

[英]E.欣顿 等著

朱明 等译

复合材料结构 有限元程序

西北工业大学出版社

封面设计：杨君明
版式设计：潘玉浩
插图描绘：张玲玲

ISBN 7-5612-0141-9/TQ·3

定 价： 6.90 元

复合材料结构有限元程序

[英] E.欣顿 D.R.J.欧文 著

朱 明 朱尚刚 译

西北工业大学出版社

1989年5月 西安

内 容 简 介

本书系统阐述了线性与非线性、各向同性与各向异性的板和壳结构有限元程序设计原理,并提供了全部源程序。其中包括MINDLIN板的闭式解法,使用简便的有限带条法,轴对称壳、任意形状壳(几何非线性,外载非线性),复合材料叠层和夹层的板壳及其弹、塑性有限元分析,还包括含有初始缺陷的复合材料板壳,如钢筋混凝土结构等的极限载荷计算。因此,本书对航空、航天、船舶、桥梁、建筑及其它民用工业的科研和生产将有广泛的实用价值和经济效益;可供各大专院校师生、研究生、各有关厂所工程技术人员作科研、设计、教学参考之用。

FINITE ELEMENT SOFTWARE for
PLATES and SHELLS
E.Hinton D.R.J.Owen
Pineridge Press Limited
1984

*

复合材料结构有限元程序

[英] E.欣顿 D.R.J.欧文 著

译 者 朱 明

朱尚刚

责任编辑 金豪斯

责任校对 钱伟峰

•

西北工业大学出版社出版发行

(西安市友谊西路127号)

陕西省新华书店经销

空军工程学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-0141-9/TQ·3

•

开本 787×1092毫米 1/16 21.25 印张 517 千字

1989年5月第1版

1989年5月第1次印刷

印数1—1000册

定价6.90元

译者序言

有限元素法已在我国广泛的领域内得到应用，对科研和生产建设发挥了巨大的作用。由于其发展之迅速，一般的有限元结构分析方法已为广大科技工作者所熟悉。但在航空、航天、航海、民用建筑等领域内，有限元法仍作为科研课题在研究，如各向异性的复合材料叠层与夹芯结构分析，弹塑性与几何非线性问题分析，有缺陷损伤条件下的极限载荷分析，以及简便精确、节省机时的元素选用和计算方法等。国内还较缺乏这些方面的程序，而工程应用和科研的发展又很需要能供实用的程序，本书即为满足此需要而翻译。

E.Hinton和D.R.J.Owen在英国斯旺西大学长期从事有限元程序设计的研究工作，经验丰富，在国际上享有威望，他们已编写了有限元程序设计的丛书多集，有的已译成中文，本书是其最新出版的一卷，1984年首版。

本书第一——四章由朱明翻译，第五章由朱尚刚翻译。第一、二、五章由徐继南校对，第三、四章由何大斌校对。并由郑长卿教授复校了第四、五章。在翻译工作中还受到过王德钊教授等的热情指点和支持，特此表示感谢。由于译者水平有限，错误之处恳请读者批评指正。

译者

1987年6月

前 言

本书内容涉及平板、壳体的线性和非线性静态分析，重点为板、壳的计算方法，这些方法考虑到横向剪切效应，因而用Mindlin板和退化壳体的假设作为发展软件的基础。

前三章主要讨论线弹性的Mindlin板分析。在第一章中提出用闭式解法求解各种不同载荷作用下基于Winkler弹性支承处理的矩形、正交各向异性的简支平板。位移和法线转角可用双付里叶级数描述。此软件可用于验算本书后面提到的有限带条和有限元程序。第二章涉及对Mindlin板、折板以及轴对称壳体的半解析、半数值解方法，提供了分析Mindlin板的有限带条程序。第三章是关于Mindlin板弯曲有限元分析，并包括选择积分的四边形等参Mindlin板元的全部程序资料。

第四章叙述各向异性板壳的非线性有限元分析。第五章内容为增强混凝土板壳的极限载荷分析。对每一种情况都提供了全部程序资料。

本书中把理论、软件和应用三者并重是经过深思熟虑的，并允许读者补充或有选择地使用这些程序，以此为基础发展软件，以适应自己的具体情况和需要。

作者意识到读者不愿意重新把程序逐条打入计算机，因此，可从程序出版者那里买到一个经过检验的程序磁带，还带有典型的输入数据。作者相信所提供的软件除适用于研究和教学目的外，还可作为商品获利。但在这种情况下，作者不能对使用这些程序所引起的错误结果负责，尽管作者已作了各种努力，证明了这些程序是正确的。

作者高兴地感谢E. Onate, H. H. Abdel Rahman, J. A. Figueiras, M. M. Huq, B. Suarez和Y. C. Hoe所作的贡献。

做秘书工作及描图等辅助工作的有M. Williams, E. Gower, J. Davies, D. Gabriel和A. McGairl。对他们的工作也表示感谢。

E. 欣顿

D. R. J. 欧文

1984年7月

目 录

前 言

第一章 简支MINDLIN板的闭式解法	1
§ 1 引言	1
§ 2 基本方程	1
§ 3 闭式解法	3
§ 4 板的刚度计算	5
§ 5 程序	9
§ 6 实例	27
参考文献	36
第二章 MINDLIN有限带条和轴对称壳的有限元分析	37
§ 1 引言	37
§ 2 用傅里叶级数求解的简支梁的分析	38
§ 3 用于分析矩形Mindlin平板的有限带条公式	40
§ 4 曲面折板分析	51
§ 5 弯曲板	57
§ 6 矩形平面折板	58
§ 7 轴对称壳体	60
§ 8 等效节点力矢量的计算	62
§ 9 用于折板和轴对称壳分析的Mindlin带条元素的节减积分族	64
§ 10 算例	64
§ 11 有限带条法的计算机计算过程	72
§ 12 用有限带条法分析直板或曲板的PBSTRIP程序	73
§ 13 实例	98
§ 14 例1的输入和输出数据	100
§ 15 例2的输入和输出数据	102
§ 16 程序PBSTRIP的输入数据说明	104
§ 17 主要变量名字汇编	107
参考文献	108
第三章 MINDLIN板有限元	111
§ 1 引言	111

§ 2	MINDLIN板理论回顾	111
§ 3	MINDLIN板元素	113
§ 4	MINDLIN板元素的理想特性	115
§ 5	HETEROSIS MINDLIN板元素	118
§ 6	MINDLIN程序	120
§ 7	MINDLIN程序的用户说明	153
§ 8	算例	155
	参考文献	168
	附录——波前法FRONT子程序	170
第四章	弹塑性和几何非线性各向异性板壳分析	177
§ 1	引言	177
§ 2	退化等参元	178
§ 3	非线性特性内容	194
§ 4	有限元计算程序	199
§ 5	数值算例	259
	参考文献	264
第五章	考虑几何非线性效应的钢筋混凝土板和壳体的极限载荷分析	269
§ 1	引言	269
§ 2	材料模拟	270
§ 3	有限元解法	275
§ 4	有限元计算程序	278
§ 5	数值计算实例	315
	参考文献	322
	附录——关于PLASTOSHELL和CONSHELL程序输入数据准备的用户说明	326

第一章 简支MINDLIN板的闭式解法^{*}

§ 1 引言

因为本书第二、三章内容将涉及到有限带条和Mindlin板的有限元分析,故在第一章中提出支持在Winkler弹性支承上的简支矩形平板的封闭形式解法是合适的。这些平板有正交各向异性特性,并考虑三种不同形式的受载条件,其它一些型式的平板能容易地包括到这些类型中去。这些解法将用于第二、三章,用来证明有限带条和有限元解的准确性。在本章第五节提供了一个称为PLATES的闭式解法程序。

为了能够研究多种截面平板,在第四节中叙述了下列平板的刚度计算方法:

- (a) 匀质各向同性板;
- (b) 夹层板;
- (c) 对称叠层板;
- (d) 空心板。

为了计算板的刚度,在第5节中还提供了称为RIGID的小程序,第6节中介绍了使用PLATES程序的一些例子。

§ 2 基本方程

Mindlin板理论^[1]允许有横向剪切变形效应,因此,在经典的克希霍夫薄板理论基础上提供了一种有吸引力的可选用的方法。其主要假设如下:

- (a) 与板的厚度相比,位移量较小;
- (b) 垂直于平板中面的应力忽略不计;
- (c) 变形前中面的法线在变形后仍保持直线,但可不垂直于中面。

由第三项假设,位移场可写成:

$$\begin{aligned}U(x, y, z) &= z\theta_x(x, y) \\V(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\W(x, y, z) &= W(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

式中 x, y 是平板平面内的直角坐标, z 是厚度方向坐标,自中面指向下为正; U, V, W 分别表示 x, y, z 方向的位移, w 是对应于中面的位移, θ_x 和 θ_y 分别表示由于弯曲,在 xz 和 yz 平面内的法线转角。

由于采用 $\sigma_z = 0$ 的假设, Mindlin板上一点特征点 (x, y, z) 处的基本方程式可表示为:

^{*} 作者为英国斯旺西大学土木工程系 E.欣顿

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ U_{,y} + V_{,x} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

或 $\underline{\sigma} = \underline{Q} \underline{\varepsilon}$

上式中 $Q_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ 是对应于平面应力状态 (即假设 $\sigma_z = 0$) 的减缩平面刚度, 并且

$$\begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{,x} + W_{,y} \\ U_{,x} + W_{,x} \end{bmatrix}^* \quad (2.3)$$

或 $\underline{\tau} = \underline{C} \underline{\gamma}$

应该注意, 用 (2.1) 式可将 (2.2) 和 (2.3) 式右边的应变写成:

$$\begin{bmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ U_{,y} + V_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\theta_{x,x} \\ z\theta_{y,y} \\ z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

或 $\underline{\varepsilon} = z \underline{\varepsilon}_f$

和

$$\begin{bmatrix} V_{,x} + W_{,y} \\ U_{,x} + W_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y + W_{,y} \\ \theta_x + W_{,x} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

或 $\underline{\gamma} = \underline{\varepsilon}_s$

Mindlin板的应变能可写成:

$$\begin{aligned} S, E &= \frac{1}{2} \iiint \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} dx dy dz + \frac{1}{2} \iiint \underline{\tau}^T \underline{\gamma} dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iint \underline{\varepsilon}^T (z^2 \underline{Q}) \underline{\varepsilon}_f dx dy + \frac{1}{2} \iint \underline{\varepsilon}_s^T \underline{D}_s \underline{\varepsilon}_s dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint \underline{\varepsilon}_f^T \underline{D}_f \underline{\varepsilon}_f dx dy + \frac{1}{2} \iint \underline{\varepsilon}_s^T \underline{D}_s \underline{\varepsilon}_s dx dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

板的基本方程可写成:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

或 $\underline{\sigma}_f = \underline{D}_f \underline{\varepsilon}_f$

以及

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_y + W_{,y} \\ \theta_x + W_{,x} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

或 $\underline{\sigma}_s = \underline{D}_s \underline{\varepsilon}_s$

$$\text{上式中 } D_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} Q_{ij} z^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.9)$$

$$S_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (2.10)$$

* 这里 $C_{ij} (i, j = 4, 5)$ 是相应的弹性常数。

注意对正交各向异性板 D_{16} , D_{61} , D_{26} 和 $D_{62}=0$ 。对匀质平板其 D_{ij} 和 S_{ij} 可用(2.9)和(2.10)式计算。夹层、迭层以及空心平板的公式在第4节中给出。(2.7)式中的弯矩可写成:

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-t/2}^{t/2} z(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \quad (2.11)$$

剪力可由下式表示:

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (2.12)$$

以上各式中 t 是板厚。

还应注意,在(2.7)(2.8)式中给出的合成应变分别是 x, y 方向的弯曲曲率 $\theta_{x,x}$ 和 $\theta_{y,y}$, 扭转曲率为 $(\theta_{x,y} + \theta_{y,x})$, 在 xz 和 yz 平面内的剪切角分别为 $(\theta_x + W, x)$ 和 $(\theta_y + W, y)$ 。

忽略体积力, 体积力矩和表面张力, 则支持在模数为 K 的Winkler弹性支承上的Mindlin板的平衡方程式可写成:

$$\begin{aligned} Q_{x,x} - Q_{y,y} + K_w &= 0 \\ M_{x,x} - M_{xy,y} - Q_x &= 0 \\ M_{xy,x} - M_{y,y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

上式中 Q 是法向压力, $(\cdot)_{,x}$ 表示 $\partial(\cdot)/\partial x$ 。

本章后面给出的闭式解法讲到具有尺寸为 a 和 b 的均匀厚度简支矩形平板, 其边界条件为:

$$\text{当 } x=0, a \text{ 时 } W = \theta_{x,x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{当 } y=0, b \text{ 时 } W = \theta_{y,y} = 0$$

将(2.7), (2.8)和(2.13)式联立, 则基本方程可表示为:

$$\begin{aligned} S_{55}\theta_{x,x} + S_{55}W_{,xx} + S_{44}\theta_{y,y} + S_{44}W_{,yy} + q + Kw &= 0 \\ D_{11}\theta_{x,xx} + D_{66}\theta_{x,yy} + (D_{12} + D_{66})\theta_{y,xy} - S_{55}\theta_x - S_{55}W_{,x} &= 0 \\ (D_{12} + D_{66})\theta_{x,xy} + D_{66}\theta_{y,xx} + D_{22}\theta_{y,yy} - S_{44}\theta_y - S_{44}W_{,y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

在闭式解法中可找到满足(2.14)和(2.15)式的函数 W , θ_x 和 θ_y 。另一种方法, 可能找到函数 W , θ_x 和 θ_y 使总位能最小。

$$\begin{aligned} \text{总位能} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [D_{11}(\theta_{x,x})^2 + D_{66}(\theta_{x,y} + \theta_{y,x})^2 + D_{22}(\theta_{y,y})^2 + 2D_{12}\theta_{x,x}\theta_{y,y} \\ + S_{55}(\theta_x + W, x)^2 + S_{44}(\theta_y + W, y)^2 + Kw^2 - qw] dx dy \end{aligned}$$

其边界条件见(2.14)。

§ 3 闭 式 解 法

§ 3.1 傅里叶系数计算

这里提出了一种由Dobyns[3]给出的闭式解法, 用来计算一种支持在Winkler弹性支承上的等厚度简支矩形板, 其尺寸为 a 和 b 。

$$\begin{aligned}\theta_x &= A_{mn} \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ \theta_y &= B_{mn} \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \\ W &= C_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)\end{aligned}\quad (3.1)$$

给出的载荷函数由下式表示:

$$q = q_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (3.2)$$

式中 q_{mn} 是傅里叶级数中的外载荷项。将 (3.1) 和 (3.2) 式代入平衡方程 (2.15) 中, 可得到矩阵等式

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

上式中 $P_{11} = D_{11}(m\pi/a)^2 + D_{66}(n\pi/b)^2 + S_{55}$

$$P_{12} = (D_{12} + D_{66})(m\pi/a)^2 (n\pi/b)$$

$$P_{13} = S_{55}(m\pi/a)^2$$

$$P_{22} = D_{66}(m\pi/a)^2 + D_{22}(n\pi/b)^2 + S_{44}$$

$$P_{23} = S_{44}(n\pi/b)^2$$

$$P_{33} = S_{55}(m\pi/a)^2 + S_{44}(n\pi/b)^2 + K$$

未知系数 A_{mn} , B_{mn} 和 C_{mn} 的求解按下式:

$$\begin{aligned}A_{mn} &= \frac{(L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13})q_{mn}}{\det} \\ B_{mn} &= \frac{(L_{12}L_{13} - L_{11}L_{23})q_{mn}}{\det} \\ C_{mn} &= \frac{(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)q_{mn}}{\det}\end{aligned}\quad (3.4)$$

上式中 $\det$ 为 (3.3) 式中矩阵的行列式。

现在就可以用下式求得板中任何点的位移量、曲率 (和由此用 (2.5) 式求得的弯矩), 以及剪力:

$$\begin{aligned}W &= \sum_m \sum_n A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ \theta_{x,x} &= - \sum_m \sum_n A_{mn} (m\pi/a) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ \theta_{y,y} &= - \sum_m \sum_n B_{mn} (n\pi/b) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} &= - \sum_m \sum_n (A_{mn} (n\pi/b) + B_{mn} (m\pi/a) \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)) \\ Q_x &= \sum_m \sum_n S_{55} (C_{mn} (m\pi/a) + A_{mn}) \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ Q_y &= \sum_m \sum_n S_{44} (C_{mn} (n\pi/b) + B_{mn}) \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)\end{aligned}\quad (3.5)$$

上式中 $\sum$ 表示 $m=1$ 到 ∞ 之和。

§ 3.2 载荷的傅里叶级数表示法

外载荷 $q(x, y)$ 的傅里叶系数由下式给出, 即

$$q_{mn} = (4/ab) \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) dx dy \quad (3.6)$$

因此, 对下列载荷可考虑为:

(a) 对均布载荷 $q(x, y) = q$ 有

$$q_{mn} = \begin{cases} = (4q/mn\pi^2)(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) \\ = (16q/mn\pi^2) & (\text{对于 } m, n = 1, 3, 5, \dots) \\ = 0 & (\text{对于 } m, n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (3.7)$$

(b) 对作用在 $x = \xi, y = \eta$ 处的集中载荷 q_{mn}

$$q_{mn} = (4p/ab) \sin(m\pi\xi/a) \sin(n\pi\eta/b) \quad (3.8)$$

(c) 在以坐标 $x = \xi, y = \eta$ 为中心的矩形面积 u, v 范围内, 作用总强度为 P 的均布载荷 q 有

$$q = (16p/\pi^2 mn uv) \sin(m\pi\xi/a) \sin(n\pi\eta/b) \\ \times \sin(m\pi u/2a) \sin(n\pi v/2b) \quad (3.9)$$

(d) 以坐标 $x = \xi, y = \eta$ 为中心的矩形小块 u, v 范围内, 作用有总强度为 P 的余弦分布载荷有 (见图 1)

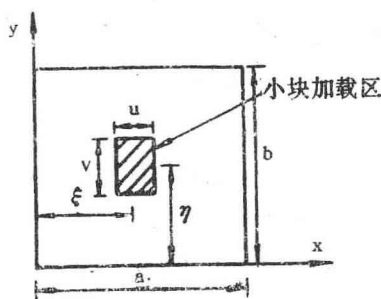
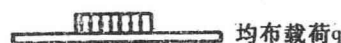


图 1 加载区的位置和形状

$$q = \begin{cases} = \frac{4Ps \sin(m\pi\eta/b) \sin(m\pi\xi/a) \cos(n\pi v/2b) \cos(m\pi u/2a)}{abu^2 v^2 (n/b - 1/v)(n/b + 1/v)(m/a - 1/u)(m/a + 1/u)} \\ = 0 & (\text{对 } n/b = 1/v, m/a = 1/u) \end{cases} \quad (3.10)$$

§ 4 板的刚度计算

本节中对板的刚度是分别按匀质各向同性板、夹层板、迭层板和空心板这几种情况计算的。在上述各种情况下, 都假定相对于 x, y 轴是正交各向异性的。

§ 4.1 匀质各向同性板

对匀质各向同性板只需确定三个常数——杨氏模量 E , 泊桑比 ν 和板厚 t 。因此, 板的刚度可写成:

$$\begin{aligned} (a) \text{ 弯曲刚度 } D_{11} = D_{22} &= Et^3/12(1 - \nu^2); \\ (b) \text{ 耦合刚度 } D_{12} = D_{21} &= \nu D_{11}; \\ (c) \text{ 扭转刚度 } D_{66} &= (1 - \nu) D_{11}/2; \\ (d) \text{ 剪切刚度 } S_{44} = S_{55} &= kEt/(2 + 2\nu). \end{aligned} \quad (4.1)$$

上式中 k 是“剪切修正系数”, 对匀质各向同性板通常取 $k = 0.83$ 。

§ 4.2 夹层板

夹层板的等效板刚度可由下式得到

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} Q_{ij} z^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ S_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} C_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (4.2)$$

对于面板厚度相等且材料性质相同的夹层板（如图 2 所示），不存在弯曲-拉伸耦合效应。由各向同性材料面板和芯子组成的夹层板的弹性刚度计算如下（夹层板的面板和芯子对每种刚度都有影响）。

$$(a) \text{ 弯曲刚度 } D_{11} = D_{22} = D = [D_{11}]_c + [D_{11}]_f \quad (4.3)$$

$$(b) \text{ 耦合刚度 } D_{12} = \nu_c [D_{11}]_c + \nu_f [D_{11}]_f \quad (4.4)$$

$$(c) \text{ 扭转刚度 } D_{66} = (1 - \nu_c) [D_{11}]_c / 2 + (1 - \nu_f) [D_{11}]_f / 2 \quad (4.5)$$

(d) 剪切刚度

$$S_{44} = S_{55} = S = [S_{44}]_c + [S_{44}]_f \quad (4.6)$$

图 2 中 r 和 t 分别是芯子的高度和面板的厚度。 E_c 和 E_f 分别是芯子和面板的弹性模量， ν_c 和 ν_f 分别是芯子和面板的泊桑比。 c 和 f 分别代表芯子和面板。于是，夹层板的弯曲刚度可写成

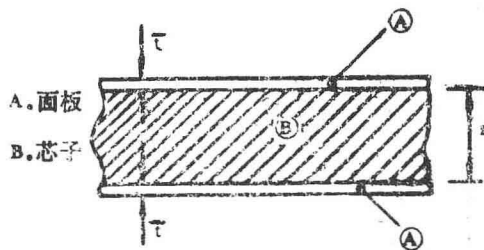


图 2 夹层板

$$D = \int_{-r/2}^{r/2} \frac{E_c z^2 dz}{2(1 - \nu_c^2)} + \int_{-r/2+t}^{r/2+t} \frac{E_f z^2 dz}{2(1 - \nu_f^2)} + \int_{-r/2-t}^{-r/2} \frac{E_f z^2 dz}{2(1 - \nu_f^2)} \quad (4.7)$$

剪切刚度可写成：

$$S = \int_{-r/2}^{r/2} G_c dz + \int_{-r/2+t}^{r/2+t} G_f dz + \int_{-r/2-t}^{-r/2} G_f dz \quad (4.8)$$

$$\text{上式中芯子的剪切模量是 } G_c = E_c / (1 + \nu_c) \quad (4.9)$$

$$\text{面板的剪切模量是 } G_f = E_f / (1 + \nu_f) \quad (4.10)$$

计算 S 通常忽略 $[D_{11}]_c$ 对 D_{11} 等的影响，即忽略 $[S_{44}]_f$ 对 S_{44} 等的影响。因此

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E_f t (r^2 + 2rt + 4t^2/3)}{2(1 - \nu_f^2)} + \frac{E_f t (r + t)^2}{2(1 - \nu_f^2)} \quad (4.11)$$

$$S_{44} = S_{55} = G_c r \quad (4.12)$$

§ 4.3 叠层板

由 m 个分层组成的叠层板的刚度值已可用公式 [5] 算出。典型的叠层板示于图 3。对每个分层通常要用到下列数据：

(a) E_{11} , E_{12} —— 分层 1, 2 主向的弹性模量；

- (b) ν_{12}, ν_{21} ——1-2平面内的泊桑比;
 (c) G_{12} ——1-2平面内的剪切模量;
 (d) G_{31}, G_{23} ——分别为3-1和2-3平面内的横向剪切模量;
 (e) $(h_{k+1} - h_k)$ ——第 k 分层的厚度。

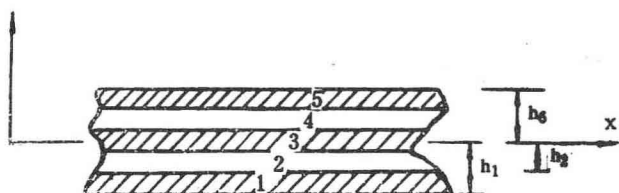


图3 典型叠层板的符号规定

于是, 弯曲刚度可由下式给出。

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{k=1}^m \int_{h_k}^{h_{k+1}} \overline{Q}_{ij}^k z^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ &= \sum_{k=1}^m \overline{Q}_{ij}^k (h_{k+1}^3 - h_k^3) / 3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

剪切刚度由下式给出:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{k=1}^m \int_{h_k}^{h_{k+1}} \overline{C}_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \\ &= \sum_{k=1}^m \overline{C}_{ij} (h_{k+1} - h_k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

上两式中 $\overline{Q}_k$ 是经坐标转换后的平面刚度系数, 对应于每个分层的平面应力。分层的主向是 1, 2 方向, 示于图 4。因此在计算 D_{ij} 之前, 需把坐标系由 1-2 方向转成 x - y 方向。

系数 $\overline{Q}_k$ 可由下面给出的 Q_k 矩阵得到

$$\overline{Q}_k = \underline{T}^{-1} \underline{Q}_k \underline{T} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^k & \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{16}^k \\ \overline{Q}_{12}^k & \overline{Q}_{22}^k & \overline{Q}_{26}^k \\ \overline{Q}_{16}^k & \overline{Q}_{26}^k & \overline{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

上式中

$$I = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

上式中 $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$, 则对应于平面应力的转换后的平面刚度系数可写成

$$\underline{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix}$$

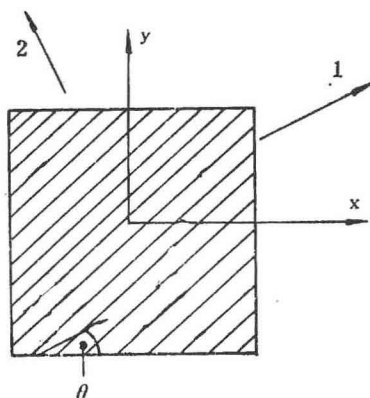


图4 铺层主向

$$Q_{11}^k = E_{11}/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{22}^k = E_{22}/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{12}^k = Q_{21}^k = \nu_{21}E_{11}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_{22}/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$Q_{66}^k = G_{12}$$

因此, $\overline{Q}_k$ 的分量可写成

$$\overline{Q}_{11}^k = Q_{11}^k C^4 + 2(Q_{12}^k + Q_{66}^k) C^2 S^2 + Q_{22}^k S^4$$

$$\overline{Q}_{22}^k = Q_{11}^k S^4 + 2(Q_{12}^k + Q_{66}^k) C^2 S^2 + Q_{22}^k C^4$$

$$\overline{Q}_{12}^k = (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 2Q_{66}^k) S^2 C^2 + Q_{12}^k (S^4 + C^4)$$

$$\overline{Q}_{66}^k = (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 2Q_{12}^k - Q_{66}^k) S^2 C^2 + Q_{66}^k (S^4 + C^4)$$

$$\overline{Q}_{16}^k = (Q_{11}^k - Q_{12}^k - Q_{66}^k) C S^3 + (Q_{12}^k - Q_{22}^k + Q_{66}^k) C^3 S$$

$$\overline{Q}_{26}^k = (Q_{11}^k - Q_{12}^k - Q_{66}^k) S^3 C + (Q_{12}^k - Q_{22}^k + Q_{66}^k) S C^3 \quad (4.16)$$

在 (4.14) 式中给出的剪切刚度系数矩阵 $\overline{C}_k$, 只要简单地通过 C_k 矩阵适当转换得到, 关系式如下

$$\overline{C}_k = \underline{R}^{-1} \underline{C}_k \underline{R} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{44}^k & \overline{C}_{45}^k \\ \overline{C}_{45}^k & \overline{C}_{55}^k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

上式中

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_{44}^k = C_{44}^k C^2 + C_{55}^k S^2$$

$$\overline{C}_{55}^k = C_{44}^k S^2 + C_{55}^k C^2$$

$$\overline{C}_{45}^k = (C_{55}^k - C_{44}^k) SC$$

注意

$$C_{44}^k = G_{31}$$

$$(4.18)$$

$$C_{55}^k = G_{23}$$

注意剪切修正系数也可用来计算迭层板——见参考资料[5]

§ 4.4 空心板

由Basu和Dawson[6] 提出的用于空心板刚度计算的公式总共有下列几种, 空心板型式如图5所示。

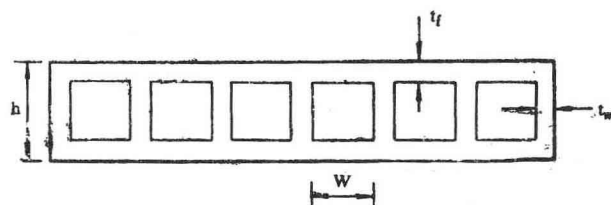


图5 空心板剖面

$$(a) \text{ 横向弯曲刚度 } D_{11} = \frac{Et_f h^2}{2(1-\nu^2)} \quad (4.19)$$

(注意, 仅考虑突缘弯曲刚度)

$$(b) \text{ 纵向弯曲刚度 } D_{22} = D_{11}[1 + (t_w h / 6 t_f w)] \quad (4.20)$$

(注意, 同时考虑了突缘和腹板的弯曲刚度);

$$(c) \text{ 耦合刚度 } D_{12} = D_{21} = \nu D_{11} \quad (4.21)$$

$$(d) \text{ 扭转刚度 } D_{66} = G t_f h^2 / 2 \quad (4.22)$$

[注意, 如果有足够的单格数 (正交各向异性板理论要求有4个或者更多些), 这些单格是相同的或几乎相同的, 则在计算多格板扭转刚度时, 内部腹板的影响可以忽略。因此空心板的扭转刚度等于沿闭室外面周边形成的刚度, 写成 $G t_f h^2$ 。]

$$(e) \text{ 横向剪切刚度 } S_{44} = \frac{2Et_f^3}{W^2[1 + 2(h/w)(t_f/t_w)^3](1-\nu^2)} \quad (4.23)$$

横向剪切刚度 S_{44} 是在弯曲时由板横截面上的突缘和腹板提供的, 就像空腹梁 (Vierendeel girder) 情况一样, 假设成在垂直腹板之间的突缘内存在抗弯曲的点。

(f) 纵向剪切刚度

$$S_{55} = G t_f h (1 + t_f / h) (t_f w / t_w) \quad (4.24)$$

式中 t_f ——缘条厚度

t_w ——腹板厚度

h ——上下缘条中心之间的距离

w ——腹板间距

a ——板厚

纵向剪切刚度 S_{55} 是基于这样的假设得到的: 垂直剪切力由腹板单独承受, 腹板上剪应力分布均匀。

§ 5 程 序

本节介绍两个子程序:

(a) PLATES程序, 用来求第3节中描述过的简支矩形Mindlin板的闭式分析解;

(b) RIGID程序, 用来计算均匀各向同性板、夹层板、叠层板及空心板的刚度 D_{11} , D_{12} , D_{22} , D_{66} , S_{44} 及 S_{55} 。

§ 5.1 PLATES板程序

本节介绍PLATES程序, 它完成板的闭式分析。该程序由一个主程序和六个子程序*组成, 如图6所示, 现将子程序简述如下:

MASTER是主程序, 它依次调用其它所有子程序。

DATA子程序读入所有输入数据。

* 译者将原文误写的五个子程序改成六个, 并补加了SUM子程序的说明