全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

微积分

◎ 主编 马锐

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

微　积　分

Weijifen

主　编　马　锐

编　者　陈龙伟　成蓉华　杨　胜　马　锐

杜荣川　谭　莹　庞春平　熊　梅

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国教育科学"十一五"规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"数学类子课题项目研究成果之一。全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程简介。书中每章配有习题，书末配有参考答案。本书的主要特点是概念准确、由浅入深、注重理论联系实际，尽量使学生学以致用。全书知识结构清晰、贴近考研，在现有经济管理类专业微积分教材的基础上，加入了部分考研的典型例题和习题，便于学生为考研作准备。

本书可作为高等学校经济管理类专业微积分教材，也可作为高等学校教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/马锐主编．—北京:高等教育出版社,2010.8
ISBN 978-7-04-030073-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①马… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第124292号

策划编辑 马 丽
责任绘图 黄建英
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www landraco com http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2010年8月第1版
印　　张	25	印　　次	2010年8月第1次印刷
字　　数	460 000	定　　价	36.30元

物料号　30073-00

高等学校经济管理学科数学基础系列教材编委会

序　　言

经济数学作为高等学校经管类专业学生的重要基础课程，担负着向学生传授必需的数学基础知识，提高数学素质的重要作用。开设这些课程的教学目的是让学生通过知识载体学习，从量的方面对事物进行观察、抽象总结和研究；培养学生的逻辑思维能力；提高应用数学知识，理解现实世界的科学意识，为学生根据工作需要进一步学习和应用现代数学知识打下基础。

马锐、张无畏、陈龙伟等教授编写的《微积分》，《线性代数》等教材是全国教育科学"十一五"规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"项目成果之一。该书从上述基本观点出发，结合编者多年经济数学教学的实践经验，按照经济类、管理类数学教学的基本要求编写，注重理论联系实际，尽量使学生学以致用。本书对理论的讲解由浅入深，书中附有大量的典型例题和习题，并在现有经管类微积分教材的基础上，加入一些典型的考研题型，便于学生为考研作准备。

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点和难点。国家鼓励不同层次、不同模式的改革试点，鼓励不同要求、不同风格的教材百花齐放。相信本书的出版，将以其特色为经济数学教材的百花园增加一支绽放的鲜花，并为经济类、管理类微积分教学质量的提高和学生素质的培养作出积极的贡献。

李继彬

2010 年 4 月 20 日

前　言

本书是全国教育科学"十一五"规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"项目成果之一。

本书的主要特点是：

一、注重理论与实践相结合。尽量把数学知识应用于实际问题中，使学生通过对数学知识的学习，能够真正做到"学以致用"。

二、便于教师组织教学、学生自学。编写本书的老师长期从事本门课程的教学，具有丰富的教学经验。教材的编写在紧扣教学大纲的基础上，尽可能符合经济类、管理类专业的本科学生的特点，尽量避开繁琐的证明及推导，由浅入深地讲解理论知识；书中附有大量的典型例题和习题。尤其是，本书紧密结合教育部最新颁布的研究生入学考试数学三、数学四的考试大纲，符合经济类、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势，并选用了一些研究生考试题目，为准备报考硕士研究生的学生提供了考研数学所必需的基础知识。

本书在编写过程中，得到了云南财经大学和楚雄师范学院的大力支持和帮助。特别是云南财经大学统计与数学学院院长石磊教授和副院长费宇教授及昆明理工大学理学院李继彬教授审阅了全书，提出了许多宝贵的意见和建议。高等教育出版社编辑在组稿、定稿的过程中做了大量的工作，编者在此一并表示衷心的感谢。

本书由马锐教授主编，第一章、第二章由成蓉华老师编写；第三章、第五章由马锐教授编写；第四章由杨胜老师编写；第六章由杜荣川副教授编写；第七章、第九章由庞春平老师编写；第八章由谭莹老师编写。全书多媒体课件制作由陈龙伟教授及成蓉华、熊梅老师完成。全书由马锐、陈龙伟教授负责统稿、定稿，由石磊教授主审。

编　者
2010 年 4 月 15 日

目　　录

第一章　函数 …… 1

§1.1　预备知识 …… 1

一、实数与数轴 …… 1

二、实数的绝对值 …… 1

三、区间 …… 2

四、邻域 …… 3

§1.2　函数概念及其表示法 …… 4

一、函数的定义 …… 4

二、函数的表示法 …… 4

三、函数定义域的求法 …… 6

§1.3　函数的性质 …… 7

一、有界性 …… 7

二、单调性 …… 8

三、奇偶性 …… 8

四、周期性 …… 9

§1.4　反函数与复合函数 …… 9

一、反函数 …… 9

二、复合函数 …… 10

§1.5　初等函数 …… 12

一、基本初等函数 …… 12

二、初等函数 …… 16

第一章习题 …… 17

第二章　极限与连续 …… 22

§2.1　数列的极限 …… 22

一、数列极限的定义 …… 22

二、收敛数列的性质 …… 25

§2.2　函数的极限 …… 26

一、函数极限的定义 …… 26

二、函数极限的性质 …… 30

§2.3　无穷小与无穷大 …… 31

一、无穷小 …… 31

二、无穷大 …… 33
三、无穷小与无穷大的关系 …… 34
§2.4 极限运算法则 …… 35
§2.5 极限存在准则 两个重要极限 连续复利 …… 39
一、极限存在准则 …… 39
二、两个重要极限 …… 42
三、连续复利 …… 47
§2.6 无穷小的比较 …… 48
一、无穷小的比较 …… 48
二、等价无穷小替换 …… 48
§2.7 函数的连续性 …… 50
一、函数的连续性 …… 50
二、函数的间断点 …… 53
三、连续函数的性质 …… 56
§2.8 闭区间上连续函数的性质 …… 58
第二章习题 …… 60
第三章 导数与微分 …… 68
§3.1 导数概念 …… 68
一、实例 …… 68
二、导数的定义 …… 69
三、导数的几何意义 …… 71
四、左导数与右导数 …… 72
五、可导与连续的关系 …… 72
§3.2 导数的基本公式与运算法则 …… 73
一、导数的四则运算 …… 73
二、常量 C 的导数 …… 74
三、幂函数的导数 …… 74
四、对数函数的导数 …… 75
五、三角函数的导数 …… 75
六、反函数的求导法则 …… 76
七、指数函数的导数 …… 77
八、反三角函数的导数 …… 77
九、复合函数的求导法则(链式法则) …… 77
§3.3 隐函数求导 对数求导法 …… 82
一、隐函数求导 …… 82
二、对数求导法 …… 83
§3.4 分段函数求导 …… 86

§3.5　高阶导数 …… 89
§3.6　微分 …… 93
一、微分的定义 …… 93
二、微分与导数的关系 …… 94
三、微分的几何意义 …… 95
四、微分法则 …… 96
五、一阶微分形式的不变性 …… 97
六、微分的应用——近似计算 …… 97
第三章习题 …… 99
第四章　中值定理与导数的应用 …… 106
§4.1　微分中值定理 …… 106
一、微分中值定理 …… 106
二、微分中值定理应用举例 …… 110
§4.2　洛必达(L'Hospital)法则 …… 112
一、$\frac{0}{0}$型未定式 …… 112
二、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 114
三、其他类型的未定式 …… 115
§4.3　函数的单调性与极值、最值 …… 117
一、函数的单调性 …… 117
二、函数的极值 …… 120
三、函数的最值、极值的应用问题 …… 123
§4.4　曲线的凹向与拐点 …… 126
§4.5　函数作图 …… 129
一、曲线的渐近线 …… 129
二、函数图像的作法 …… 130
§4.6　变化率及相对变化率在经济学中的应用——边际分析与弹性分析介绍 …… 135
一、函数变化率——边际函数 …… 135
二、成本 …… 135
三、收益 …… 137
四、利润 …… 138
五、函数的相对变化率——函数的弹性 …… 139
六、需求函数与供给函数 …… 141
七、需求弹性与供给弹性 …… 143
八、用需求弹性分析总收益(或市场销售总额)的变化 …… 146
附1　常用经济函数列表 …… 147

附2 经济流通弹性应用举例 …… 149
第四章习题 …… 151
第五章 不定积分 …… 159
§5.1 不定积分的概念 …… 159
一、原函数 …… 159
二、不定积分的概念 …… 160
三、不定积分的几何意义 …… 160
§5.2 不定积分的性质 …… 161
§5.3 基本积分公式 …… 162
§5.4 换元积分法 …… 165
一、第一类换元积分法(复合函数凑微分法) …… 165
二、第二类换元积分法 …… 171
§5.5 分部积分法 …… 177
§5.6 有理函数的积分 …… 181
第五章习题 …… 184
第六章 定积分 …… 191
§6.1 引出定积分概念的例题 …… 191
一、曲边梯形的面积 …… 191
二、变速直线运动的距离 …… 192
§6.2 定积分的定义 …… 193
一、定积分的定义 …… 193
二、定积分的存在性 …… 194
三、定积分的几何意义 …… 194
§6.3 定积分的基本性质 …… 195
§6.4 微积分基本定理 …… 199
一、变上限的定积分 …… 199
二、牛顿-莱布尼茨公式 …… 200
§6.5 定积分的换元积分法和分部积分法 …… 203
一、定积分的换元积分法 …… 203
二、定积分的分部积分法 …… 207
§6.6 反常积分 …… 210
一、无限区间上的积分 …… 210
二、无界函数的积分 …… 212
§6.7 定积分的应用 …… 214
一、平面图形的面积 …… 214
二、旋转体 …… 217
三、平行截面面积为已知的立体的体积 …… 219

四、定积分在经济中的应用 …… 220
第六章习题 …… 222
第七章　无穷级数 …… 230
§7.1　数项级数的概念 …… 230
§7.2　数项级数的基本性质 …… 232
§7.3　正项级数 …… 236
一、正项级数收敛的基本原理 …… 236
二、比较判别法 …… 236
三、比值判别法 …… 238
四、根值判别法 …… 240
§7.4　任意项级数 …… 241
§7.5　幂级数 …… 244
一、幂级数的概念 …… 244
二、幂级数的性质 …… 247
§7.6　函数展开成幂级数 …… 249
§7.7　幂级数的应用举例 …… 254
第七章习题 …… 256
第八章　多元函数 …… 265
§8.1　空间解析几何简介 …… 265
一、空间直角坐标系 …… 265
二、空间任意两点间的距离 …… 266
三、曲面及其方程 …… 266
§8.2　多元函数的概念 …… 269
一、平面点集 …… 269
二、多元函数的概念 …… 271
§8.3　多元函数的极限与连续 …… 273
一、多元函数的极限 …… 273
二、多元函数的连续性 …… 275
§8.4　偏导数 …… 276
一、偏导数的定义及计算 …… 276
二、偏导数的几何意义及偏导数存在与函数连续的关系 …… 279
三、高阶偏导数 …… 280
§8.5　全微分 …… 282
一、全微分的概念 …… 282
二、函数可微分的条件及全微分的计算 …… 283
三、全微分在近似计算中的应用 …… 286
§8.6　多元复合函数的求导法则 …… 287

一、多元复合函数的求导法则 …… 287
二、一阶全微分的形式不变性 …… 294
三、隐函数微分法 …… 296
§8.7　多元函数的极值及其应用 …… 300
一、二元函数的极值 …… 300
二、二元函数的最大值与最小值 …… 303
三、条件极值与拉格朗日乘数法 …… 305
§8.8　二重积分 …… 310
一、二重积分的基本概念 …… 310
二、二重积分的性质 …… 313
三、二重积分的计算 …… 315
第八章习题 …… 330
第九章　微分方程与差分方程简介 …… 338
§9.1　微分方程基本概念 …… 338
§9.2　一阶微分方程 …… 340
一、可分离变量的方程 …… 340
二、齐次微分方程 …… 342
三、一阶线性微分方程 …… 344
§9.3　几种二阶微分方程 …… 347
一、最简单的二阶微分方程 …… 347
二、不显含未知函数 y 的二阶微分方程 …… 347
三、不显含自变量 x 的二阶微分方程 …… 348
§9.4　二阶常系数线性微分方程 …… 349
一、二阶常系数线性齐次微分方程的通解 …… 349
二、二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 351
§9.5　差分方程的一般概念 …… 354
一、差分 …… 354
二、差分方程的基本概念 …… 355
§9.6　一阶常系数线性差分方程 …… 356
一、齐次差分方程的解法 …… 357
二、非齐次差分方程的解法 …… 357
第九章习题 …… 360
参考答案 …… 363

第一章 函 数

函数是微积分的主要研究对象,初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学的研究对象则是变动的量.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,本章主要介绍学习微积分必备的预备知识和函数的概念及性质.

§1.1 预备知识

一、实数与数轴

由于微积分中的函数是在实数范围内来讨论的,因此我们先简单介绍实数集的有关知识.

有理数和无理数统称为实数,实数的全体所构成的集合称为实数集,记为 **R**.

数轴是一条有原点、正方向和单位长度的直线,如图 1-1 所示.

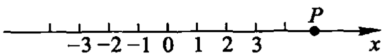

图 1-1

实数与数轴上的点是一一对应的,即每个实数 x 对应于数轴上唯一一个点 P,如图 1-1 所示,反过来,数轴上的任意一点 P 都对应一个实数 x.数轴上的点 P 按上述对应规则所对应的那个实数 x 称为点 P 的坐标.为方便起见,把点 P 与其坐标视为等同,有时二者用同一个字母来表示,比如数 a 也称为点 a,而点 a 就表示坐标为 a 的点.

二、实数的绝对值

1. 定义

定义 1.1 设 x 是一个实数,则 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义:$|x|$ 表示点 x 到原点的距离,而 $|x-y|$ 则表示点 x 到点 y 的距离.

2. 基本性质

设 x,y 为任意实数,则

(1) $|x|\geqslant 0$;

(2) $|-x|=|x|$;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(4) $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

(5) $|xy|=|x|\cdot|y|$;

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

这里我们给出性质(4)的证明,其余性质可利用绝对值的定义证明,把它们留给读者作为练习.

性质(4)的证明.

我们只就$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|$来证,先证

$$|x-y|\leqslant |x|+|y|, \tag{1.1}$$

由性质(2)、(3)可得

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\ -|y|\leqslant -y\leqslant |y|,$$

因此
$$-(|x|+|y|)\leqslant x-y\leqslant |x|+|y|,$$

从而
$$|x-y|\leqslant |x|+|y|.$$

再证
$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|.$$

由(1.1)式可得

$$|x|=|x-y+y|\leqslant |x-y|+|y|,$$

因此
$$|x|-|y|\leqslant |x-y|,$$

在上式中交换 x 与 y 的位置,可得

$$|y|-|x|\leqslant |y-x|,$$

即
$$|x|-|y|\geqslant -|x-y|,$$

从而
$$-|x-y|\leqslant |x|-|y|\leqslant |x-y|,$$

即
$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|.$$

3. 解绝对值不等式

设 x 为任意实数,则

(1) $|x|<a(a>0)$的充分必要条件是 $-a<x<a$;

(2) $|x|>b(b>0)$的充分必要条件是 $x>b$ 或 $x<-b$.

三、区间

区间是微积分中常用的实数集,包括四种有限区间和五种无限区间.

定义 1.2 设 a,b 为两个实数,且 $a<b$,如下定义有限区间与无限区间.

(1) 有限区间

1) 开区间$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

2）闭区间$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

3）半开、半闭区间$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

这些区间统称为有限区间，它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示.

（2）无限区间

引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），可用与有限区间类似的记号表示无限区间.

1）$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$；

2）$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$；

3）$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$；

4）$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$；

5）$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$.

四、邻域

定义 1.3　设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，数集$\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，记为$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

其中，点a叫做邻域的中心，δ叫做邻域的半径，如图 1－2 所示.

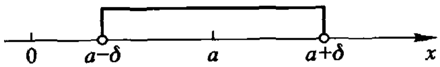

图 1－2

若把邻域$U(a,\delta)$的中心a去掉，所得到的邻域称为点a的去心邻域，记为$U^0(a,\delta)$，即

$$U^0(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

如图 1－3 所示.

例如，$0<|x-2|<5$是以点$a=2$为中心，以 5 为半径的去心邻域$(-3,2)\cup(2,7)$.

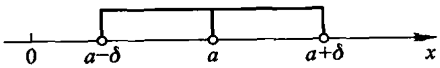

图 1－3

例 1　用区间表示满足不等式$|x+3|\geqslant2$的所有x的集合.

解　$|x+3|\geqslant2$，即$x+3\geqslant2$或$x+3\leqslant-2$，因此$x\geqslant-1$或$x\leqslant-5$. 用区间表示为$(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$，如图 1－4 所示.

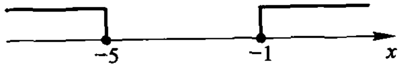

图 1－4

例 2 用区间表示满足不等式 $1<|x-2|<3$ 的所有 x 的集合.

解 $1<|x-2|<3$,即$\begin{cases}|x-2|>1,\\|x-2|<3.\end{cases}$

$|x-2|>1$,即 $x-2>1$ 或 $x-2<-1$,解之得 $x>3$ 或 $x<1$.

$|x-2|<3$,即 $-3<x-2<3$,解之得 $-1<x<5$.

所以原不等式的解集用区间表示为$(-1,1)\cup(3,5)$,如图 1-5 所示.

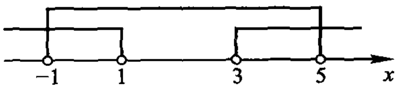

图 1-5

§1.2 函数概念及其表示法

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型. 例如,人们在从事生产和经营活动时,关心的是产品的成本,销售的收益和获得的利润,这些变量通常都与产量或销售量 Q 有关,可以看成是产量或销售量 Q 的函数.

一、函数的定义

定义 1.4 设 D 是一个非空实数集,如果按照某一确定的对应法则 f,对于每个 $x\in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 为定义在 D 上的函数,记作

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中,x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,也记作 D_f,$f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的函数值,全体函数值的集合,称为函数的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$

二、函数的表示法

常用的函数表示法有三种:表格法、图像法和解析法.

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1) 显函数 若函数 y 由自变量 x 的解析表达式直接表示,则函数 y 称为显函数,形如 $y=f(x)$. 例如,$y=x^2+3$.

(2) 隐函数 有些函数,自变量 x 与因变量 y 的对应关系不一定能直接表示,而是由方程 $F(x,y)=0$ 来确定,这样的函数称为隐函数. 例如,$\ln(x+y)=\sin x$.

(3) 分段函数 有些函数,在定义域的不同部分用不同的解析式表示,这样

的函数称为分段函数. 以下是几个分段函数的例子.

例 1　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = [0, +\infty)$，其图像如图 1－6 所示.

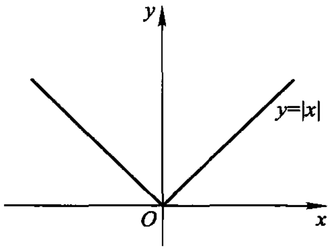

图 1－6

例 2　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$，其图像如图 1－7 所示.

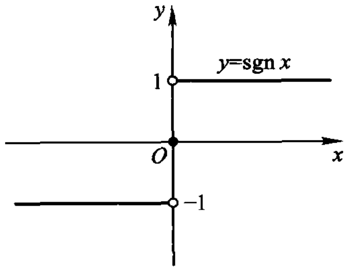

图 1－7

例 3　取整函数

$$y = [x] = n,\ n \leqslant x < n+1,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如

$$\left[\frac{5}{7}\right] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-3.5] = -4,$$

且其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \mathbf{Z}$，其图像如图 1－8 所示.

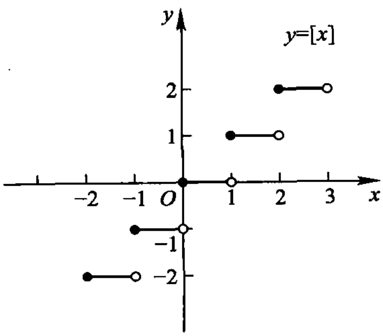

图 1－8