量子力学典型题精讲

LIANGZI LIXUE DIANXINGTI JINGJIANG

（第二版）

宋鹤山／主编

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r},t)$$

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

量子力学典型题精讲

（第二版）

主编　宋鹤山
主审　衣学喜
编著　周　玲　王殿夫　宓　东

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

量子力学典型题精讲 / 宋鹤山主编 .—2 版.— 大连 :大连理工大学出版社,2006.8
ISBN 7-5611-2727-8

Ⅰ.量… Ⅱ.宋… Ⅲ.量子力学—高等学校—解题
Ⅳ.O413.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 048417 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84703636
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:7.5 字数:164 千字
2004 年 10 月第 1 版 2006 年 8 月第 2 版
2006 年 8 月第 2 次印刷

责任编辑:吴孝东 责任校对:任大鹏
封面设计:宋 蕾

定价:12.00 元

再版前言

本书的第一版在 2004 年 10 月出版，在出版以后一年多的时间里，得到了广大读者的热情关怀和大力支持。广大读者，特别是准备考研究生的读者对本书提出了很多宝贵的意见和建议，对此我们表示衷心的感谢。根据这些意见和建议，再版时我们对本书第一版中的疏漏和不当之处一一进行了增补和修改。同时，我们在原习题的基础上又增加了 30 多道典型题。本书的宗旨在于为读者提供一本题量与难度适宜，题型适合学生巩固所学量子力学的基本概念，掌握基本原理的参考书。我们在选题和编写过程中，力求反映这一特色，以答谢广大读者对本书的关心和支持。希望本书能够成为广大读者喜爱的好参考书。

尽管我们付出大量的精力进行了本书第二版的编排，但难免会有不尽人意之处，真诚希望读者继续提出宝贵的意见和建议。

宋鹤山

2006 年 8 月

于大连理工大学

前　言

在学习物理学的过程中，基本技能的训练是加深理解和巩固所学基础理论的必要手段。物理习题是学生掌握基础理论和提高基本技能的重要环节。通过做习题，不仅可以加深理解和巩固已经掌握的基本概念、基本原理，而且还可以举一反三，拓宽知识面，培养运用所学知识的能力和提高分析、解决问题的能力。

由于量子力学在基本概念、基本原理和数学方法上与经典物理学区别较大，初学者往往感觉到所学概念不易理解，解题无从下手。目前，由于高校课程门类较多，包括量子力学在内的各门课程的教学时数有限，很难安排较多的习题课，这又增加了学生学习量子力学的难度。本书，一是为量子力学的任课教师提供由浅入深的各类典型题目，以便有效地指导学生学习，二是为学习量子力学的本科生、研究生提供难度不太大、题量又适宜，但又有助于掌握量子力学的基本概念、原理和方法，提高基本技能的参考书。对那些准备考研究生的读者来说，本书更是一本不可多得的参考书。作者也考虑过，正在学习量子力学的本科生，如果为了应付完成作业，不假思索地抄写本习题解中的答案，那对他们的学习一定是不利的。作者诚恳地希望读者，一定要先自己动脑去做每个题的基础上再去看习题解答，并反复思考，分析总结，以达到举一反三的效果。

除了国内流行的量子力学教材中的习题之外，我们还在美国、日本以及欧洲等国家一些大学通用量子力学教材的习题和研究生入学考题中，选择一些与我们编写的《量子力学》内容相匹配的题目编入本书，虽然所编入的题目不多，但类型齐全、难度适宜，相信本书会成为广大读者喜爱的参考书。

在本书的编写过程中，研究生李崇，郭彦青，于长水，陈菁，苗向阳等做了提供素材，计算机输入等大量工作，在此对他们表示诚挚的谢意。在编写本书的过程中，尽管我们在题目的取舍、内容的编排和解题的技巧上进行了反复的推敲，但由于作者水平有限和编写时间仓促，书中错误和不当之处在所难免，真诚希望广大读者提出宝贵意见，给予热诚的指正。

宋鹤山
于大连理工大学
2004 年 8 月 20 日

目　录

第 1 章　经典物理学的“危机”和量子力学的诞生

1. 利用 Planck 的量子假说证明，谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

证明　根据统计平均值的定义和 Planck 的量子假说，

$$\bar{\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\varepsilon_n/kT}$$

其中，$\varepsilon_n=nh\nu$。令 $e^{-h\nu/kT}=x, y=h\nu/kT$，则

$$\bar{\varepsilon}=\sum_{n=0}^{\infty}nh\nu e^{-ny}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ny}$$

但由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ny}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-ny}=-\frac{d}{dy}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ny}=-\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1-e^{-y}}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

因此最后得到

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu x/(1-x)^2}{1/(1-x)}=\frac{h\nu e^{-y}}{1-e^{-y}}=\frac{h\nu}{e^{y}-1}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

2. 设一个质量为 m 的粒子在阱宽为 a 的一维无限深方势阱

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0, x>a\\ 0, & 0<x<a\end{cases}$$

中运动，如图 1-1 所示。试用 de Broglie 的驻波条件，求粒子能量的可能值。

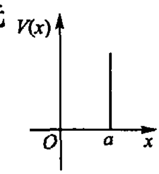


图 1-1

解　根据 de Broglie 的驻波条件

$$a=\frac{\lambda}{2}n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

和利用 de Broglie 的假定

$$\lambda=\frac{h}{p}$$

得到动量

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{nh}{2a}=\frac{2n\pi\hbar}{2a}=\frac{n\pi\hbar}{a}$$

因此，能量的可能取值是

$$E_n=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2},\quad n=1,2,3,\cdots$$

3. 设一质量为 m 的粒子限制在长、宽、高分别为 a、b、c 的箱内运动，试用驻波条件求粒子能量的可能值。

解 根据 de Broglie 的驻波条件（参考第 2 题），粒子在 x、y、z 三个方向分别满足

$$a=\frac{\lambda_x}{2}n_x,\quad b=\frac{\lambda_y}{2}n_y,\quad c=\frac{\lambda_z}{2}n_z$$

从而

$$p_x=\frac{\pi\hbar n_x}{a},\quad p_y=\frac{\pi\hbar n_y}{b},\quad p_z=\frac{\pi\hbar n_z}{c}$$

因此，粒子的能量

$$E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right),(n_x,n_y,n_z=1,2,3,\cdots)$$

4. 设质量为 m 的粒子在一维谐振子势 $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中运动，试用角动量量子化条件求粒子能量 E 的可能取值。

解 谐振子的总能量

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

谐振子运动方程的解为

$$x=x_0\sin\omega t$$

所以

$$p=m\dot{x}=m\omega x_0\cos\omega t$$

根据角动量量子化条件 $\oint p\mathrm{d}x=nh$（代入上面的 x,p 并对一个周期求积分）得

$$\oint p\mathrm{d}x=\int_0^T m\omega x_0\cos\omega t\cdot x_0\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$$

$$=mx_0^2\omega^2\int_0^T\cos^2\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2T=nh$$

因此

$$\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2=\frac{nh}{T}=nh\nu,\quad\left(\nu=\frac{1}{T},n=1,2,3,\cdots\right)$$

由此得到

$$E=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)$$

$$=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2=nh\nu=n\hbar\omega,\quad(\omega=2\pi\nu)$$

5. 设一个平面转子的转动惯量为 I，求转子能量的可能取值。

解　平面转子（绕 z 轴旋转）的能量

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,\quad(\varphi\text{为转角})$$

另一方面，角动量的 z 分量 $l_z=mvr=mr^2\dot{\varphi}$，　$(v=r\dot{\varphi})$，因此

$$E=\frac{1}{2}I\frac{l_z^2}{m^2r^4}=\frac{l_z^2}{2I},\quad(I=mr^2)$$

根据量子化条件 $l_z=n\hbar$，最后得到

$$E=\frac{\hbar^2n^2}{2I},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

6. 一个正电子通过物质时，被原子捕获并与原子中的电子一道湮没产生两个光子：

$$e^+ + e^- \to 2\gamma$$

求所产生光子的 de Broglie 波长，已知：$m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg。

解 在 e^+，e^- 的质心系里，根据动量守恒定律，两个光子的动量大小相等（方向相反）：

$$p_1 = p_2 \equiv p, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

所以波长

$$\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$$

根据能量守恒定律

$$2m_ec^2 = 2h\nu$$

所以

$$\nu = \frac{m_ec^2}{h}$$

从而，de Broglie 波长

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_ec} \approx 0.022\,\text{Å}$$

7. π^+介子可衰变为 μ^+轻子和中微子 ν_μ（其质量 $m_\nu=0$），

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

求 μ^+轻子和中微子 ν_μ 的 de Broglie 波长（考虑相对论效应）。

解 在 π^+介子的静止坐标系中，μ^+和 ν_μ 的动量大小相等、方向相反。设其动量为 p，则按能量守恒定律

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2c^4 + p_\mu^2c^2} + p_\nu c, \quad (p_\mu = p_\nu = p)$$

$$m_\mu^2c^4 + p^2c^2 = m_\pi^2c^4 + p^2c^2 - 2m_\pi c^3 p$$

由此可解出

$$p = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}$$

所以，μ^+和 ν_μ 的 de Broglie 波长

$$\lambda_\mu = \frac{h}{p} = \frac{2m_\pi h}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c} = \lambda_\nu$$

8. 由角动量量子化条件 $J=n\hbar$ 推导出氢原子的“轨道半径”r_n 与能量 E_n。

解　因为

$$J=mvr=n\hbar$$

所以

$$v=\frac{n\hbar}{mr} \tag{1}$$

电子在核 Coulomb 势中的能量

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{r} \tag{2}$$

对圆轨道

$$\frac{e^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

所以

$$v^2=\frac{e^2}{mr} \tag{3}$$

将式(1)代入式(3)得轨道半径

$$r_n=\frac{n^2\hbar^2}{me^2},\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

再把 r_n 和 v 代入式(2)得

$$E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2}$$

9. 一质量为 m 的粒子禁闭在边长为 a 的立方体内，求粒子从基态跃迁到第一激发态所需能量值。

解　立方体内粒子的能量

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\quad n_1,n_2,n_3=1,2,3,\cdots$$

基态能量为

$$E_{111}=\frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

第一激发态(三重简并)的能量为

$$E_{211}=E_{121}=E_{112}=\frac{6\,\hbar^2\pi^2}{2ma^2}=\frac{3\,\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

因此，由基态到第一激发态的激发能

$$E=E_{211}-E_{111}=\frac{3\,\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

10. 在氯化钠晶体内有些负离子空穴，每个空穴束缚一个电子，因此可将这些电子看成束缚在边长为晶格常数 a 的立方体内的粒子。设在室温下电子处于基态，求处于基态的电子吸收电磁波跃迁到第一激发态时，所吸收电磁波的波长。

解 空穴中电子的能量

$$E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2),n_1,n_2,n_3=1,2,3,\cdots$$

基态和第一激发态的能级能量分别为

$$E_{111}=\frac{3\,\hbar^2\pi^2}{2ma^2},\quad E_{211}=E_{121}=E_{112}=\frac{3\,\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

因此，所吸收电磁波的频率满足

$$E=E_{211}-E_{111}=h\nu$$

电磁波的波长

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{E}=\frac{2ma^2hc}{3\,\hbar^2\pi^2}=\frac{4ma^2c}{3\hbar\pi}$$

11. 已知：$1\ \text{Å}=10^{-10}\ \text{m}$，$h=6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$，$e=1.6\times10^{-19}\ \text{C}$，$c=3\times10^8\ \text{m/s}$。试问：

(1)在真空中波长为 1000 Å，3000 Å 的光子的能量分别是多少电子伏特(eV)？

(2)能量为 100 eV，100 MeV 的光子的波长和频率分别是多少？

解 (1)光子的频率 $\nu=c/\lambda$，因此，能量 $E=h\nu=hc/\lambda$。将给定的数值代入公式得到的能量单位是 J(焦耳)。考虑到 1 eV 表示将电子用 1 V 的电压加速时电子所得到的能量，

$$1\ \text{eV}=1.60\times10^{-19}\ \text{J}$$

因此,可以求得

波长为 1000 Å 的光子的能量是 12.4 eV;

波长为 3000 Å 的光子的能量是 4.14 eV。

(2)通过(1)题的逆运算可以得到能量为 100 eV 光子的波长是 1.24×10^{-8} m,频率为 2.42×10^{16} Hz;能量为 100 MeV 光子的波长是 1.24×10^{-12} m,频率为 2.42×10^{20} Hz。

注:1 MeV$=10^6$ eV。

12. 在 X 射线管中,高电压下的电子被加速以后撞击阳极发射出 X 射线。试问:为了得到波长为 0.1 Å 的 X 射线,加速电压至少应该是多少伏特?

解　可以求出波长 $\lambda=0.1$ Å $=10^{-11}$ m 的 X 射线光子的能量 $E=1.24\times10^5$ eV,因此,所需电压至少应该是 $V=1.24\times10^5$ V。

13. 将光照射到金属铜表面打出光电子时,光子的频率必须要大于 $\nu_0=1.1\times10^{15}\ \text{s}^{-1}$。如果用频率为 $\nu=1.5\times10^{15}\ \text{s}^{-1}$的光照射铜表面,所发射光电子的最大能量是多少?

解　根据 Einstein 的公式

$$\frac{1}{2}mv^2=h\nu-A$$

要从铜表面打出光电子,光子的能量必须要大于脱出功 A,这就是说 $A=h\nu_0$。因此,用 $\nu=1.5\times10^{15}\ \text{s}^{-1}$的光照射铜表面时,所发射出来的光电子的最大能量为

$$\begin{aligned}E&=h\nu-h\nu_0=6.63\times10^{-34}\times(1.5-1.1)\times10^{15}\\&=6.63\times0.4\times10^{-19}\ \text{J}\simeq2.65\times10^{-19}\ \text{J}\end{aligned}$$

换算成电子伏特以后 $E=1.5$ eV。

14. 设一个电荷为 $+Ze$ 的原子核的外层有一个电子绕着原子核旋转。根据 Bohr 的量子理论证明:当基态($n=1$)电子的速度达到光速时 Z 的值为 137。

证明　设电子的质量和速度分别为 m 和 v,原子半径为 R,则根据 Bohr 的角动量量子化条件 $mvR=n\hbar$,基态电子的速度

$$v=\frac{h}{2\pi mR} \tag{1}$$

对电子的圆周运动，力的平衡条件是

$$\frac{mv^2}{R}=\frac{Ze^2}{R^2} \tag{2}$$

由此得到

$$R=\frac{Ze^2}{mv^2} \tag{3}$$

由式(1)和式(3)最后得

$$Z=\frac{h}{2\pi e^2}\approx 137$$

15. 氢原子中的电子被一种叫做 μ^- 轻子(其质量为电子质量的 207 倍，电荷与电子的电荷相同)的粒子所代替构成所谓的 μ^- 原子。求 μ^- 原子基态的轨道半径 r_1。

解 由 Bohr 的量子理论，原子轨道的 Bohr 半径

$$r_n=\frac{\hbar^2n^2}{me^2}$$

可见，Bohr 半径与电子的质量 m 成反比。因此，当用 μ^- 轻子代替氢原子中的电子时

$$r_n=\frac{\hbar^2n^2}{207me^2}$$

由此得到 μ^- 原子基态的轨道半径 $r_1=a_0/207=5.292\times10^{-11}/207=2.56\times10^{-13}$ m，其中 $a_0=\hbar^2/me^2$ 代表氢原子基态的 Bohr 半径。

16. 根据 Sommefeld 的量子化条件

$$\oint p\mathrm{d}q=nh$$

其中，p 和 q 分别表示粒子的坐标和对应的正则动量。设粒子的能量

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2\equiv E$$

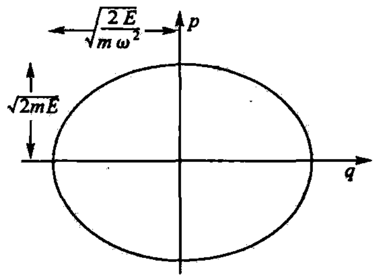
E 表示确定常数。试画出描述粒子运动的图像，并证明粒子的能量

$E=nh\nu$。

解　将粒子能量的表达式改写成

$$\frac{p^2}{2mE}+\frac{q^2}{2E/m\omega^2}=1$$

可见，描述粒子运动的图像是在 p-q 平面（相空间）上的一个椭圆（见下图），其长半轴和短半轴的长度分别为



$$a=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}},\quad b=\sqrt{2mE}$$

量子化条件 $\oint p\mathrm{d}q=nh$ 说明椭圆的面积等于 nh，也就是说，面积

$$A=\pi ab=\pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}=nh$$

由此可得粒子的能量

$$E=\frac{nh\omega}{2\pi}=nh\nu$$

17. 求能量为 15 keV 的电子的 de Broglie 波长。如果考虑电子运动的相对论效应结果将如何？(1 keV$=10^3$ eV)

解　电子的能量 $E=\frac{p^2}{2m}$，因此动量 $p=\sqrt{2mE}$，由此得到电子的 de Broglie 波长

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{6.6\times10^{-23}}\approx10^{-11}\ \mathrm{m}$$

如果考虑相对论效应，则由于能量 $E=\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}-mc^2$，动量

$$p=\sqrt{2mE+\frac{E^2}{c^2}}=6.65\times10^{-23}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

由此最后得到 de Broglie 波长

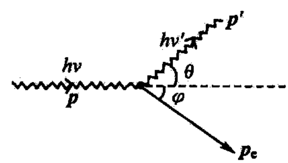
$$\lambda=\frac{h}{p}=0.995\times10^{-11}\,\mathrm{m}$$

18. Compton 散射：设频率为 ν，动量为 $\boldsymbol{p}$ 的 X 射线（光量子）被物质中的电子散射。求被电子散射以后 X 射线的波长。

解 在物质中电子的运动速度远比 X 射线的速度小，因此，散射过程可以认为是 X 射线被静止的电子散射。如图所示，设被散射的 X 射线的频率为 ν'，动量为 $\boldsymbol{p}'$；散射后电子的动量为 $\boldsymbol{p}_e$，动能为 E_e。则根据能量与动量守恒定律，有

$$h\nu+m_ec^2=h\nu'+E_e$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p}_e$$



利用相对论中的动量与能量之间的关系式

$$E_e^2=m_e^2c^4+p_e^2c^2$$

可以得到

$$\frac{1}{c^2}(h\nu+m_ec^2-h\nu')^2-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2=m_e^2c^2$$

再利用光子的动量和能量之间的关系

$$p=h\nu/c,\quad p'=h\nu'/c$$

和

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'=pp'\cos\theta=\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\theta$$

我们得到

$$\nu'=\frac{\nu}{1+\frac{h\nu}{m_ec^2}(1-\cos\theta)}$$

由此最后得到 X 射线的波长

$$\lambda'=\lambda+\frac{h}{m_ec}(1-\cos\theta)$$