

数 学

考试题型分析与研究

李洪江等编著



教练法

高中版

学苑出版社

数学考试题型分析与研究

——ABC 教练法(高中版)

李洪江等编著

下

学苑出版社

数学考试题型分析与研究——ABC 教练法 (高中版) 下

学苑出版社出版发行

(北京西四颁赏胡同四号)

南京三角洲电子科技有限公司激光照排

江宁印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10

印数 00001—15000

1991 年 1 月第 1 版 1991 年 1 月第 1 次印刷

ISBN7-5077-0252-9/F·13

定价 4.80 元

目 录

第一部分 选择题最优化解法介绍

(A) 指导系统	(1)
一、选择题的类型	(1)
二、选择题的特点	(2)
(B) 学习系统	(2)
三、选择题的解法	(2)
1、直接法 2、间接法 3、特殊值法	
4、数形结合法 5、分析法 6、化归方法	
四、评价	(8)
五、建议	(9)
(C) 反馈系统	(33)
六、水平测试、单元测试	
单元一 函数与方程	(33)
单元二 数列、极限、数学归纳法	(39)
单元三 不等式	(39)
单元四 复数	(41)
单元五 排列、组合、二项式定理	(42)
单元六 三角函数、三角恒等变形、 反三角函数及三角方程	(43)
单元七 直线与平面	(49)
单元八 多面体与旋转体	(50)
单元九 直线和圆锥曲线	(53)
单元十 极坐标和参数方程	(57)
综合测试、答案	

第二部分 填空题精选解法介绍

〔A〕 指导系统	(91)
〔B〕 学习系统	(92)
〔C〕 反馈系统	(114)

第三部分 解答题优选解法介绍

〔A〕 指导系统	(142)
〔B〕 学习系统	(142)
一、熟练掌握重要的数学方法	(142)
1 演绎法 2 配方法 3 换元法 4 消去法	
5 复数法 6 参数法 7 反证法 8 数学归纳法	
9 待定系数法 10 数形结合法	
二、解题思维方式及策略	(332)
1 分析综合法 2 化归方法	
三、数学综合题	(393)
〔C〕 反馈系统	(464)

第四部分 标准化考试研究

一、标准化考试分析与研究	(471)
二、回顾与反思	(475)
三、展望与决策	(518)
附录一、高考数学教学大纲	(548)
附录二、1987-1990 年高考数学试题 及其评分标准	(559)

$$\geq 4p \cdot 2|k| \cdot 2\frac{1}{|k|} = 16p.$$

当且仅当 $|k| = 1$ 且 $\frac{1}{|k|} = 1$, 即 $k = \pm 1$ 时, 上式取等号。

$\therefore |AB| + |CD|$ 的最小值为 $16p$ 。

[例 10] 设 $f(x) = 5 - |x|$,

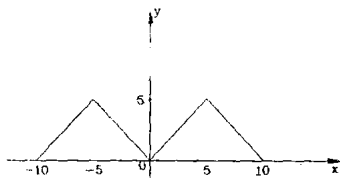
$$g(x) = -5 + |x|,$$

试作函数 $f[g(x)]$ 的图象。

解: 因为

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= 5 - |g(x)| \\ &= 5 - |-5 + |x|| \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 5 - (5 - |x|) = |x|, & (|x| \leq 5 \text{ 时}) \\ 5 - (|x| - 5) = 10 - |x|, & (|x| > 5 \text{ 时}) \end{cases}$$



又因 $y = f[g(x)]$ 的图象关于 y 轴对称, 所以它的图象如图所示。

[例 11] 当 k 为何值时, 关于 x 的方程

$$7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2 = 0$$

的两个根分别在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 内。

解: 若设 $0 < x_1 < 1$, $1 < x_2 < 2$, 然后根据韦达定理去求 k 的值, 显然是不充分的。

现在, 我们仍然把方程置于函数之中去考虑。

设 $f(x) = 7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2$, 如示意图所表示的, 该函数的图象只有在区间 $(0, 1)$ 内穿过 x 轴一次, 又在区间 $(1, 2)$ 内穿过 x 轴一次才能满足题意要求。也就是说, $f(x)$ 必须在 $(0, 1)$ 内变号, 并且又在 $(1, 2)$ 内变

号。其充要条件是:

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

据此可知本例的答案应该是

$$-2 < k < -1 \text{ 或 } 3 < k < 4.$$

〔例 12〕 讨论并作出方程

$$y = \sqrt{|1 - x^2|} \text{ 的图象。}$$

解: 由 $1 - x^2 = 0$ 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$ 。根据二次三项式的符号规则知:

(1) 当 $x < -1$ 时, $1 - x^2 < 0$, 所以

$$|1 - x^2| = x^2 - 1,$$

这时原方程化为 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 它所表示的图象是双曲线的左支在 x 轴以上的部分 ($x < -1, y > 0$)。

(2) 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $1 - x^2 \geq 0$, 所以

$$|1 - x^2| = 1 - x^2,$$

这时原方程化为 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 它的图象是圆

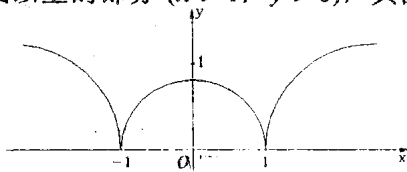
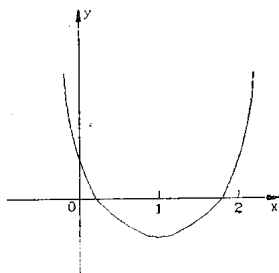
$$x^2 + y^2 = 1$$

在 x 轴以上部分及在 x 轴上的两点 ($|x| \leq 1, 1 \geq y \geq 0$)。

(3) 当 $x > 1$ 时, $1 - x^2 < 0$, 所以

$$|1 - x^2| = x^2 - 1,$$

这时原方程化为 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 它所表示的图象是双曲线的右支在 x 轴以上的部分 ($x > 1, y > 0$)。其图象如图所示。



〔例 13〕 已知 $a, x \in R$, 解关于 x 的不等式

$$|x + a| + |x| < 2.$$

分析: 如果用分区间讨论的方法去掉绝对值符号再解不等式, 则过程相当繁杂。现在我们借助坐标系, 把代数问题映射为几何问题, 通过几何结论去获得代数结论。

解: 将原不等式 $|x + a| + |x| < 2$ 变形为

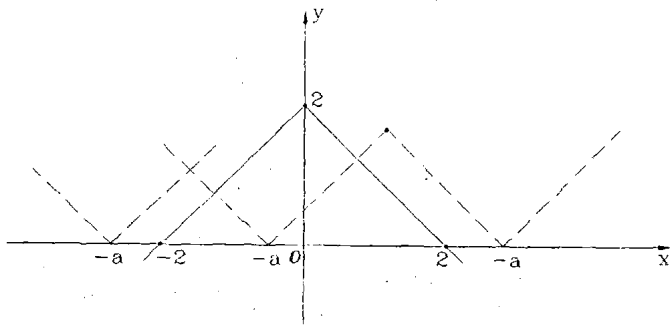
$$|x + a| < 2 - |x|.$$

令 $y_1 = |x + a|$, $y_2 = 2 - |x|$,

则原不等式相当于

$$y_1 < y_2,$$

在同一坐标系中作这两个函数的图象(如图)。



(1) $y_1 = |x + a|$ 的图象(虚线部分)是以 $(-a, 0)$ 为端点, 斜率为 ± 1 的两组平行射线 ($y_1 \geq 0$);

(2) $y_2 = 2 - |x|$ 的图角是以 $(0, 2)$ 为端点, 斜率为 ± 1 的两条射线 ($y_2 \leq 2$).

这样, 原不等式所反映的数量关系就被映射为几何图形中点的位置关系, 而原来所求能使 $y_1 < y_2$ 的 x 的范围,

则被映射为使图象(1)上的点“低于”图象(2)上的对应点(两个对应点具有相同的横坐标)的横坐标的取值范围。

由图可知,

当 $-a \leq -2$ 或 $-a \geq 2$, 即 $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$ 时, 对于具有相同横坐标的点, 图象(1)恒在图象(2)的上方。亦即

$$y_1 \geq y_2$$

这时原不等式无解。

而当 $-2 < a < 2$ 时, 我们先求得两个图象交点的坐标:

$$A\left(\frac{2-a}{2}, \frac{2+a}{2}\right), B\left(-\frac{a+2}{2}, \frac{2-a}{2}\right).$$

同样由图知,

当 $-\frac{a+2}{2} < x < \frac{2-a}{2}$ 时, 图象(1)上的点“低于”

图象(2)上的点, 即 $y_1 < y_2$ 。

所以, 当 $-2 < a < 2$ 时, 不等式的解为

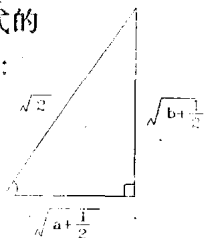
$$-\frac{a+2}{2} < x < \frac{2-a}{2}.$$

〔例 14〕 已知: $a > 0, b > 0, a + b = 1$ 。

求证: $\sqrt{2} < \sqrt{a + \frac{1}{2}} + \sqrt{b + \frac{1}{2}} \leq 2$ 。

证: 为了使条件 $a + b = 1$ 与待证式的中间部分在形式上接近, 可作如下变形:

$$\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(b + \frac{1}{2}\right) = 2,$$



$$\text{进而 } (\sqrt{a + \frac{1}{2}})^2 + (\sqrt{b + \frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{2})^2 \quad (1)$$

构造这样一个三角形，其直角边长分别为 $\sqrt{a + \frac{1}{2}}$ 和 $\sqrt{b + \frac{1}{2}}$ ，而斜边之长则为 $\sqrt{2}$ （如图），显然，其三边长之间关系符合 (1)，从而满足条件 $a + b = 1$ 。

根据“三角形任意两边之和大于第三边”，而有不等式

$$\sqrt{2} < \sqrt{a + \frac{1}{2}} + \sqrt{b + \frac{1}{2}} \text{ 成立,}$$

根据图象，可看出：

$$\sqrt{a + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cos \alpha, \quad \sqrt{b + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sin \alpha,$$

于是有

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \frac{1}{2}} + \sqrt{b + \frac{1}{2}} &= \sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \leq 2. \end{aligned}$$

〔例 15〕解不等式

$$\sqrt{a^2 - 2x^2} > x + a (a > 0),$$

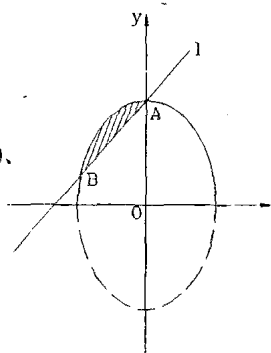
并说明它的几何意义。

分析：这是代数与解析几何的综合题。此处解不等式，就是弄清在 x 的哪个范围，曲线 $y = \sqrt{a^2 - 2x^2}$ 是在直线 $y = x + a$ 的上方。注意， $y = \sqrt{a^2 - 2x^2}$ 是椭圆 $2x^2 + y^2 = a^2$ 的上半部分。

解： $y = \sqrt{a^2 - 2x^2}$ 的图象，即曲线

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (y \geq 0),$$

是半个椭圆(如图), $y = x + a$ 的图象是一条直线 l , l 和半椭圆交于 $A(0, a)$ 、 $B(-\frac{2}{3}a, \frac{a}{3})$ 两点。



$\therefore$ 当 $-\frac{2}{3}a < x < 0$ 时,

$$\sqrt{a^2 - 2x^2} > x + a.$$

[例16] 若 $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, 证明:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2} + \sqrt{(1-b^2) + a^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \geq 2\sqrt{2}.$$

分析: 这个不等式的左边是四个根式的和, 这样的不等式直接证明是比较困难的。因为要把不等式中的根式去掉, 必须把不等式的两边经过若干次平方才能办到, 这样的计算是复杂的。我们发现: 四个根式全是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的形式, 由此我们想到了勾股定理, 因此, 这个题目可以试用几何法来证明。

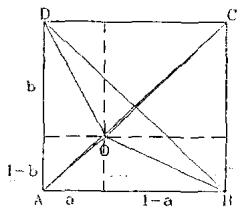
证: 如图, 作一个边长为 1 的正方形 $ABCD$, 作两条与相邻边分别平行的直线, 分一边为 b 、 $1-b$, 分另一边为 a 、 $1-a$, 设这两条直线交于 O 点。则

$$OA = \sqrt{a^2 + (1-b)^2},$$

$$OC = \sqrt{b^2 + (1-a)^2},$$

$$OB = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2},$$

$$OD = \sqrt{a^2 + b^2},$$



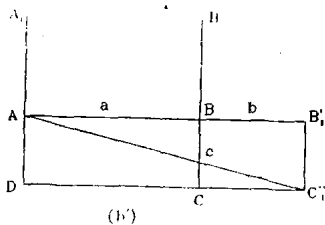
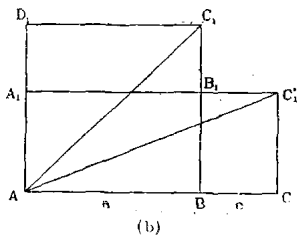
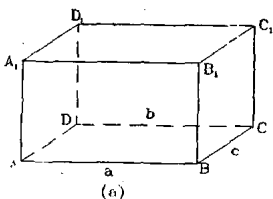
$$AC = BD = \sqrt{2}.$$

$$\because OA + OC + OB + OD \geq AC + BD,$$

$\therefore$ 原不等式得证.

〔例 17〕 如图所示, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱之长分别为 a, b, c 是 $a > b > c$, 现有一个小虫从 A 点出发沿长方体的表面爬行到 C_1 点. 问小虫爬行的最短路程是多少?

解: 这是一个求最小值的问题, 在平面中我们有许多求最小值的方法, 但在空间, 却很困难. 于是设法把它化为平面问题去解决. 仿照圆锥侧面展开的方法, 我们把长方体表面展开为图 b 或图 b' 的样子. (图中只画了长方体中三个面的展开情况, 其中 C_1', C_1'' 是长方体上点 C_1 的对应点). 根据平面几何定理: “两点间的所有连线中以直线段最短”, 可知小虫爬行的最短路程必在 $|AC_1|, |AC_1'|, |AC_1''|$ 之中. 如此, 只要比较这三条线段的长度就可确定最小值.



$$|AC_1| = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc},$$

$$|AC_1'| = \sqrt{(a+c)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac},$$

$$|AC_1''| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab},$$

又由题设知 $a > b > c$ ，于是 $ab > ac > bc$ ，可见 $|AC_1|$ 为最短，其长度即为小虫爬行的最短路程。

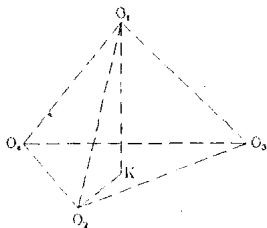
分析一下本例中把立体图形转化为平面图形的过程，便可发现，每一个面的展开都是旋转的结果：如图 b 就是令面 ABB_1A_1 保持不变，而把面 $A_1B_1C_1D_1$ 与面 B_1BCC_1 分别以 A_1B_1 与 B_1B 为轴旋转，直至这两个矩形的所在平面与矩形 ABB_1A_1 的所在平面重合。应注意旋转中哪些量发生了变化，哪些量没有发生变化，也正是这一点，才使得平面图形中所求得的线段 AC_1 的长，就是原问题中欲求之最短的距离。

〔例 18〕把半径为 1 的四个小球叠成两层放在桌面上：下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度。

解：设上层小球的球心为 O_1 ，下层三个小球球心为 O_2, O_3, O_4 ，连接 $O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_3O_4, O_2O_4$ ，因为这四个小球两两相切，所以 $O_1O_2 = O_1O_3 = O_1O_4 = O_2O_3 = O_2O_4 = O_3O_4 = 2$ ，因此 $O_1 - O_2O_3O_4$ 可看作是一个棱长是 2 的正四面体（如图）。

过 O_1 作正四面体的高 O_1K ，那么 K 应是正 $\triangle O_2O_3O_4$ 的中心，

连 O_2K ，则 $O_2K = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 。



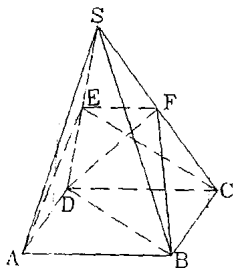
$$\begin{aligned}
 \therefore O_1K &= \sqrt{O_1O_2^2 - O_2K^2} \\
 &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{6}}{3}.
 \end{aligned}$$

因为 O_2 、 O_3 、 O_4 到桌面的距离都等于 1，所以面 $O_2O_3O_4$ 平行于桌面，则球 O_1 上最高点到桌面的距离应是

$$1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} + 1 = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

〔例 19〕 给定顶点为 S 的正四棱锥 $S-ABCD$ ，过点 A 、 B 及棱 SD 的中点 E 作一平面，求这个平面将棱锥分成的两部分的体积之比。

分析：要求四棱锥被平面分成两块后的体积之比，关键是求出它们体积之间的关系。



因此利用形体的分合联系是简捷的思路。易证截平面 ABE 必过棱 SC 的中点 F 。注意到 $V_{ABCDE} = V_{EABCD} + V_{EBCF}$ ，而 $V_{EABCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD}$ ， $V_{EBCF} = \frac{1}{2} V_{DBC F}$ （视 $\triangle BCF$ 为底，三棱锥 $EBCF$ 之高为三棱锥 $DBC F$ 之高的一半）。

$$\text{解： } V_{DBC F} = V_{EDBC} = \frac{1}{2} V_{EABCD} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$$

$$\text{于是 } V_{ABCDE} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \right) V_{SABCD}$$

$$= \frac{5}{8} V_{SABCD},$$

故所求体积之比为 3 : 5.

〔例 20〕用平行于四面体的一组对棱的平面截此四面体，试证其截面是一个平行四边形，并求这截面面积最大时的位置。

证：如图所示，

$$\because KLMN \parallel AC,$$

$$\therefore NM \parallel AC \parallel KL,$$

$$\because KLMN \parallel BD,$$

$$\therefore KN \parallel BD \parallel LM,$$

$$\therefore KLMN \text{ 为平行四边形,}$$

$$\therefore \text{平行四边形 } KLMN \text{ 面积} \\ = KN \cdot KL \cdot \sin \angle NKL,$$

而 $\angle NKL$ 等于 AC 与 BD 所夹的角，是定值， $\therefore$ 平行四边形 $KLMN$ 面积随 $KN \cdot KL$ 而定。

$$\because \triangle AKN \sim \triangle ABD, \triangle BKL \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{KN}{BD} = \frac{AK}{AB}, \frac{KL}{AC} = \frac{BK}{BA} \text{ 由此得 } \frac{KN \cdot KL}{BD \cdot AC}$$

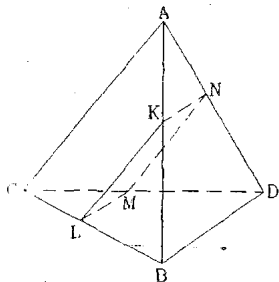
$$= \frac{AK \cdot BK}{AB \cdot BA}$$

其中 BD 、 AC 、 AB 为定量。

$\therefore KN \cdot KL$ 随 $AK \cdot BK$ 而定。

$\because AK + KB = AB$ 是定量， $\therefore$ 当 $AK = BK$ 时，乘积 $AK \cdot KB$ 最大。即截面过 AB 中点时其截面面积最大。

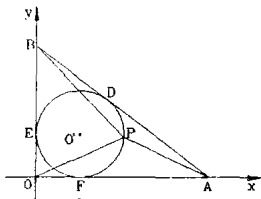
〔例 21〕已知 $\triangle ABO$ 的三边长分别为 3、4、5， P 是它的内切圆上的一点，求以 PA 、 PB 、 PO 为直径的三



个圆的面积之和的最大值和最小值。

解：因为以 PA 、 PB 、 PO 为直径的三个圆面积之和等于 $\frac{\pi}{4}(PA^2 + PB^2 + PO^2)$ ，要求此面积和的最值，只求 $PA^2 + PB^2 + PO^2$ 的最值即可。

以 O 为原点建立如图所示的直角坐标系，则 $\triangle ABO$ 三个顶点的坐标为 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 、 $O(0, 0)$ 。



$Rt\triangle ABO$ 的内切圆半径

$$r = \frac{1}{2}(AO + BO - AB) = 1,$$

$\therefore \triangle ABO$ 内切圆圆心的坐标为 $O'(1, 1)$ 。

设 $P(x, y)$ 为内切圆上一点，

则 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$ 。

于是 $PA^2 + PB^2 + PO^2$

$$\begin{aligned} &= (x - 4)^2 + (y - 0)^2 + (x - 0)^2 + (y - 3)^2 + (x - 0)^2 + (y - 0)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 8x - 6y + 25 \\ &= 3(x - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 19 - 2x \\ &= 22 - 2x. \end{aligned}$$

由于 $0 \leq x \leq 2$ ，故当 $x = 0$ 时， $PA^2 + PB^2 + PO^2$ 取最大值 22；当 $x = 2$ 时， $PA^2 + PB^2 + PO^2$ 取最小值 18。

所以，三圆面积之和的最大值为 $\frac{\pi}{4} \times 22 = 5.5\pi$ ，三圆面

积之和的最小值为 $\frac{\pi}{4} \times 18 = 4.5\pi$ 。

〔例 22〕 抛物线 $y^2 = 2px$ 的内接三角形的一个顶点在原点，三边上的高线都通过抛物线的焦点，求此三角形外接圆的方程

解： 设 $\triangle OAB$ 为抛物线的内接三角形， AD 、 BE 、 OC 为过焦点 F 的三条高线。设 A 点的坐标为 (x_1, y_1) ，于是 $y_1 = \sqrt{2px_1}$ ，由 AB 垂直于 x 轴及抛物线的对称性得 $B(x_1, -\sqrt{2px_1})$

$$OA \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{\sqrt{2px_1}}{x_1},$$

$$BE \text{ 的斜率 } k_2 = \frac{-\sqrt{2px_1}}{x_1 - \frac{p}{2}}$$

$$\text{由 } k_1 k_2 = \frac{\sqrt{2px_1}}{x_1} \cdot \frac{-\sqrt{2px_1}}{x_1 - \frac{p}{2}} = -1,$$

$$\text{得 } 2p = x_1 - \frac{p}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{5}{2}p, y_1 = \sqrt{5}p, \text{ 故 } A \text{ 点坐标}$$

$$\text{为 } (\frac{5}{2}p, \sqrt{5}p), B \text{ 点坐标为 } (\frac{5}{2}p, -\sqrt{5}p)$$

设过 O 、 A 、 B 三点圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，因为 $O(0, 0)$ 在圆上， $\therefore F = 0$ ； $A(\frac{5}{2}p, \sqrt{5}p)$ 在

