的指定用书配套使用。

广大考生在林林总总的教辅书里挑中我们编写的这套丛书进行考前复习,这是对我们最大的信任和鼓励。我们希望本套辅导丛书能成为指导考生复习备考的良师益友,并预祝考生取得优异成绩!

编 者

2001年9月

命题趋势分析

高等数学是各类院校的最重要的一门基础课,它不仅是学习后续课程的需要,而且对于从事各领域的理论研究和实践工作也将起到重要作用。因此它是新世纪的高级工程技术人员必须具备的基本素质要求。

学好高等数学的方法是:懂、记、会,就是弄懂、记牢、会用。

下面再来探讨应考方面的问题:

一、考题的情况分析

1. 试卷的结构,按考试大纲规定每份试卷为 150 分

表 1

题型	分值	数量	总分	比例
选择题	4 分	5	20 分	13.3%
填空题	4 分	10	40 分	26.7%
计算题	6 分	10	60 分	40%
解答题	10 分	3	30 分	20%
总 和		28	150 分	

2. 考试大纲规定各章分数比例

表 2

章	比例	分值
第 1 章	15%	22.5 分
第 2 章	25%	37.5 分
第 3 章	20%	30 分
第 4,5 章	20%	30 分
第 6 章	10%	15 分
第 7 章	10%	15 分

3. 2000 年试卷分析

表 3

章	选择题	填空题	计算题	解答题	总分	比例
第 1 章	1	1	2		20 分	13.3%
第 2 章	1	3	2	1	38 分	25.3%
第 3 章	1	2	2	1	34 分	22.7%
第 4,5 章	1	3	1	1	32 分	21.3%
第 6 章	1		2		16 分	10.7%
第 7 章		1	1		10 分	6.7%

4. 2001 年试卷分析

表 4

章	选择题	填空题	计算题	解答题	总分	比例
第 1 章	2	2			16 分	10.7%
第 2 章		2	3	2	46 分	30.7%
第 3 章	1	1	2	1	30 分	20%
第 4,5 章	1	2	3		30 分	20%
第 6 章	1	1	1		14 分	9.3%
第 7 章		2	1		14 分	9.3%

5. 预测试卷(结构)

表 5

章	选择题	填空题	计算题	解答题	总分	比例
第 1 章	1	1	2		20 分	13.3%
第 2 章	1	2	2	1	34 分	22.7%
第 3 章	1	2	2	1	34 分	22.7%
第 4,5 章		2	1	1	24 分	16%
第 6 章	1	2	1		18 分	12%
第 7 章	1	1	2		20 分	13.3%

二、应考对策

1. 从考试大纲(表 2)看出:最关键要学好前 3 章一元函数微积分,因为它们共占 90 分,只要做好前 3 章范围内的考题,再加后

面做些题就可以达到及格线。

2.学好前3章关键有几点(要注意这里说的是关键,不是全部)。

(1)弄清分段函数的求值问题,它关系到左、右极限,左、右导数等一系列问题。

(2)背熟16个基本初等函数的导数公式(见教育部考试中心编《高等数学(一)考试参考书》P.38),它既是求导数和微分的关键,也是求积分的关键。

(3)弄请求导法则,求积分的方法(比如第1换元法、第2换元法、分部积分法等)。

3.抓住一些常考的地方:

(1)分段函数求值。

(2)两个重要极限和它的应用。

(3)洛必达法则。

(4)几种求导(含求偏导数)方法:按公式求导、参数方程求导、隐函数求导、变上限(或下限)求导,这几种可能都会考。

(5)几种求积分方法:第1换元法、第2换元法、分部积分法都会考到(有的是不定积分,有的是定积分)。

(6)幂级数敛散性判定,求幂级数的收敛半径(或区间),幂级数展开。

(7)求二重积分的值。

(8)微分方程三者考一:分离变量法、线性方程求解、二次常系数齐次微分方程求解。

(9)应用题是下面几个考一:求极值,求图形的面积,求旋转体的体积。

4.最后的归纳:系统学习、熟记公式,多做练习(至少要做500~1000道题),突出重点,争取胜利。

目 录

命题趋势分析	(1)
第一章 函数、极限、连续	(1)
第一节 函数	(1)
重点提示	(1)
典型题分析	(1)
同步练习	(3)
第二节 极 限	(12)
重点提示	(12)
典型题分析	(12)
同步练习	(15)
第三节 连续	(22)
重点提示	(22)
典型题分析	(22)
同步练习	(25)
第二章 一元函数微分学	(34)
第一节 导数、微分	(34)
重点提示	(34)
典型题分析	(34)
同步练习	(38)
第二节 中值定理及导数的应用	(56)
重点提示	(56)
典型题分析	(57)
同步练习	(61)

第三章 一元函数积分学	(80)
第一节 不定积分	(80)
重点提示	(80)
典型题分析	(80)
同步练习	(83)
第二节 定积分	(103)
重点提示	(103)
典型题分析	(103)
同步练习	(108)
第四章 向量代数与空间解析几何	(142)
第一节 向量代数	(142)
重点提示	(142)
典型题分析	(142)
同步练习	(144)
第二节 空间解析几何	(155)
重点提示	(155)
典型题分析	(155)
同步练习	(158)
第五章 多元函数微积分学	(172)
第一节 多元函数微分学	(172)
重点提示	(172)
典型题分析	(172)
同步练习	(177)
第二节 二重积分	(187)
重点提示	(187)
典型题分析	(187)
同步练习	(190)
第六章 无穷级数	(207)

第一节 数项级数	(207)
重点提示	(207)
典型题分析	(207)
同步练习	(210)
第二节 幂级数	(221)
重点提示	(221)
典型题分析	(222)
同步练习	(223)
第七章 常微分方程	(231)
第一节 一阶微分方程、可降价的微分方程	(231)
重点提示	(231)
典型题分析	(231)
同步练习	(233)
第二节 二阶线性微分方程	(242)
重点提示	(242)
典型题分析	(243)
同步练习	(243)
全真模拟试题	(252)
全真模拟试题(一)	(252)
全真模拟试题(二)	(265)
全真模拟试题(三)	(279)
全真模拟试题(四)	(294)
全真模拟试题(五)	(310)
近年试题及标准答案	(328)
2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)试卷	(328)
2001 年成人高等学校专升本招生全国统一考试	
高等数学(一)试卷	(339)

第一章 函数、极限、连续

第一节 函数

[重点提示]

函数是高等数学的最基本概念之一。(1) 会求函数的定义域、表达式及函数值,其中特别是分段函数。(2) 理解和掌握函数的性质,其中特别是奇偶性、周期性和单调性。(3) 了解函数与反函数的关系,会求反函数。(4) 掌握基本初等函数的简单性质和图象。(5) 会运用函数知识解决简单的实际问题。

[典型题分析]

例1 求函数 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{|x - 1| - 5}$ 的定义域。

解 要使原函数有意义,必须

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ |x - 1| - 5 \neq 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} (x - 5)(x + 3) \geq 0 \\ |x - 1| \neq 5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x \geq 5 \text{ 或 } x \leq -3 \\ x - 1 \neq \pm 5 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x \geq 5 \text{ 或 } x \leq -3 \\ x \neq 6 \text{ 且 } x \neq -4 \end{cases}$$

故所求定义域为 $(-\infty, -4) \cup (-4, -3] \cup [5, 6) \cup (6, +\infty)$ 。

例2 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 5]$, 求 $f(x+2) + f(x-2)$ 的定义域。

$$0 \leq x+2 \leq 5$$

解 $\begin{cases} 0 \leq x+2 \leq 5 \\ 0 \leq x-2 \leq 5 \end{cases}, \therefore \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq x \leq 7 \end{cases}.$

故所求定义域为 $[2, 3]$.

例3 已知 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \frac{1}{x}, & \\ \frac{1}{x}, & x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 则

$f[f(\frac{\pi}{2})] =$ ()

A. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ B. $-\frac{2}{\pi}$ C. 0 D. 1

答 (A). $\because f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$

$\therefore f[f(\frac{\pi}{2})] = f(\frac{2}{\pi}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$

例4 若 $f(\sqrt{x}+1) = x+2\sqrt{x}$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = \sqrt{x}+1$, 则 $t \geq 1$, 且 $x = (t-1)^2$, 代入原式得

$f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 1, \quad (t \geq 1),$

即 $f(x) = x^2 - 1, \quad (x \geq 1).$

例5 判断函数 $f(x) = x(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2})$ 的奇偶性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\left(\frac{1}{2^{-x}-1} + \frac{1}{2}\right) = -x\left(\frac{2^x}{1-2^x} + \frac{1}{2}\right) \\ &= x\left(\frac{2^x}{2^x-1} - \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{2^x-1+1}{2^x-1} - \frac{1}{2}\right) \\ &= x\left(1 + \frac{1}{2^x-1} - \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right) = f(x). \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 为偶函数.

例6 设函数 $f(x)$ 满足 $\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

$$\text{解 } \because \sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \quad (1)$$

用 x 换 $\frac{1}{x}$ 得

$$\sqrt{3}f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (2)$$

① $\times \sqrt{3}$ + ② 得

$$2f(x) = \sqrt{3}x^2 + \frac{1}{x^2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x^2 + \frac{1}{x^2}\right), (x \neq 0).$$

[同步练习]

一、单项选择题

1. 下列各对函数中, 函数相同的是

(B)

(A) $f(x) = \frac{x}{x+1}, g(x) = 1$

(B) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = 1$

(C) $f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

(D) $f(x) = x, g(x) = |x|$

2. 函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{(2x-1)}{7}$ 的定义域是

(A)

(A) $[-3, -2] \cup [3, 4]$

(B) $(-3, -2) \cup (3, 4)$

(C) $[-3, -2]$

(D) [3, 4]

3. 设 $f(x) = \begin{cases} -5\sin x & x < 0 \\ 1-2x & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f[f(-\frac{\pi}{2})] =$ (B)
(A) 5 (B) -9 (C) 11 (D) 9

4. 已知 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f[f(x)] =$ (D)

(A) $\frac{1}{1-x}$ (B) $\frac{1}{1+x}$ (C) $1 + \frac{1}{x}$ (D) $1 - \frac{1}{x}$

5. 下列函数图象关于原点对称的是 (D)

(A) $y = x \sin x$ (B) $y = \sqrt{x}$ (C) $y = x^2 \cos x$ (D) $y = x \cos 2x$

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 且是周期为 2 的周期函数, 当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(\frac{3}{2}) =$ (B)
(A) $\frac{11}{2}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $-\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{11}{2}$

7. 设 $g(x) = \begin{cases} 2+x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] =$ (D)

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

8. 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 则 $\varphi(x) =$ (A)
(A) $\sqrt{\ln(1-x)}$ (B) $\ln(1-x)$

(C) e^{1-x} (D) e^{x-1}

二、填空题

9. 函数 $y = \sqrt{\frac{2+x}{3-x}}$ 的定义域是 $\{x | -2 \leq x < 3\}$

10. 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = \cos x + 1$, 那么 $f(x) = 2 - 2x^2$.

11. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 则 $f(x^2) + f(2x)$ 的定义域是 $[0, 1]$.

12. 已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 那么 $f(2) = -26$.

13. 设 $f(x) = \frac{1}{\lg(3-x)} + \sqrt{49-x^2}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | -7 \leq x < 3, \text{ 且 } x \neq -2\}$.

14. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 则当 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f[\frac{1}{f(x)}] = 1-x$.

15. 已知 $f(x)$ 是二次函数, 且 $f(x+1) + f(x-1) = 2x^2 - 4x$, 则 $f(x) = x^2 - 2x - 1$; $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的最小值等于 -2 , $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 内最小值和最大值分别等于 -1 和 2 .

16. 函数 $y = -\sqrt{x-1} (x \geq 1)$ 的反函数是 $f^{-1}(x) = x^2 + 1 (x \leq 0)$.

三、计算题

17. 设 $f(x) = x^3$, 求 $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

18. 作出 $y = |x+1| + \sqrt{(x-2)^2}$ 的图象.

19. 设函数 $f(x)$, 满足 $3f(x) + f(\frac{1}{x}) = x (x \neq 0)$, 求 $f(x)$ 及 $f(-1)$.

20. 设函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且对任意实数 x_1 和 x_2 满足 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(1) 求 $f(1), f(-1), f(0)$.

(2) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

21. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是增函数, 试比较 $f(-\pi)$,

$f(0) = f(0) + f(0)$ 函数、极限、连续

$f(-1) = f(1) + f(-1)$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(\pi), f(\frac{\pi}{2})$
 $f(-\frac{\pi}{2}), f(\log_2 \frac{1}{4})$ 的大小. $f(\pi) > f(\frac{\pi}{2}) > f(-\frac{\pi}{2})$

22. 设 $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1, x \in R.$

- (1) 求函数最大值; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6} + 0} f(x) = \frac{5}{4}$
 (2) 当 y 取最大值时, 求自变量 x 的集合.

23. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[f(x)], f[f(\pi)], f[f(-\pi)]$.

四、证明题

24. 证明: $f(x) = -x^3 + 1$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

25. 证明: $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

五、应用题

26. 设计一幅宣传画, 要求画面面积为 4840cm^2 , 画面的宽与高的比为 $\lambda (\lambda < 1)$, 画面的上、下各留 8cm 空白, 左、右各留 5cm 空白, 怎样确定画面的高与宽的尺寸, 能使宣传画所用纸张面积最小?

$x = \lambda y$
 $\lambda x^2 = 4840$
 $y = (\lambda x + 16)(\lambda x + 10)$
 参考答案

1. (B).

2. (A). 令 $x = 3$, 函数有意义, 从而否定(B)(C), 再令 $x = -2$, 函数有意义. 否定(D), 故选(A).

3. (B). $\because f(-\frac{\pi}{2}) = -5\sin(-\frac{\pi}{2}) = 5, f[f(-\frac{\pi}{2})] = f(5) = -9.$

4. (D). $f[f(x)] = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$
 $= \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$