

全国各类成人高等学校专升本招生入学考试

**教程及全真模拟
试卷精解** (师范类)

数学教育专业

主 编 首都师范大学 王志玺博士后

专升本



 现代出版社

全国各类成人高等学校专升本招生入学考试
教程及全真模拟试卷精解

——专科起点升本科

(师范类)

数学教育专业

主编 首都师范大学 王志玺博士后
编者 王志玺 王汇淳
丁 莉 刘冬华

专 升 本



现代出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高等学校专升本招生入学考试教程及全真模拟试卷精解:数学教育专业/王志玺主编. —北京:现代出版社, 2000. 11

ISBN 7-80028-598-7

I. 全... II. 王... III. 数学—教育—专业—成人教育:高等教育—入学考试—自学参考资料 IV. G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 78287 号

责任编辑/朱 江 封面设计/Adobe

全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学教育专业教程及全真模拟试卷精解
——专科起点升本科

出版发行/现代出版社

社 址/北京市安定门外安华里 504 号 (邮编 100011)

经 销/全国各地新华书店

印 刷/北京经纬印刷厂

开 本/787×1092 1/16 总印张/204 总字数/4896 千字
版 次/2000 年 11 月第 1 版 2000 年 11 月第 1 次印刷
印 数/3000 册

书 号/ISBN 7-80028-598-7/G·201

定 价/297.60 元(共 12 册 本册定价/24.80 元)

出版声明/版权所有·侵权必究

目 录

空间解析几何

第一章 矢量代数.....	1
第二章 平面与空间直线.....	7
第三章 特殊曲面	15
第四章 二次曲面	21
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试卷(一)	25
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试题(一)参考答案 ...	26
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试卷(二)	27
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试题(二)参考答案 ...	29
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试卷(三)	30
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试题(三)参考答案 ...	31
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试卷(四)	32
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试题(四)参考答案 ...	34
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试卷(五)	36
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试空间解析几何全真模拟试题(五)参考答案 ...	38

高等代数

第一章 基本概念	39
第二章 一元多项式	43
第三章 行列式	51
第四章 线性方程组	59
第五章 矩阵	70
第六章 向量空间	78
第七章 线性变换	88
第八章 欧氏空间	98
第九章 二次型	105
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试卷(一).....	111
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试题(一)参考答案.....	114
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试卷(二).....	115
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试题(二)参考答案.....	118

全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试卷(三)·····	120
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试题(三)参考答案·····	123
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试卷(四)·····	124
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试题(四)参考答案·····	127
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试卷(五)·····	129
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试高等代数全真模拟试题(五)参考答案·····	133

数学分析

第一章 函数、极限、连续·····	135
第二章 一元函数微分学·····	152
第三章 一元函数积分学·····	168
第四章 级数·····	187
第五章 多元函数微积分学·····	201
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试卷(一)·····	217
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试题(一)参考答案·····	219
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试卷(二)·····	222
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试题(二)参考答案·····	225
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试卷(三)·····	229
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试题(三)参考答案·····	231
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试卷(四)·····	234
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试题(四)参考答案·····	237
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试卷(五)·····	240
全国各类成人高等学校专升本招生入学考试数学分析全真模拟试题(五)参考答案·····	243

附录一

2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试数学教育专业数学分析试卷·····	246
2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试数学教育专业数学分析试题 参考答案及评分标准·····	250
2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试数学教育专业高等代数试卷·····	254
2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试数学教育专业高等代数试题 参考答案及评分标准·····	258
2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试数学教育专业空间解析几何试卷·····	261
2000 年成人高等学校专升本招生全国统一考试数学教育专业空间解析几何试题 参考答案及评分标准·····	264

附录二

丛书目录·····	267
-----------	-----

空间解析几何

第一章 矢量代数

[总体要求]

1. 深刻理解矢量(向量)的定义及有关概念,在解题时能灵活运用这些概念进行正确的推理和判断.
2. 熟练掌握矢量的加法、减法、数乘矢量、矢量的数性积、矢性积、混合积的运算法则和性质,正确地进行计算和论证.
3. 熟练掌握矢量共线、共面、垂直的条件.
4. 正确理解矢量在轴上射影的定义,熟悉矢量在轴上射影的性质.

[复习内容]

一、基本内容

(一) 矢量(向量)的有关概念

矢量的定义、矢量的表示、矢量的模、单位矢量、零矢量、相等矢量、自由矢量、逆矢量(相反向量)、共线矢量、共面矢量.

(二) 矢量的运算

1. 矢量的加法

(1) 定义

两个矢量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的和 $\vec{a} + \vec{b}$ 可以用三角形法则或平行四边形法则予以定义,多个矢量的和用多边形法则定义,求和的运算称为矢量的加法.

(2) 矢量加法的性质

- ① $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
- ② $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$;
- ③ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (加法交换律);
- ④ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (加法结合律).

2. 矢量的减法

两个矢量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的差 $\vec{a} - \vec{b}$ 定义为矢量 $\vec{a}$ 与矢量 $\vec{b}$ 的逆矢量的和, 即 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. 求差的运算称为矢量的减法.

3. 数与矢量的乘积

(1) 定义

实数 λ 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积是一个矢量, 记作 $\lambda\vec{a}$, 它的模是 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$; $\lambda\vec{a}$ 的方向: 当 $\lambda > 0$ 时与 $\vec{a}$ 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时与 $\vec{a}$ 的方向相反.

(2) 运算律和性质

$$\textcircled{1} \lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda;$$

$$\textcircled{2} \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a};$$

$$\textcircled{3} \vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0, \vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a};$$

$$\textcircled{4} \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

$$\textcircled{5} (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

$$\textcircled{6} \text{非零向量 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 共线} \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, \text{ 使得 } \vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

4. 两矢量的数性积(点乘积)

(1) 定义

两矢量的模与它们夹角余弦的乘积称为矢量的数性积, 即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

(2) 运算律和性质

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{交换律});$$

$$\textcircled{2} (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) \quad (\text{与数的结合律});$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{加乘分配律});$$

$$\textcircled{4} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2;$$

$$\textcircled{5} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$$

$$\textcircled{6} \vec{a} \cdot \vec{e} = \text{Prj}_{\vec{e}} \vec{a} \quad (\text{其中 } \vec{e} \text{ 是单位矢量, } \text{Prj}_{\vec{e}} \vec{a} \text{ 表示矢量 } \vec{a} \text{ 在 } \vec{e} \text{ 上的射影});$$

$$\textcircled{7} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{Prj}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a};$$

$$\textcircled{8} \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

5. 两矢量的矢性积(叉乘积)

(1) 定义

两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的矢性积是一个矢量, 记作 $\vec{a} \times \vec{b}$, 它的模 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$, 它的方向与 $\vec{a}, \vec{b}$ 都垂直, 且按顺序 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ 构成右手系.

(2) 矢性积的运算律和性质

$$\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{反交换律});$$

$$\textcircled{2} \lambda \vec{a} \times \mu \vec{b} = \lambda \mu \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{与数的结合律});$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{加乘分配律});$$

$$\textcircled{4} \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0};$$

⑤ 两矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 矢性积的模 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 在数值上等于以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边所构成的平行四边形的面积.

6. 三个矢量的混合积

(1) 定义

三矢量的混合积记成 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

(2) 混合积的性质

$$\textcircled{1} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\textcircled{2} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

③ 混合积的绝对值 $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ 在数值上等于以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

$$\textcircled{4} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

⑤ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, 则按顺序 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 成右手系; $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, 则按顺序 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 成左手系.

几点注意:

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c};$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c};$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ 或 } \vec{b} = \vec{0};$$

$$\textcircled{4} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ 或 } \vec{b} = \vec{0};$$

$$\textcircled{5} (\vec{a} \times \vec{b})^2 \neq a^2 b^2$$

$$\textcircled{6} (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \neq a^2 b^2$$

$$\textcircled{7} (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

(三) 矢量的坐标

空间中以 O 为原点, 以两两互相垂直的单位矢量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为基矢量构成直角坐标系. 记为 $O-xyz$.

1. 矢量的坐标

若矢量 $\vec{a}$ 关于基矢量的分解式为 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 则 x, y, z 称为矢量 $\vec{a}$ 在坐标系 $O-xyz$ 下的坐标或分量, 记为 $\vec{a} = \{x, y, z\}$. 显然, $\vec{i} = \{1, 0, 0\}, \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \vec{k} = \{0, 0, 1\}$, 并且 $x = \text{Prj}_{\vec{i}} \vec{a}, y = \text{Prj}_{\vec{j}} \vec{a}, z = \text{Prj}_{\vec{k}} \vec{a}$.

2. 点的径矢

空间一点 P , 矢量 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ 称为 P 点的径矢, 若矢量 $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \{x, y, z\}$, 则 P 点在坐标系 $O-xyz$ 下的坐标为 (x, y, z) .

3. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标

若点 A, B 的坐标分别为 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

(四) 向量运算的坐标表示

设 $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.

1. 加减法运算

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}$$

2. 数乘运算

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$$

3. 数性积运算

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

4. 矢性积运算

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

5. 混合积运算

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(五) 一些关系的坐标表示

1. 矢量的模

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2. 两点之间的距离

设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3. 定比分点

设 $P(x, y, z)$ 将线段 $P_1 P_2$ 分成定比 λ , 即 $\overrightarrow{P_1 P} = \lambda \overrightarrow{PP_2} (\lambda \neq -1)$, 则

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

当 $\lambda = 1$ 时, P 为线段 $P_1 P_2$ 的中点, 则

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

4. 矢量的方向余弦

设向量 $\vec{a}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角分别为 α, β, γ ($\vec{a}$ 的方向角), 则 $\vec{a}$ 的方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

显然 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

5. 两矢量的夹角

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

6. 两矢量的垂直

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

7. 两矢量的平行

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

8. 以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. 以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的四面体的体积

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

10. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

二、例题选讲

例1 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = -3$, 求 $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

解 $\because |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 16$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = 4.$$

例2 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, 且向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两互成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 求 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

解 $\because |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 25$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{25} = 5$$

例3 已知 $\vec{a} = \{2, 2, 1\}, \vec{b} = \{-8, -10, -6\}$, 求与 $\vec{a}, \vec{b}$ 均垂直的单位向量.

解 (方法一) $\because \vec{a} \times \vec{b} = \{-2, 4, -4\}, |\vec{a} \times \vec{b}| = 6$

$$\therefore \text{所求的单位向量为 } \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \pm \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

(方法二) 设所求矢量为 $\vec{c}_0 = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$\because \vec{c}_0 \perp \vec{a} \quad \therefore 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \quad \text{①}$$

$$\because \vec{c}_0 \perp \vec{b} \quad \therefore -8c_1 - 10c_2 - 6c_3 = 0 \quad \text{②}$$

$$\because |\vec{c}_0| = 1 \quad \therefore c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad ③$$

解 ①、②、③ 式所构成的联立方程组, 得 $c_1 = \pm \frac{1}{3}, c_2 = \mp \frac{2}{3}, c_3 = \pm \frac{2}{3}$

$$\text{故 } \vec{c}_0 = \pm \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

例 4 已知 $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, 矢量 $\vec{c}$ 与 z 轴垂直且满足 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9, \vec{c} \cdot \vec{b} = -4$, 求 $\vec{c}$.

解 设 $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\because \vec{c} \perp z \text{ 轴} \quad \therefore \vec{c} \cdot \vec{k} = \{x, y, z\} \cdot \{0, 0, 1\} = 0 \quad \text{得 } z = 0 \quad ①$$

$$\because \vec{c} \perp \vec{a} \quad \therefore \vec{c} \cdot \vec{a} = \{x, y, z\} \cdot \{3, 1, 5\} = 3x + y + 5z = 9 \quad ②$$

$$\because \vec{c} \perp \vec{b} \quad \therefore \vec{c} \cdot \vec{b} = \{x, y, z\} \cdot \{1, 2, -3\} = x + 2y - 3z = -4 \quad ③$$

解 ①、②、③ 式构成的联立方程组, 得 $\vec{c} = \left\{ \frac{22}{5}, -\frac{21}{5}, 0 \right\}$.

例 5 设 $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(-5, -4, 8)$, 求四面体 $D-ABC$ 从 D 所引的高.

解 $\overrightarrow{AB} = \{2, -2, -3\}, \overrightarrow{AC} = \{4, 0, 6\}, \overrightarrow{AD} = \{-7, -7, 7\}$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{-12, -24, 8\}, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 28$$

由于四面体 $D-ABC$ 的高与以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的高相等, 所以

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{308}{28} = 11$$

第二章 平面与空间直线

[总体要求]

1. 理解并掌握平面和直线方程的各种形式及其建立过程,能根据不同条件,选用适当方法建立平面和直线的方程,且能熟练地进行不同形式间的互化.
2. 对平面与平面、直线与直线、直线与平面相关位置能作正确的判断和论证.
3. 对平面间的夹角、直线间的夹角、直线与平面的夹角、元素之间的距离等几何量,能依据公式进行准确无误的计算和解决有关的求点的轨迹问题.
4. 理解二异面直线的距离公式、公垂线的方程.
5. 掌握应用平面束方程解决有关问题.

[复习内容]

一、基本内容

(一) 平面与直线的方程

1. 平面方程的各种形式

(1) 点法式方程

过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $\vec{N} = \{A, B, C\}$ 为法矢量的平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(2) 一般式方程

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

① $D = 0$, 平面过坐标原点.

② 方程中缺某一变元, 则平面平行于所缺变元的同名坐标轴.

(3) 截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$$

a, b, c 分别表示平面在三个坐标轴上的截距, 它们的值可正可负, 但方程中的运算符号均须为正.

关于平面的三点式方程、参数式方程, 只须理解, 不必强记.

2. 直线方程的各种形式

(1) 参数式方程

过空间一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向矢量为 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 的直线, 其参数式方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

(2) 标准式(对称式) 方程

过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 为方向矢量的直线方程为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (l^2 + m^2 + n^2 \neq 0)$$

当 l, m, n 中有一个或两个是零时, 约定相应分子为零.

(3) 两点式方程

通过 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 两点直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(4) 一般式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2)$$

直线的方向矢量为

$$\vec{S} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

(5) 直线的射影式方程

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n} \\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

或简记为

$$\begin{cases} y = az + c \\ y = bz + d \end{cases}$$

(二) 元素间的相对位置关系

1. 点与平面的位置关系 —— 点到平面的距离

设有点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 点到平面的距离 d :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. 两平面的位置关系

设有平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

(1) π_1 与 π_2 相交 $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

(2) π_1 与 π_2 平行 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

(3) π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

(4) π_1 与 π_2 的夹角 θ

$$\cos \theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(5) π_1 与 π_2 垂直 $\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

(6) 两平行平面之间的距离

设两平行平面 $\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$

$\pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$

则其距离 d :

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. 点与直线的位置关系 —— 点到直线的距离

设有点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和直线 $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, 点到直线的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0 M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{array} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

其中 $\overrightarrow{P_0 M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$, $\vec{s} = \{l, m, n\}$.

4. 直线与平面的位置关系

设有直线 $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 和平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$.

(1) L 与 π 相交 $\Leftrightarrow Al + Bm + Cn \neq 0$

(2) L 与 π 平行 $\Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$

(3) L 在 π 上 $\Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$

(4) L 与 π 的夹角 θ

$$\sin \theta = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (\theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$$

5. 直线与直线的位置关系

设有直线

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}; L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\text{取 } \Delta = (\overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

(1) L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow \Delta = 0$

① L_1 与 L_2 相交 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ l_1 : m_1 : n_1 \neq l_2 : m_2 : n_2 \end{cases}$

② L_1 与 L_2 平行 $\Leftrightarrow l_1 : m_1 : n_1 = l_2 : m_2 : n_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$

③ L_1 与 L_2 重合 $\Leftrightarrow l_1 : m_1 : n_1 = l_2 : m_2 : n_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$

(2) L_1 与 L_2 异面 $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

(3) L_1 与 L_2 的夹角为 θ

$$\cos \theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

(4) 两异面直线公垂线的方向向量 $\vec{s}$

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \{l, m, n\} = \left\{ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \right\}$$

(5) 异面直线公垂线的方程

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

(6) 两异面直线间的距离

$$d(L_1, L_2) = |\text{Prj}_{\vec{s}} \overrightarrow{P_1 P_2}| = \frac{|l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

6. 平面束

设有直线 $L: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$, 过直线 L 的平面族的方程为

$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

二、主要习题类型及例题选讲

(一) 求平面与直线的方程

1. 根据条件直接计算法 向量 $\vec{N}$ 、方向向量 $\vec{S}$

例 1 求过点 $P(4, -3, 5)$, 且与直线 $a: \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ 垂直相交的直线.

解 过 P 作与 a 垂直的平面 π :

$$3(x - 4) + 5(y + 3) + 2(z - 5) = 0$$

$$\text{即} \quad 3x + 5y + 2z - 7 = 0$$

再求直线 a 与平面 π 的交点, 先把 a 的方程写成参数式

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -7 + 5t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

代入 π 平面的方程, 解出 t

$$3(3t) + 5(-7 + 5t) + 2(2 + 2t) - 7 = 0, t = 1$$

代回 π 的方程, 得直线 a 与平面 π 交点的坐标 $x = 3, y = -2, z = 4$

所求直线的方向向量 $\vec{s}$

$$\vec{s} = \{4 - 3, -3 + 2, 5 - 4\} = \{1, -1, 1\}$$

所求直线方程为

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$$

2. 利用待定系数法求平面、直线的方程

例2 平面 π 通过点 $A(0,0,1)$ 和点 $B(3,0,0)$ 且与 xoy 平面成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 求 π 平面的方程.

解 设 π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\because \pi \text{ 过点 } A \therefore C + D = 0 \quad ①$$

$$\because \pi \text{ 过点 } B \therefore 3A + D = 0 \quad ②$$

$$\because \pi \text{ 与 } z = 0 \text{ 成 } \frac{\pi}{3} \text{ 角} \therefore \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{即} \quad A^2 + B^2 - 3C^2 = 0 \quad ③$$

解由 ①、②、③ 式所构成的联立方程组, 得 $D = -3, A = 1, B = \pm\sqrt{26}, C = 3$

所求的平面方程为

$$x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \quad \text{和} \quad x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$$

例3 求过点 $P(1,1,\sqrt{2})$, 与 xoy 平面夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且垂直于直线 $a: \frac{x}{1} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z}{0}$ 的直线 b 的方程.

解 设所求直线 b 的方程为

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\sqrt{2}}{n}$$

由于 b 与 xoy 平面夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\{0,0,1\} \cdot \{l,m,n\}|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\text{即} \quad l^2 - m^2 + n^2 = 0 \quad ①$$

由于 b 与 a 垂直, 所以 $\{l,m,n\} \cdot \{1,-1,0\} = 0$

$$\text{即} \quad l - m = 0 \quad ②$$

解 ① 和 ②, 得 $l : m : n = \sqrt{2} : \sqrt{2} : (\pm 2)$

于是得两条直线

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z-\sqrt{2}}{\pm 2}$$

(二) 求一点在给定平面上的射影及关于该平面的对称点

例4 求点 $P(-4, -6, 1)$ 在平面 $\pi: 2x + 3y - z - 15 = 0$ 上的射影及关于平面 π 的对称点.

解 过点 P 作 π 平面的垂线:

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -6 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

代入 π 平面的方程

$$2(-4 + 2t) + 3(-6 + 3t) - (1 - t) - 15 = 0$$

解出 $t = 3$, 将 $t = 3$ 代入垂线的方程, 得射影点的坐标 $P'(2, 3, -2)$.

将 $t' = 2 \times 3 = 6$ 代入垂线的方程, 得对称点的坐标 $P''(8, 12, -5)$.

注 求出 P' 点后, 也可用中点公式求出 P'' 点的坐标.

(三) 求过已知直线的平面

例 5 求过直线 $a: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-\frac{9}{2}}{2}$ 且与 x 轴, y 轴截距相等的平面.

解 把直线 a 的方程化成一般式, 得

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 4y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

设过 a 的平面方程为: $x + 3y - 5 + \lambda(4y + 2z - 9) = 0$, 化成截距式, 得

$$\frac{x}{5+9\lambda} + \frac{y}{\frac{5+9\lambda}{3+4\lambda}} + \frac{z}{\frac{5+9\lambda}{2\lambda}} = 1$$

依题意有:

$$5 + 9\lambda = \frac{5 + 9\lambda}{3 + 4\lambda}$$

解得

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{9}{5}$$

得所求平面 $2x + 2y - 2z - 1 = 0$ 和 $9x + 7y - 10z = 0$.

(四) 求直线在平面上的射影

例 6 求直线 $L: \begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ 在 xoy 平面和在平面 $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$

上的射影.

解 求直线在坐标平面上的射影, 应先求出过此直线与相应坐标平面垂直的平面, 令其与坐标平面的方程联立, 即为所求射影直线的方程.

在直线 L 的方程中消去变元 z , 得 $6x + 4y - 7 = 0$, 所求射影直线方程为

$$\begin{cases} 6x + 4y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

欲求直线 L 在 π 平面上的射影, 先作过直线 L 与平面 π 垂直的平面, 设此平面的方程为

$$\begin{aligned} 5x - 4y - 2z - 5 + \lambda(x + 2z - 2) &= 0 \\ (5 + \lambda)x - 4y - (2 - 2\lambda)z - 5 - 2\lambda &= 0 \end{aligned}$$

由 $\{(5 + \lambda), -4, -(2 - 2\lambda)\} \cdot \{2, -1, 1\} = 0$

得 $2(5 + \lambda) + 4 - (2 - 2\lambda) = 0$ 即 $\lambda = -3$

于是得垂面的方程 $2x - 4y - 8z + 1 = 0$