题解中心
几何学辞典

薛德炯 吴载耀 编译

上海科学技术出版社

题解中心

几何学辞典

〔日本〕長澤龜之助原著
薛德炯　吴載耀　編譯

上海科学技术出版社

內容提要

本書为"数学辭典"的第三册，內容分平面几何学，解法之部，名詞之部两門，解法門又分直綫，圓，面积，比例正多角形計算題，軌跡作图，极大极小等十編，循序漸进由淺入深。載有題解 2,428 題，插圖 2,140 个，卷首冠有与平面几何有关的要項，卷末附有英汉名詞对照表，全書約計 550 千字，附刊題解类索引，記述簡明，易于查索。

本書出版于 1935 年，內容不尽正确，但为了目前各方面有需要，仍以旧版重印，供各地中、小学教师作备課时的参考。

題解中心

几何学辭典

〔日本〕长澤亀之助　原著

薛德炯　吳載耀　編譯

*

上海科学技术出版社出版

（上海南京西路 2004 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

上海市印刷五厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印張 21 24/32　插頁 4　字数 550,000

（原新亞、科技版共印 48,500 册 1935 年第 1 版）

1959 年10月新 1 版　1960 年 1 月第 2 次印刷

印数 7,001—22,000

統一书号：17119 · 9

定　价：（十）3.30元

普通公理

(a) 全量大於其部分.

(b) 全量等於其各部分之和.

(c) 同量之各等量相等.

(d) 等量加等量,其和相等.

(e) 等量減等量,其差相等.

(f) 等量加不等量,其和不等,所加之量大,其和亦大.

(g) 等量減不等量,其差不等,被減之量大,其差亦大.

(h) 等量之若干倍或若干等分相等.

幾何公理

1. 圖形得不變其形狀及大小而變其位置.

2. 可完全相合之量相等.

由普通公理 (d) 及 (e) 擴張之,則如次.

有甲乙二組之量,若甲組之量,分別等於乙組之量,則甲組各量之和與乙組各量之和,雖不全合,亦相等.

3. 過二點得引一直線,且限於一;又直線得向其任何方延長之.由是又可得以下二條.

α. 二任意直線,得將其一直線上之任意所設點,置於他直線上之任意所設點,而使二直線相合.

β. 二直線會於一點,而不全合,則此二直線不復相會.

4. 過一點得引所設直線之一平行線,且限於一.

定理之關係

1. 定理者,得由已知命題以證其爲眞理之命題也.但已知命題,或爲公理,或爲定理.

定理之敍述分二部,曰假設,曰終結是.假設者,假定之事,終結者,由假設所得之結果.茲示其範形如下.

設 A 爲 B, 則 C 爲 D. (1)

其中設 A 爲 B 爲假設,則 C 爲 D 爲終結.

若此定理果眞,則下定理亦必眞.

設 C 非 D, 則 A 非 B. (2)

如 (1) 與 (2) 者,曰互爲對定理.例如馬爲四足動物一命題,依前所示範形改述之,則如下.

設動物爲馬,則此動物有四足.

其對定理爲

設動物無四足,則此動物非馬.

而此定理之爲眞,可無疑義.

2. 有二定理,若其任一定理之假設,爲他定理之終結,則此二定理之一,曰他定理之逆定理.例如定理

設 C 爲 D, 則 A 爲 B. (3)

爲 (1) 之逆定理.又 3 之對定理爲

設 A 非 B, 則 C 非 D. (4)

(4) 曰 (1) 之倒定理.

一定理雖眞,但不能斷其逆定理及倒定理亦爲眞;欲斷後者之眞僞,須別加探討.

例如就前舉之定理,

設動物爲馬,則此動物有四足.

其逆定理爲

設動物有四足,則此動物爲馬.

又其倒定理爲

設動物非馬,則此動物無四足.

由此二者,即可知逆定理與倒定理不能皆偏爲眞.

3. 上述定理之四種形式,茲列舉之如次.

原定理. 設 A 爲 B, 則 C 爲 D. (1)

其對定理. 設 C 非 D, 則 A 非 B. (2)

其逆定理. 設 C 爲 D, 則 A 爲 B. (3)

其倒定理. 設 A 非 B, 則 C 非 D. (4)

若 (1) 爲眞,則 (2) 必爲眞.又因 (4) 爲 (3) 之對定理,故 (3) 與 (4) 同時爲眞.然 (1) 雖爲眞,不能據以斷言 (3) 或 (4) 亦爲眞.故此四種形式之定理中,若已就幾何學證明其非互爲對定理之二者,即 (1) 與 (3), (1) 與 (4), (2) 與 (3), 或 (2) 與 (4), 則其他定理,可不俟證明而知其爲眞矣.

4. 若定理之假設甚複雜,則交換假設之一與終結,即得原定理之逆定理.例如定理

$$\text{設}\left\{\begin{array}{l}A=D\\B=E\\C=F\end{array}\right\},\text{則}\ M=N,$$

其逆定理爲

$$\text{設}\left\{\begin{array}{l}A=D\\B=E\\M=N\end{array}\right\},\text{則}\ C=F,$$

$$\text{設}\left\{\begin{array}{l}A=D\\M=N\\C=F\end{array}\right\},\text{則}\ B=E.$$

....

5. 轉換法.亦稱窮舉證法.設有業已證明之一羣定理,凡可發生之事,已盡於假設,而終結不能兩立,即其中之二,不能同時成立,則此一羣定理之逆定理,亦必爲眞.如此之一羣定理,其最簡單之例,爲業已證明之一定理與其倒定理;此二定理中,其一之逆定理,即他一之對定理,由此一事,即可知轉換法之眞.又幾何學中數見不鮮之一例如下.

設 A 大於 B, 則 C 大於 D.

設 A 等於 B, 則 C 等於 D.

設 A 小於 B, 則 C 小於 D.

若此三定理,業已證明爲眞,則其逆定理亦必爲眞,即

設 C 大於 D, 則 A 大於 B.

設 C 等於 D, 則 A 等於 B.

設 C 小於 D, 則 A 小於 B.

6. 同一法.設有唯一之 A 及唯一之 B, 且已知 A 爲 B. 則可斷定 B 爲 A.

例如,設有一定直線 AB, 及此線外之定點 P, 則從由 P 至 AB 所引之最短線唯一,由 P 至 AB 所引之垂線亦唯一,且最短線爲垂線,故由同一法,可徑知垂線爲最短線.

平面軌跡

決定點之位置時,有時所設條件雖不足完全確定其位置,但可充分限制其點之位置,令在一線,或線之一部,或若干線上.此時謂點有軌跡.若一線,或線之一部,或若干線上之點,皆適合一定條件,且除此以外,更無適合此條件之點,則此線,或線之一部,或若干線曰適合條件之點之軌跡.據此,欲決定一線,或線之一部,或若干線 X 爲適合條件 A 之點之軌跡,其充要手續爲證明以下一組定理之成立.

1. 適合條件 A 之點在 X 上.

2. X 上之點適合條件 A.

又以下定理代 (1) 亦可,

3. 不在 X 上之點,不適合條件 A.

又以下定理代 (2) 亦可.

4. 不適合條件 A 之點,不在 X 上

注意 有時軌跡爲平面之一部.觀第一門 1526 題及 1529 題.

作　圖　題

作圖題之目的,在完成幾何學的作圖.解作圖題時,得使用准許使用之工具;若限制使用之工具,而令其範圍愈狹隘,則用此工具以解之作圖題之範圍亦愈狹隘,從而其解法亦愈困難.初等幾何學中,准許使用之工具,不外規及矩二物.所謂規者,卽兩脚規,用以作圖及移距離之具也;所謂矩者,卽直尺,用以引直線及延長直線之具也.

作　圖　公　法

1. 由一任意點,至他一任意點,得引一直線.
2. 有限直線得任意延長之.
3. 以任意點爲中心,任意有限直線爲半徑,得作一圓.

倍量之性質

I. 關於可通約量者

1. 若 $A=B$, 則 $mA=mB$.
2. 若 $mA=mB$, 則 $A=B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA=(m+n)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

II. 關於不可通約量者

1. 若 $A>=<B$, 則 $mA>=<mB$.
2. 若 $mA>=<mB$, 則 $A>=<B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA+\cdots\cdots=(m+n+\cdots\cdots)A$.
6. $mA-nA='m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

比例之定理

1. 等於同比之比皆相等.

　例如,設 $A:B=P:Q$, 　$X:Y=P:Q$,

　則 　　$A:B=X:Y$.

2. 設二比相等,若第一比之前項較其後項大,或等,或小,則第二比之前項,從而較其後項大,或等,或小.

　例如,設 　　$A:B=P:Q$,

　若 　　$A>=<B$,

　則從而 　　$P>=<Q$

3. 若二比相等,則其反比亦等.

　例如,設 　　$A:B=P:Q$,

　則 　　$B:A=Q:P$.

4 取二量之一與第三量之比時,若第一量較第二量大,或等,或小,則第一比從而較第二比大,或等,或小.又取一量與他二量之比時,若二量之第一量較第二量小,或等,或大,則第一比較第二比大,或等,或

小.例如,設 A, B, C 為同種之三量,若

$$A>=<B,$$

則從而 $A:C>=<B:C.$

又若 $A<=>B,$

則從而 $C:A>=<C:B.$

5. 二量之等倍量之比,等於此二量之比.其逆定理亦眞.

例如, $mA:mB=A:B$

$$A:B=mA:mB.$$

6. 若二量 A, B 與二整數 m, n 有同比,則 $nA=mB$. 反之,若 $nA=mB$, 則 A 與 B 之比,等於 m 與 n 之比.

7. 若 $A:B=P:Q,\quad nA=mB,$

則 $nP=mQ.$

8. 設同種之四量成比例,若其第二量較第四量大,或等,或小,則第一量從而較第三量大,或等,或小.

例如,設 $A:B=C:D,$

若 $B>=<D,$

則從而 $A>=<C.$

9. 若同種之四量成比例,則第一量與第三量之比,等於第二量與第四量之比[更比定理].

例如,設 $A:B=C:D,$

則 $A:C=B:D.$

10. 若同種之若干量成比例,則其一前項與一後項之比,等於其諸前項之和與諸後項之和之比[加比定理].

例如,設 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$

則 $A:B=A+C+E+\cdots:B+D+F+\cdots.$

11. 設二比相等,則第一比中前項後項之和[差]對後項之比,等於第二比中前項後項之和[差]對後項之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理],

及 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$ [分比定理].

12. 設兩比相等,若取兩前項之等倍量及兩後項之等倍量.則第一比中前項倍量與後項倍量之比.等於第二比中前項倍量與後項倍量之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $mA:nB=mP:nQ.$

13 有甲乙二組之量,甲組中第一量與第二量之比,等於乙組中第一量與第二量之比,又甲組中第二量與第三量之比,等於乙組中第二量與第三量之比,以下類此,則甲組中第一量與最後量之比,等於乙組中第一量與最後量之比[等比定理].

例如,設甲組之若干量為 A, B, C,……, H, K, 乙組之若干量為 P, Q, R,……, X, Y, 而

$$A:B=P:Q;$$

$$B:C=Q:R,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$H:K=X:Y,$$

則 $A:K=P:Y.$

14. 若 $A:C=P:R,\qquad B:C=Q:R,$

則 $A+B:C=P+Q:R.$

15. 若二比相等,則其二乘比亦等;反之,若二比之二乘比相等,則其比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A^2:B^2=P^2:Q^2.$

反之,設 $A^2:B^2=P^2:Q^2,$

則 $A:B=P:Q,$

16. 若二比相等,則其三乘比亦等.反之,設

二比之三乘比相等,則其比亦等.

例如,設　$A:B=P:Q$,

則　$A^3:B^3=P^3:Q^3$,

反之,設　$A^3:B^3=P^3:Q^3$,

則　$A:B=P:Q$,

極　限　論

1. 某量有一定之值,則此量曰常數;若從某條件而消長增減,則此量曰變數.

2. 設一變數之值漸漸趨近一常數,其差得小於任意小之數,但此變數不能等於常數,則此常數曰變數之極限,而謂變數無限趨近其極限.變數漸漸增大而趨近其極限時,其極限曰增極;漸漸減小而趨近其極限時,其極限曰減極.

3. 設一點由 A 向 B 運動,第一秒間由 A 移至 AB 之中點 M,第二秒間由 M 移至 MB 之中點 M′,第三秒間,由 M′ 移至 M′B 之中點 M″,以下類推.

此時運動之點,雖可任意趨近 B,但決不能達於 B;因設某時動點在 A, B 間之某處,則下一秒此點在由此至 B 之中央,故此點雖可漸漸趨近 B,而欲達到 B,則恆尙須行距離之半分也,故決不能達 B.因此,由 A 至動點之距離,乃一變數,以常數 AB 爲極限而無限趨近之;由動點至 B 之距離,亦爲一變數,以常數零爲極限而無限趨近之.

茲設 AB 之長爲 2 寸,由 A 至動點之變數爲 x,此變數與其極限之差爲 v,則

第一秒後　$x=1$,　　$v=1$,

第二秒後　$x=1+\frac{1}{2}$,　　$v=\frac{1}{2}$,

第三秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,　　$v=\frac{1}{4}$,

第四秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$,　$v=\frac{1}{8}$,

餘準此.

級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 之和,顯然小於 2;但項數愈多,則與 2 之差愈小,故此差得爲任意小.因此 2 爲此級數在項數爲無窮多時之極限,零爲此級數與 2 之差之極限.

4. (1) 變數與其極限之差,爲一變數,其極限爲零.

(2) 兩個以上之變數 $v, v', v'', \cdots\cdots$ 等,其極限皆爲零,則其和 $v+v'+v''+\cdots\cdots$ 之極限亦爲零.

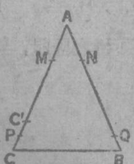
(3) 設變數 v 之極限爲零,則 $a\pm v$ 之極限爲常數 a,又 $a\times v$ 之極限爲零.

(4) 常數及變數之積,亦爲變數;常數與變數之積之極限,爲此變數之極限與常數之積.

(5) 設二變數爲俱增大之變數,或俱減小之變數,則此二變數之和或積亦爲一變數.

(6) 設二變數恆相等,則其極限亦相等.

設兩變數 AM, AN 恆相等,其極限分別爲 AC, AB,求證 AC=AB.



證　設 AC>AB.取短於 AC 之 AC′,令 AC′=AB.因 AM 無限趨近 AC,故得假定 AM 達到大於 AC′ 之某值 AP,命 AQ 爲對應於 AP 之 AN 值.於是 AP=AQ, AC′=AB.此

二不等式之非眞理，至爲明顯，因 $AP>AC'$，$AQ<AB$ 故也．故 AC 不能大於 AB．同理，AC 不能小於 AB，卽 AB 不能大於 AC．要之，AC 較 AB，既不能大，亦不能小，故 AC 非等於 AB 不可．

(7) 設二變數有定比，則其極限亦有同比．極限以 lim 記之，例如 $\lim(x)$ 爲 x 之極限．

證 設 x 及 y 爲二變數，r 爲定比，則 $x:y=r$，卽 $x=ry$，故 $\lim(x)=\lim(ry)=r\lim(y)$，故 $\lim(x):\lim(y)=r$．

(8) 設比爲不可通約數，則此比爲其累次近似值之極限，故有以下之定理．

不可通約之二比 $a:b$ 及 $a':b'$，表之至同樣精密時，恆有同一之近似值，則此二比相等．

(9) 兩個以上之變數，其代數和之極限，等於其極限之代數和．

設 x, y, z 爲變數，其極限分別爲 a, b, c，則 $\lim(x+y+z)=a+b+c$，試證之．

證 設 $a-x=v$，$b-y=v'$，$c-z=v''$，則 $x=a-v$，$y=b-v'$，$z=c-v''$．此時 $x+y+z=a-v+b-v'+c-v''$，

故 $\lim(x+y+z)$，

$$=\lim(a-v+b-v'+c-v''), \quad (6)$$

然 $\lim a-v+b-v'+c-v'')$

$$=a+b+c, \quad (3)$$

故 $\lim(x+y+z)=a+b+c$．

(10) 兩個以上之變數，其積之極限，等於其極限之積．

設 x, y, z 爲變數，其極限分別爲 a, b, c，則 $\lim.(xyz)=abc$，試證之．

證 設 $x=a-v$，$y=b-v'$，$z=c-v''$，取其各邊之積，則

$xyz=abc\pm$(以 v, v', v'' 之一，或二，或全體爲因數之諸項)．

因此上式中自符號 $\pm$ 以下諸項之極限爲零， (3)

故 $\lim(xyz)$

$$=\lim\{abc\pm(\text{極限爲零之諸項})\} \quad (6)$$

故 $\lim(xyz)=abc$．

以上之變數，係假定爲增大者，但對於減小之變數，證明同此．

記號及略語

$\therefore$	故．	$\because$	何則．
$=$	等於．	$\neq$	不等於．
$>$	大於．	$<$	小於．
$\geqq$	大於及等於．	$\leqq$	小於及等於．
$+$	加．	$-$	減以．
$\pm$	加減．	$\sim$	差．
$\stackrel{+}{\sim}$	加及差．	$\wedge$	角．
$\hat{R}$	直角．	$\triangle$	三角形．
$\parallel$	平行於．	$\perp$	垂直於．
$\equiv$	全等於．	▱	平行四邊形．
□	正方形．	▭	矩形．
$:$	比．	$\backsim$	相似．

普.公． 普通公理． 幾.公． 幾何學公理．

公法． 作圖公法．

目　次

几何学辞典

第一門 解法之部

第一編 直線

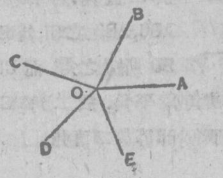
第一章 角及直線

1. 凡周角皆相等.

證 周角 O 及 O′ 分別爲主線 OA 及 O′A′

以 O, O′ 爲樞, 就紙面上廻轉一周所成之角, 故取其周角之一 O, 疊於 O′ 上, 令 OA 疊於 O′A′ 上, 而得全合. 因此周角 O, 等於周角 O′.

2. 由同一之點, 引若干直線, 則各直線與其下一直線所成各角之和, 等於四直角.

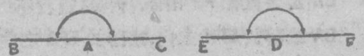


證 由同一點 O 所引之若干直線 OA, OB, OC, OD, OE 依次所成之鄰角 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}A$, 其和等於周角, 故等於 $4\hat{R}$.

3. 凡平角皆相等.

證 平角等於周角之半分, 而周角皆相等[1題], 故平角亦皆相等.

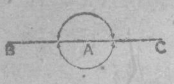
別證 設所欲證者, 爲 AB, AC 所夾之平角, 等於 DE, DF 所夾之平角. 今 AB, AC



所夾之角爲平角, 故 BA, AC 成一直線 BAC. 同理, ED, DF 亦成一直線 EDF. 於是得置直線 BAC 於直線 EDF 上, 使 A 點與 D 點相合. [幾.公.(3) a.]. 但 B 與 E 在 D 之同側, C 與 F 在 D 之他側, 或 B 與 F 在 D 之同側, C 與 E 在 D 之他側皆可. 總之, 於無論何款中, AB, AC 所夾之平角, 與 DE, DF 所夾之平角全合. 凡得全合之量相等[幾.公.(2)], 故此二平角相等.

注意 別證乃不依據周角之相等, 而獨立證明平角之相等者也. 5題中直角之別證亦準此.

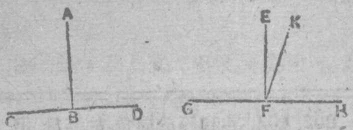
4. 同一之二邊 AB, AC 所夾之二平角相等.



證 由前題,一望而知其爲相等[本題爲前題之特例].

5. 凡直角皆相等.

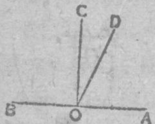
證 直角爲平角之半分,而等量之半分皆相等[普.公.(h)],故直角皆相等.



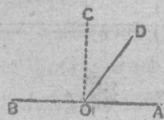
別證 設 ABC 爲直線 AB 立於直線 CBD 上所成之直角, $E\hat{F}G$ 爲直線 EF 立於直線 GFH 上所成之直角,求證 $A\hat{B}C$ 等於 $E\hat{F}G$. 今將直線CBD置於直線 GFH 上, B 點落於 F 點, BA 與 EF 在直線 GFH 之同側,則直線 BA 當與直線 FE 相合. 何則,蓋若不然,則 BA 或落於 $E\hat{F}H$ 之內,或落於 $E\hat{F}G$ 之內. 茲假定 BA 落於 $E\hat{F}H$ 之內,命其位置爲 FK. 此時 $K\hat{F}G$ 爲直角,故等於 $K\hat{F}H$ [直角定義]. 然 $E\hat{F}H$ 大於 $K\hat{F}H$ [普. 公. (a)], 故 $E\hat{F}H$ 又大於 $K\hat{F}G$, 故 $E\hat{F}H$ 又大於 $E\hat{F}G$[普.公.(a)]. 然 $E\hat{F}G$ 爲直角,故等於 $E\hat{F}H$ [直角定義].故 $E\hat{F}G$ 小於 $E\hat{F}H$,又等於 $E\hat{F}H$.然此爲不可能,故直線 BA 不落於 $E\hat{F}H$ 之內. 仿此得證直線 BA 亦不落於 $E\hat{F}G$ 之內. 故直線 BA 與直線 EF 相合.故 $A\hat{B}C$ 與 $E\hat{F}G$ 相合,而 $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ [幾.公.(2)].

6. 於一所設直線上之一所設點,得引其線之一垂線,而以一爲限.

證 二等分平角 AOB 之直線 CO, 令鄰角 COA, COB 皆爲直角,故 CO 爲 AB 之垂線. 若除 CO 以外,於 AB 上之 O 點,尙有他垂線 OD, 則 $D\hat{O}A = \hat{R}$. 然 $C\hat{O}A = \hat{R}$, 故 $C\hat{O}A = D\hat{O}A$ [普.公.(c)],卽全量等於其一部.此爲不可能[普. 公. (a)],故在 AB 之 O 點垂直於 AB 之直線,除 CO 外,別無他線.



別證 設直線 OD, 以 O 爲樞,由 OA 之位置, 迴轉至 OB 之位置, 則 $D\hat{O}A$ 由零漸漸增大,而 $D\hat{O}B$ 由 $2\hat{R}$ 漸漸減小, 其中必有一次 $D\hat{O}A = D\hat{O}B$. 設此時 DO 之位置爲 CO, 則 CO 爲 AB 之垂線;而如是之 CO 位置,顯然以一次爲限.



7. 等角之餘角亦等.

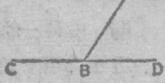
證 某角之餘角者,由直角減去其角而得之角也. 而直角相等 [5題],故等角之餘角亦等[普. 公. (e)].

8. 等角之補角亦等.

證 某角之補角者,由二直角減去其角而得之角也. 而二直角[平角]皆相等 [3題], 故等角之補角皆相等[普. 公. (e)].

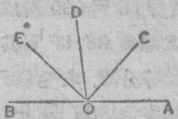
9. 一直線立於他一直線上,其所成鄰角之和,等於二直角.

證 設直線AB,立於他直線 CD 上,求證鄰角 ABC, ABD 之和,等於二直角. 今鄰角 ABC, ABD 之和,爲 BC, BD 所夾之角, 而 CBD 爲一直線, 故其角爲平角. 故二角 ABC, ABD 之和等於平角,卽等於二直角.



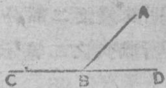
10. 由一直線上之一點,就其一側引若干直線,則其依次所成各鄰角之和,等於二直角.

證 由一直線 AOB 上之一點 O,就其一側,引若干直線 OC, OD, OE, 其所成各鄰角 AOC, COD, DOE, EOB 之和,等於平角 AOB, 即等於 $2\hat{R}$.



11. 一直線與他二直線所成鄰角之和,若等於二直角,則後二直線成一直線.

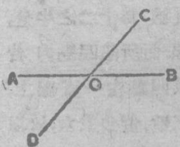
證 設直線 AB 與他二直線 BC, BD 所成鄰角 ABC, ABD 之和等於二直角,求證 BC, BD 成一直線. 今鄰角 ABC, ABD 之和,爲 BC, BD 所夾之角,而二角 ABC, ABD 之和爲二直角,故 BC, BD 所夾之角等於二直角,即平角. 故 BC, BD 成一直線.



別證 設 BD 與 BC 不成一直線,而 BE 與 BC 成一直線,則 AB 立於直線 CBE 上,故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = 2\hat{R}$ [9 題]. 然 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$ [假設], 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = A\hat{B}C + A\hat{B}D$ [普. 公. (c)]. 故 $A\hat{B}E = A\hat{B}D$ [普. 公. (e)], 即全量等於其一部. 此爲不可能 [普. 公. (a)]. 故 BD 與 BC 成一直線.

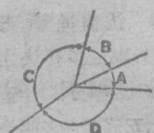
12. 二直線相交,其對頂角相等.

證 設二直線 AB, CD 交於 O, 求證 $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$. 今 AO 立於 CD 上,故鄰角 AOC, AOD 之和,等於二直角 [9 題]. 又 DO 立於 AB 之上,故鄰角 AOD, DOB 之和等於二直角 [9 題]. 故二角 AOC, AOD 之和,等於二角 AOD, DOB 之和 [普. 公. (c)]. 由是可知, $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, 仿此,得證 $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$.



13. 一點之周圍,有 A, B, C, D 四角. B 2倍於 A, C 3 倍於 B, D 等於 C, 則各角爲直角之幾分之幾?並以度數表之.

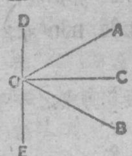
解 $B=2A$, $C=3B=6A$, $D=C$, 故 $A+B+C+D=A+2A+6A+6A=15A$, 而 $A+B+C+D=4\hat{R}$, 故 $15A=4\hat{R}$, 因此 $A=\frac{4}{15}\hat{R}$. 故 $B=\frac{8}{15}\hat{R}$, $C=\frac{24}{15}\times\hat{R}=\frac{8}{5}\hat{R}$, 又 $D=C=\frac{8}{5}\hat{R}$.



又若以度數表之,則 $A=90^\circ\times\frac{4}{15}=24^\circ$, $B=90^\circ\times\frac{8}{15}=48^\circ$, $C=90^\circ\times\frac{8}{5}=144^\circ$, $D=144^\circ$.

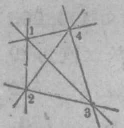
14. 過角之頂點,與此角之二等分線成直角之直線,與角之二邊成等角.

證 設過角 AOB 之頂點 O, 與角之二等分線 OC 成直角之直線爲 DE. 此時 $C\hat{O}D = C\hat{O}E = \hat{R}$, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D = B\hat{O}E$, 即 DE 與 OA, OB 成等角.

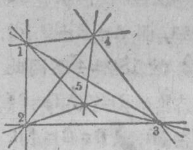


15. 四點最多得決定六直線,四直線最多得決定六點. 又五點最多得決定十直線, 五直線最多得決定十點.

證 (1)四點中各點與他三點聯結,可得十二直線. 然是等直線內,兩兩爲一直線,故



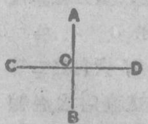
相異之直線,爲十二之半分,即六直線.而所設四點內,若有三點或四點在一直線上,則直線之數,皆少於六,故以六直線爲最多.次,設所設四直線,皆不平行,則各直線與他直線相交而得之點皆爲三,故共可得十二點.然是等點中,兩兩合一,故相異之點,爲十二之半分,即六.所設直線內,若有二線,或三線,或四線平行,則交點之數,皆少於六,故以六點爲最多數.



(2) 仿前推論,得證五點最多得決定4×5之半分,即十直線,五直線最多得決定十點.

16. 二直線相交,其所成之四角,若有一爲直角,則他三角亦爲直角.

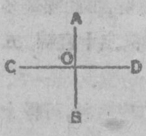
證 設AOB, COD爲二直線, AOC爲直角.



此時$A\hat{O}C$,$A\hat{O}D$之和等於二直角[9題],而$A\hat{O}C$爲直角[假設],故$A\hat{O}D$亦爲直角.根據同理,$D\hat{O}B$, $B\hat{O}C$亦各爲直角.

17. 會於一點之四直線,設其所成之角皆爲直角,則四直線成二直線.

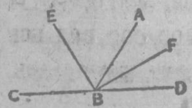
證 設會於一點O之四直線爲AO,CO,BO,DO,其所成之角AOC, COB, BOD, DOA皆爲直角.



於是$A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$,爲各直角,故$A\hat{O}C+C\hat{O}B=2\hat{R}$,故AO, BO成一直線[11題].根據同理,CO, DO亦成一直線.故四直線兩兩成一直線.

18. 一直線與他直線成二鄰角,各角之二等分線互爲垂線.

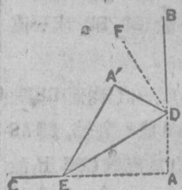
證 設$A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$爲直線AB與CBD所成之鄰角,BE, BF爲其二等分線,求證$E\hat{B}F$爲直角.



BE爲$A\hat{B}C$之二等分線,故$A\hat{B}E=E\hat{B}C$;同理,$A\hat{B}F=F\hat{B}D$,故$E\hat{B}F=E\hat{B}C+F\hat{B}D$[普. 公. (d)].然$E\hat{B}F+E\hat{B}C+F\hat{B}D=2\hat{R}$[10題],故$E\hat{B}F$爲直角.

19. 斜折書籍之一頁,則其綫之二部分[由一綫所折成之二部分]所成角之二等分線,與折痕成直角.

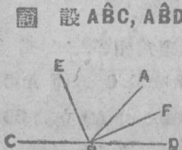
證 設一頁之書角爲A,斜折而至於A′之位置,DE爲其折痕,



一綫BDA折而爲DB,DA′二部分,其所成角之二等分線爲DF,求證DF與DE成直角.茲A折至A′之位置,故$A\hat{D}E=A'\hat{D}E$,因此DE爲$A\hat{D}A'$之二等分線,故$A'\hat{D}E+A'\hat{D}F=\hat{R}$[18題].

20. 二鄰角之二等分線,若互相垂直,則其所不共之二邊,成一直線.

證 設$A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$爲共有頂點B之二鄰角,



其二等分線分別爲BE, BF,且BE垂直於BF,求證CB, BD成一直線.今

$A\hat{B}C = 2A\hat{B}E$, $A\hat{B}D = 2A\hat{B}F$, 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2A\hat{B}E + 2A\hat{B}F = 2(A\hat{B}E + A\hat{B}F) = 2\hat{R}$. 故不共之二邊 CB, BD 成一直線[11題].

21. 前題中 $E\hat{B}C$ 與 $F\hat{B}D$ 互為餘角, $A\hat{B}E$ 與 $D\hat{B}E$ 互為補角.

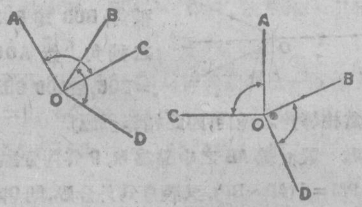
證　$E\hat{B}C = \frac{1}{2}A\hat{B}C$, $F\hat{B}D = \frac{1}{2}A\hat{B}D$. 而 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$, 故 $E\hat{B}C + F\hat{B}D = \frac{1}{2}(A\hat{B}C + A\hat{B}D) = \hat{R}$. 又 $A\hat{B}E = E\hat{B}C$, 而 $E\hat{B}C + D\hat{B}E = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}E + D\hat{B}E = 2\hat{R}$.

22. 六直線會於一點,成六等角,則各角為一直角之三分之二.

證　六角之和為一周角, 卽 $4\hat{R}$, 故各角為 $4\hat{R}$ 之六分之一,卽 $\hat{R}$ 之三分之二.

23. 二角 AOB, COD 公有一頂點 O, 邊 AO 與邊 BO 分別垂直於邊 CO 與邊 DO, 則 $A\hat{O}B$ 或等於 $C\hat{O}D$, 或為其補角.

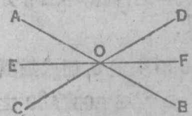
證　如(1)圖中, $A\hat{O}C = B\hat{O}D = \hat{R}$, 故雙方減



以 $B\hat{O}C$, 則其所餘之 $A\hat{O}B$ 與 $C\hat{O}D$ 相等. 如(2)圖中, $A\hat{O}B + B\hat{O}D + D\hat{O}C + A\hat{O}C = 4\hat{R}$, 而 $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ 各為直角,故 $A\hat{O}B + C\hat{O}D = 2\hat{R}$, 故卽二角互為補角.

24. 二對頂角之二等分線,成一直線.

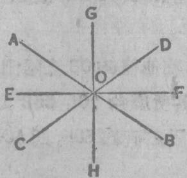
證　設二直線 AB, CD 交於 O, 二對頂角 AOC, BOD 之二等分線分別為 OE, OF. 此時 $A\hat{O}C = B\hat{O}D$, 故其各自之半分 $A\hat{O}E = B\hat{O}F$. 而



$A\hat{O}F + B\hat{O}F = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{O}F + A\hat{O}E = 2\hat{R}$, 故 OE, OF 成一直線 [11題].

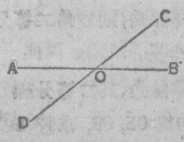
25. 相交二直線所成之四角,其二等分線成互相垂直之二直線.

證　設二直線 AB, CD 交於 O, 其所成四角之二等分線分別為 OE, OH, OF, OG, 於是依據前題, EO, OF 成一直線, GO, OH 亦成一直線, 且此二直線互相垂直 [18題].

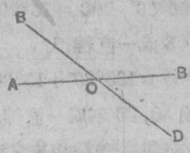


26. 四直線會於一點, 若不相隣之角相等,則此等直線,兩兩成一直線.

證　設四直線 AO, DO, BO, CO 會於一點 O, 其不相隣之角相等, 卽 $A\hat{O}D = B\hat{O}C$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$. 於是因 $A\hat{O}D = B\hat{O}C$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$, 故四角之和,等於 $2 \times (A\hat{O}D + A\hat{O}C)$. 然四角之和為 $4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}D + A\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 CO, OD 成一直線[11題].同理, AO, OB 亦成一直線.



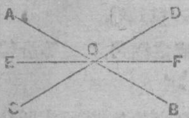
27. 二直線 OB, OD 與一直線 AC 會於同一點 O, 若在 AC 異側之二角 AOB, COD 相等, 則 BOD 成一直線.



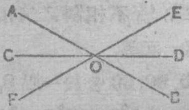
證　$A\hat{O}B + B\hat{O}C = 2\hat{R}$, 然 $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ 故 $C\hat{O}D + B\hat{O}C = 2\hat{R}$, 故 OB, OD 成一直線 [11題].

28. 二等分對頂角之一之直線,亦二等分他一對頂角.

證 設二直線 AOB, COD 交於 O, 而成對頂角 AOC, BOD, $A\hat{O}C$ 之二等分線爲 EOF; 求證此直線亦二等分他一角 BOD. 蓋 $A\hat{O}E=B\hat{O}F$, $C\hat{O}E=D\hat{O}F$, 而 $A\hat{O}E=C\hat{O}E$, 故 $B\hat{O}F=D\hat{O}F$.



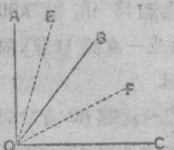
29. 二直線 AO, BO, 在他直線 CD 之兩側, 而與 CD 交於同點 O, 其所成角 AOC, COB 之和等於二直角. 引過 O 點之直線 EOF, 則 $A\hat{O}F$ 等於 $B\hat{O}E$.



證 $A\hat{O}C+C\hat{O}B=2\hat{R}$, 故 AO, OB 成一直線[11題]. 因此 $A\hat{O}F$, $B\hat{O}E$ 爲二直線 AB, EF 相交而生之對項角, 故相等[12題].

30. 相隣二角若互爲餘角, 則各角二等分線間之角, 等於直角之半分.

證 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ 互爲餘角, 其二等分線分別爲 OE, OF, 求證 $E\hat{O}F$ 爲直角之半分. 蓋 $E\hat{O}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B$, $B\hat{O}F=\frac{1}{2}B\hat{O}C$, 故 $E\hat{O}F=E\hat{O}B+B\hat{O}F=\frac{1}{2}(A\hat{O}B+B\hat{O}C)=\frac{1}{2}\hat{R}$.



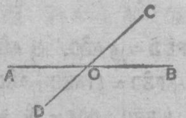
31. 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ 爲依次相隣之角, 而其度數則 $A\hat{O}B=105°30'$, $BOC=15°20'$, $COD=69°10'$, 問 AO, OD 成一直線否?

解 $A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}D=105°30'+15°20'+69°10'=190°$, 故 AO, OD 不成一直線.

32. 定理<u>二直線相交,其對項角相等</u>之逆定理及倒定理如何? 試證之.

解 此定理若改如下述, 則其逆定理與倒定理, 甚易知之.

<u>四直線交於一點, 若兩兩成一直線, 則其二雙相對之角相等.</u>



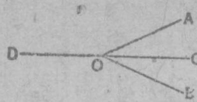
(逆定理) 四直線交於一點, 若二雙相對之角相等, 則四直線兩兩成一直線.

證 [同 26 題].

(倒定理) 四直線交於一點, 若不兩兩成一直線, 則其二雙相對之角不等. 何則, 蓋若各雙相對之角相等, 則四直線兩兩成一直線故也[前款].

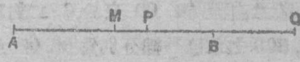
33. 角之二邊, 與其二等分線之延線成等角.

證 設 $A\hat{O}B$ 之二等分線 CO 之延線爲 DO, 則 $A\hat{O}D$ 爲 $A\hat{O}C$ 之補角, $B\hat{O}D$ 爲 $B\hat{O}C$ 之補角. 然 $A\hat{O}C=B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D$, $B\hat{O}D$ 爲相等角之補角, 因此相等[8題].



34. 設直線 AB 之中點爲 M, P 爲內分點, 則 $PM=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$. 又設 Q 爲外分點, 則 $QM=\frac{1}{2}(AQ+BQ)$.

證 設 P 在 M 與 B 之間, 則 $AP>BP$, 且 $AP=AM+PM=BM+PM=2PM+BP$, 故 $2PM=AP-BP$. 故 $PM=\frac{1}{2}(AP-BP)$. 若 P 在 M 與 A 之間, 則 $PM=\frac{1}{2}(BP-AP)$. 故 PM

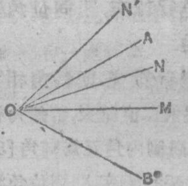


$=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$.

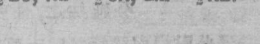
次, $AQ+BQ=AM+QM+BQ=BM+QM+BQ=2QM$, 故 $QM=\frac{1}{2}(AQ+BQ)$.

35. 設 $A\hat{O}B$ 之二等分線爲 OM, ON 爲角內之一直線,則 $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(A\hat{O}N\sim B\hat{O}N)$. 又設 ON′ 爲 $A\hat{O}B$ 外之一直線, 則 $M\hat{O}N'=\frac{1}{2}(A\hat{O}N'+B\hat{O}N')$.

證 設 ON 在 $A\hat{O}M$ 之內, 則 $A\hat{O}M=B\hat{O}M$, $B\hat{O}N=B\hat{O}M+M\hat{O}N$, $A\hat{O}N=A\hat{O}M-M\hat{O}N$, 故 $B\hat{O}N-A\hat{O}N=(B\hat{O}M+M\hat{O}N)-(A\hat{O}M-M\hat{O}N)=2M\hat{O}N$, 是以 $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(B\hat{O}N-A\hat{O}N)$.若ON在$B\hat{O}M$之內,則仿前, $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(A\hat{O}N-B\hat{O}N)$. 總之, $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(A\hat{O}N\sim B\hat{O}N)$. 次,設 ON 與 OB 在 OA 之異側, 則 $A\hat{O}N'=M\hat{O}N'-A\hat{O}M$, $B\hat{O}N'=M\hat{O}N'+B\hat{O}M$, 故 $A\hat{O}N'+B\hat{O}N'=2M\hat{O}N'$, 故 $M\hat{O}N'=\frac{1}{2}(A\hat{O}N'+B\hat{O}N')$.



36. 設 A, B, C, 爲依次並列於一直線上之三點, BC, CA, AB 之中點,分別爲 L, M, N, 則 $MN=\frac{1}{2}BC$, $NL=\frac{1}{2}CA$, $LM=\frac{1}{2}AB$.



證 $MN=AM-AN=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AC-AB)=\frac{1}{2}BC$. $NL=BN+BL=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{1}{2}AC$. $LM=CM-CL=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}AB$.

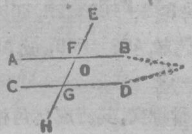
37. 二鄰角之度數,分別爲 160° 及 20°, 則其二等分線所夾角之度數如何?

解 所求之角$=\frac{1}{2}(160°+20°)=90°$,即直角.

第二章 平行直線

38. 一直線與他二直線交,若一組錯角相等,則後二直線平行.

證 二等分 FG 於 O 點,全圖形以 O 爲樞而迴轉,令直線 FG 變爲 GF. 此時因 OF 等於 OG, 故 F 點合於 G 點上, G 點合於 F 點上. 而 $A\hat{F}G$ 等於 $F\hat{G}D$, 故 FA 至 GD 之位置, GD 至 FA 之位置. 故 AB 與 CD 之位置, 彼此互換而爲 DC, CA. 據此,設將AB, BD 向 EH 之任何一方,例如右方,卽 B, D 之一方延長而相交, 則由迴轉後之位置視之, AB, CD 又必交於 EH 之左方,而此違反幾.公.(3). 故 AB 與 CD, 無論向何方延長而不交,卽 AB, CD 平行.



39. 一直線與他二直線交,若其所成之一組錯角相等,或一組同位角相等,或在前一直線同側之二內角互爲補角,則二組錯角相等,四組同位角相等,二組同側內角互爲補角.

證 設直線 EFGH 與二直線 AB, CD 交,而錯角 $A\hat{F}G$, $F\hat{G}D$ 相等;求證錯角 $B\hat{F}G$, $F\hat{G}C$ 相等,同位角 $E\hat{F}B$, $F\hat{G}D$ 亦相等,內角 $B\hat{F}G$, $F\hat{G}D$ 互爲補角. 今 $B\hat{F}G$ 爲 $A\hat{F}G$ 之補角[9題], $F\hat{G}C$ 爲 $F\hat{G}D$ 之補角[9題], 而 $A\hat{F}G=F\hat{G}D$