基础数学的元数学

Erwin Engeler 著
宋方敏 译

南京大学出版社

基础数学的元数学

Erwin Engeler 著
宋方敏 译

南京大学出版社
1995 · 南京

(苏)新登字 011 号

内容简介

本书探讨经典基础数学中心结构的基础，它论述的主题是实数、欧氏几何和算法的公理化问题。本书对一些数学基础问题的历史来源及其最初的解决方法作出详细的解释，书中所举例子也很有启发性。本书的目的是启发和提高读者对数学的评估能力。

本书可供大专院校数学系师生以及有关研究人员阅读。

基础数学的元数学
Erwin Engeler 著
宋方敏 译
*
南京大学出版社出版
(南京大学校内 邮政编码：210093)
南京豪利电脑技术公司激光照排
江苏省新华书店发行 南京前进印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：3.625 字数：91 千
1995 年 10 月第 1 版 1995 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—1000
ISBN 7－305－02827－4/O・98
定价：6.00 元

著者为中文版写的序言

本书的德文版大约问世于十年前，它来源于我在 ETH 多年来周期开设的一门课程的讲义。在这十年间，俄文和英文的翻译工作已着手进行，现在南京大学的宋方敏博士完成了本书的中文翻译。我十分幸运找到这样一位译者，使得德文原著被译成一种新语言，对他的数学修养、对语言的理解以及无私的奉献表示衷心的感谢。

本书不打算讲授逻辑及其公理系统，也不打算综述所谓“高观点下的基础数学”，它旨在唤醒学生们在某些方面的评估能力以及帮助其建立牢固的基础。经数年的数学训练以及化数年于分析学的系统中，学数学的学生却令人遗憾地认同这样的观点：他们知道什么是实数、欧氏空间和算法就足够了。

对历史悠久教学法的批评并不否定数学中普遍认可的那些有用性和必要性成份。我强烈反对的是想象力的缺乏，它使许多学生在盲目接受和不加思索的趋势下学习数学的基本方法和概念。为了对抗这样的趋势，数理逻辑建立了一个技术环境，在其中人们可以进行有说服力的批评。本书标题术语“元数学”即指这样的评估方法，而“基础数学”指被评估的主要领域：分析学、几何学和算法学。

一句话：人们如何到达基础数学的公理系统以及当拥有它们之后我们得到了什么？

E. Engeler 1992 年 9 月于苏黎世

著者序言

本书是根据我在 ETH 多年使用的讲义著写的，它不完全是一本教程。本书面向中高年级大学生，它的主要目的并不是讲授数理逻辑而是激发和加强学生们对数学的评估能力。由于我们的教学方法，大学生们化许多时间去学习代数和几何的技巧以及大量的分析系统，这样使得几乎所有的人都有这样的感觉：只需要知道什么是实数、什么是函数、什么是欧氏空间以及什么是算法就足够了。我不反对把实用性和必要性引入数学，但我反对缺乏想象力的数学趋势，即不加思索地接受基本概念和基本技巧。在本书中，我将阐述 20 世纪的数理逻辑对数学基础进行的系统的评估，本书标题术语“元数学”指研究分析学、几何学和算法学这些“基础数学”的方法学。一句话：人们是怎样进入基础数学的公理系统的而且希望从中获得什么呢？

对于本书的出版，我衷心感谢负责文字工作的 Brigitte Knecht 先生和负责图象工作的 Ernst Graf 博士。

E. Engeler 1982 年 5 月于苏黎世

目　录

第一章　连续统

第一节　什么是实数

大约 100 年前，Dedekind 是苏黎世联邦工学院(ETH)的数学教授．他在讲授微积分学这门课时描述了他是怎样面临着分析基础问题．后来他写出至今读来仍然有趣的《什么是而且什么应该是数》，在其中反映出他对分析基础问题的创造性的处理方法．

现在 Dedekind 的处理方法是众所周知的，它由连续统算术化规划组成，即把分析的基本概念化归于有关自然数的概念．这样，证明存在可作为分析基础的数学结构应是不容置疑的，且在分析中需要的连续统的所有性质应由此构造而得．

Q 的构造的直觉思想是把整分数$\frac{a-b}{c}$表示成三元组$\langle a,b,c\rangle$以及相应地表示出加法、乘法、序的运算规则．而 R 的构造取决于完全性的直觉概念，我们将在下面第二节中讨论完全性．事实上，此概念是对于每个连续函数的每次变号总存在一个实数使得此函数在此取值为零．因此数的概念依赖于函数．这样的想法已隐含于 Dedekind 的题为“连续性和无理数”的文章中(1872)．

Dedekind 规划的主要缺点是不纯：构造不只是利用自然数以及定义于自然数之上的运算和关系如加法、乘法和序，而且还利用

"更高"层次的概念,如(自然数)集合.此构造本身不是算术的,而是集合论的.但是无疑地集合论比连续统本身更远离直觉,对于连续统我们几乎可以想象,这样有理由表明 Dedekind 规划并没有回答本节标题所提出的问题.

数学家可以采用这样的观点:实数从何而来与他无关,他感兴趣的是实数的性质.换言之,从研究分析的基础中他所期望得到的是一个公理化和一系列的实数性质,由此通过纯逻辑导出分析的所有定理.

Dedekind 的连续统算术化(概要)

(a) $\mathbf{N}=\langle N,0,1,+,\cdot,\leqslant\rangle$ 满足 Peano 公理:

(i) $0\neq x+1$,对所有 $x\in N$.

(ii) 若 $x+1=y+1$,则 $x=y$,对所有 $x,y\in N$.

(iii) 若 $M\subseteq N$ 且 $M\neq\varnothing$ 则 M 对于 $\leqslant$ 具有最小元.

(iv) 当有 $z\in N$ 使 $x+z=y$ 时,恰有 $x\leqslant y$.

(v) 加法和乘法满足递归方程

$$x+(y+1)=(x+y)+1,\qquad x+0=x$$

$$x\cdot(y+1)=x\cdot y+x,\qquad x\cdot 0=0$$

(b) $\mathbf{Q}=\langle Q,0,1,+,\cdot,\leqslant\rangle$ 是一有序域,这里 Q 本身是三元组 $\langle a,b,c\rangle\in N^3\,(c\neq 0)$ 的等价类组成的集合而此等价关系定义为 $\langle a,b,c\rangle\equiv\langle a',b',c'\rangle$ 当且仅当 $ac'+b'c=a'c+bc'$. 加法定义 $\langle a,b,c\rangle+\langle a',b',c'\rangle:=\langle ac'+a'c,bc'+b'c,cc'\rangle$,乘法定义为 $\langle a,b,c\rangle\cdot\langle a',b',c'\rangle:=\langle aa'+bb',ab'+ba',cc'\rangle$. 零是 $\langle 0,0,1\rangle$ 的等价类;壹是 $\langle 1,0,1\rangle$ 的等价类,序的定义:$\langle a,b,c\rangle\leqslant\langle a',b',c'\rangle$ 当且仅当 $ac'+b'c\leqslant a'c+bc'$.

(c) $\mathbf{R}=\langle R,0,1,+,\cdot,\leqslant\rangle$ 是一完全有序域;R 由 Dedekind 分割组成,分割即为非空子集 $S\subseteq Q$ 使 $S\neq Q$,S 无最大元且若 $x\in S$ 且 $y\leqslant x$,则 $y\in S$.

加法　$S+T=\{x+y \mid x\in S, y\in T\}$

零　$0=\{x\in Q \mid x<0\}$

壹　$1=\{x\in Q \mid x<1\}$

序关系　$S\leqslant T$ 当且仅当 $S\subseteq T$

人们可以把乘法定义成

$$S\cdot T=\{x\cdot y \mid x\in S, y\in T\}$$

然而它会导致一些可克服的困难(习题).

本世纪初,Hilbert 作出这样的一个公理化:全体实数被刻划成一个完全有序域,即为一有序域其中每个有序集有最小上界.这就是所要求的一切,因为可以证明相对于同构而言仅存在一个完全有序域.用术语说,此公理化是范畴的.我们推迟到以后再证明这个事实(因为实际上 Hilbert 原先的公理化不同于以上所概要的,但它们是等价的).Hilbert 把全体实数刻划成一个有序域其是 Archimedes 域而且是极大的(一个域是 Archimedes 域指任何一个正数在自加足够的次数后以致于能大于任何先给定的正数.它是极大的指任何此域的扩展将不是 Archimedes 域).事实上,这仅是范畴性证明的分析,从而导致公理的最后形成.

这样的公理化方法还有许多不尽人意之处.基本上,它对所谓的算术化提出与前相同的异议.问题在于这些公理不只参照于基本的代数运算和序关系如+、·、≤等以及被刻划域的元素,而又参照于一些高层次概念如:“有界集”之类.以 Archimedes 公理为例:“给定 $a,b>0$,存在正整数 n 使 $a\cdot n>b$”,人们可以认为自然数理论能被预设于任何公理化中,但在此情形我们应该声明:自然数公理可从公理化中省去仅仅是这样的约定——我们认为它们是不言而喻地含在公理化中的.

因此我们应该加入某种形式的 Peano 公理,特别是:“对任何自然数集合,若它含 0 以及对每个元素 n 含 $n+1$,则它是所有自然数的集合”.这里我们又遇到集合,然而我们这样做并没有公理

化这样的框架从中我们已借用了集合论概念.现在人们可以公理化集合论的一部分,即在论述中需要的那些部分,而且断然作出约定——这些公理被不言而喻地当作任何公理化的内容.

这样的约定实际上意味什么呢?集合论的公理基础本身不会引起争论吗?当然不(以下对此有更多的讨论),这样我们必须后退到一个更适当的位子.为了建造这样的避难所,在以下的几节中我们将利用形式化数学的技巧.

构造主义者说:你们为分析提供集合论基础时有困难是不奇怪的.实无穷不是我们直觉的部分,我们没有它们性质的直接感觉.

· 无穷集可以被看作一种人类共识的柏拉图概念,对此我们也许已在一个我们已经不幸地背离的乐园中遇见过,这是糊涂本体论.这样讨论连续统就像讨论独角兽或复活节兔子一样(我们能够同意它们的某些特征,但比起其他东西要少).

· 公理集合论从技术上来说作为数学的根本基础是充分,但是它趋向于回避基础问题,特别是悖论,而不是去解释它们.进一步说,这样的回避是颇为不成熟的,困难的唯一来源是'悖论'集合的大小并不是可信的.

· 甚至通常的数学推理方法不再是信服的;应用于无穷全体上的排中律特别值得怀疑.当数学陈述被解释为关于某个存在东西的描述"这是某某事物……"时,古典逻辑推理才有意义;对无穷对象进行古典推理是否总有意义也是有疑问的.更确切地说,数学陈述应该用来指:"我有一构造,它为……的证明."

我们应该怎样对这个古典数学的抨击作出反应呢?

1. 采用不回答的方式:你们是对的,无穷集合的确不存在而且我的逻辑可能是不可靠的.但是我不介意,我能证明结果而且能从应用中获得生存.这样让我得以进行和"冒充".在任何情况下,关于存在和构造能力的问题属于应用数学的领域,而且放在那里的确很好吗?在最坏的情况下,我能采取这样的态度:数学仅仅是

形式的、符号的活动.

2. 大多数数学家作出实用主义的回答：

· 对古典数学的怀疑似乎比古典数学本身更不具体. 通常关于无穷的结论对于明智的数学家来说是颇为信服的. 事实上，在任何可能之处消去无穷概念的试图并不增强我们对这些结论的信服. 无论怎样，经验表明有穷主义的形式证明趋于导出计算性结论但难以被发现；概念的证明，甚至它们用到无穷概念，提供更多的见识而且是更加信服的.

· 进一步说，如果在某处出现矛盾，则此发现不是灾难，正相反它使古典数学更加有兴趣和更加成熟.

· 最后，所有关于数学基础的各种理论事实上能够在古典数学本身进行讨论. 这种广泛性能使它们特别有吸引力，让我们明智地把这些东西保留原样，直至受到更好的广泛承认.

3. 鼓励性的回答：我能很好地想像出有人会被产生的问题大吃一惊，但似乎对我来说这些问题应作为进一步研究的路标.

4. 反击也是回答：正如已指出的那样，无疑，在构造观点下的每个精确的陈述也有弱点.

在进一步讨论这些问题时，我们应该强调这里对各种观点立场的叙述是极其表面的. 为精确它们，我们把讨论推迟到有足够的材料以供我们利用之时，这里我仅仅提及关于基础的很少材料以供进一步阅读.

参考文献

Dedekind, R.: "*Stetigkeit und irrationale Zahlen*", 1872, *in R. Friche, E. Noether, O. Ore*: "*Dedekind gesammelte mathematische Werke*", *Band* 3, *S*. 315 — 334. *Braunschweig*, *Vieweg*, 1932.

Dedekind, R.: "*Was sind und was sollen die Zahlen?*" 1887, *in*: *R. Friche, E. Noether, O. Ore*: "*Dedekind gesammelte mathematische werke*", *Band* 3, *S*. 335 — 391. *Braunschweig*, *Vieweg*, 1932.

Hilbert, D.: "*Ueber den zahlbegriff*", *zu finden im Anhang VI der "Grundlagen der Geometrie"*, 7. *Auflage*, *Stuttgart*, *Teubner*, 1930.

Hilbert, D.: "*Ueber das Unendliche*", *Mathematische Annalen*, *Band* 95, *S.* 161—190, (1926).

Brouwer, L. E. J.: "*Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*", 1923, *in*: *A*: *Heyting*: "*L. E. J. Brouwer collected works*", *Band* 1, *S.* 246—267. *Amsterdam*, *North—Holland*, 1975.

Brouwer, L. E. J.: "*Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, *I*, *II* & *III*", 1925—1927, *in*: *A*: *Heyting*: "*L. E. J. Brouwer collected works*", *Band* 1, *S.* 301—314, 321—340, 352—389. *Amsterdam*, *North—Holland*, 1975.

Bernays, P.: "*Sur le Platonisme dans les Mathématiques*", *L'Enseignement Mathématiques* 34 (1935), *englische Uebersetzung in P. Benacerraf* & *H. Putnam*: "*Philosophy of Mathematics*, *selected readings*", *S.* 274 — 286, *Englewood Cliffs*, *Prentice—Hall*, 1964.

Weyl, H.: "*Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik*", *Mathematische Zeitschrift*, 10, *S.* 39 — 79, (1921), *auch in* "*Selecta Hermann Weyl*", *S.* 211—248, *Basel* & *Stuttgart*, *Birkhäuser Verlag*, 1956.

第二节　语言作为数学的部分

现代逻辑的存在归功于一个宏大的理想——Leibniz 的理想. 在展现它之前,先讲叙一些历史.

在 Leibniz 生活的时代，现代数学的记号法已开始在代数和分析取得成就. Leibniz 本人对这些发展曾作出重大的贡献，例如，他引入了至今仍然使用的微分和积分记号. 而且他也深知这种发展的重要性：现代数学应该把它的空前成功归功于抽象. 正是记号法把数学家从数学符号的内容中的解脱出来并允许他们从字面上进行抽象计算. 在 Leibniz 时代，古希腊的公理几何学再次复兴和繁荣. 公理—定理—证明—定义—定理—证明—……这种演示影响了哲学的广泛领域. 例如，考察 Baruch Spinoza 的 Ethica, ordine geometrico demonstrata 这个伦理学正是以几何的方式来处理的.

Leibniz 设想：构作一些数学证明的规则使得人们利用这些规则可以不再理会正在运算的表达式的意义，这不应该是可能的吗？所需要的是一个演算推理器，在这样的演算中形式计算替代了自然推理，从而证明本身成为数学对象，这样的演算的前提是有一个可利用的符号体系，在这个符号体系中数学的公理、定理和定义均能被表示. Leibniz 旨在构造这样的形式语言符号体系，即著名的 characteristica universalis. 然而尽管有 Leibniz 这样的天才，当时现代逻辑的发展仍不成熟，因此他没有完成这项工作，这是不幸的但又是不可避免的. 这样为由计算(对应于 Leibniz 的 motto calculemus) 解答所有数学问题提供框架的形式语言依然是个理想.

直到20世纪，人们才沿 Leibniz 指引的方向取得重要进展. 从历史来看，此情形与 Leibniz 时代的情形相似. 然而这里有 Dedekind 和 Cantor 的工作其旨在把整个数学化归于集合论，也有 Boole, Peano, Peirce 和 Schröder 的工作其为思维规律引入基本的数学符号体系. 这些工作在形式化的能力方面激发出无穷的乐观主义. 在现代逻辑演算的形态中，在 Frege, Russell, Whitehead, Hilbert, Bernays, Gödel, Church 这些一流数学家的手下，形式化达到一个严格的更高层次。作为结果，现在有可能把语言说成是数学的部分以及来讨论实现 Leibniz 理想的可能性和可行性.

现代逻辑的符号体系

命题逻辑是讨论不再进一步分析的基本命题. 借助于基本联结词$\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\supset$, $\equiv$, 命题可被组合成复合命题.

类逻辑的原始概念是关于性质的命题：$A(x)$, 对象 x 有性质 A.（具有性质 A 的 x 的全体能被作为一个整体，即类 A. 这时利用联结词在命题上进行的运算对应于相应类上的所谓的布尔运算）.

关系理论在原始命题上加入关于对象之间关系的断论：$A(x,y)$, $B(x,y,z)$, …；尽管语言是形式的，但实际意义常用习惯的数学记号（如 $x\leqslant y$, $x\in y$, …）来展示.

谓语演算又引入断言的量化，使用记号$\exists x$, $\forall y$. 至此就结束我们对符号体系的描述. 我们期望读者熟知这些记号及其意义且在较少程度上熟知谓词演算的主要结果.

上面提及的对形式化的乐观主义激励一些天才数学家付出巨大的努力和耐心去取得成果. 例如 Whitenead 和 Russell 的 Principia Mathematica（1910—1913），Peano 的 Formulaire de mathematique（1894—1908），还有一些工作成为后人遵照的样板，如 Frege 的 Begriffsschrift（1897）和 Grundgesetze der Arithmetik（1893—1903）. Frege 在 Grundgesetze 中试图把整个数学化归于逻辑，通过把性质恒同于概念外延使之成为可能. 概念的外延含在 Frege 论域的对象中. 取代于："a 为 B"或简记 $B(a)$，人们把性质 B 的外延当作一个对象 b，并且称"a 在 b 中"或形式地写为 $a\in b$. 至于哪一个外延允许作为对象却是由形式语言的选择所决定的. 这种式样的语言是一个仅仅带有概念…为…，即两元谓词符$\in$的谓词逻辑的语言，而且不带有其它非逻辑谓词. 相等性不是此语言的原始概念而是定义的：如果对象是不可分辨即它们恰好属于相同的外延，那么它们是相等的. 因此 x 等于 y 恰当 x 在 y 所属的那些 z 中. 由于 Frege 的 Begriffsschrift 的形式体系颇为复杂，故

我们将用现代记号重写此系统. 在1902年6月,Russell 写信给 Frege 指出他的系统是矛盾的(这封信值得一读). 因此通过恒同集合和性质这两个概念而把数学化归于逻辑是不成功的.

纯粹思维的 Frege 演算(现代记号)

语言和逻辑:不带等词的谓词演算,变元 $x,y,z,\cdots$,谓词符 $\in$.

定义:$x=y\equiv_{def}\forall z(x\in z\equiv y\in z)$

公理:(i)外延性 $\forall x\forall y(\forall z(z\in x\equiv z\in y)\supset x=y)$

(ii)类构造 $\exists y\forall x(x\in y\equiv A(x))$,对于任何只有 x 作为自由变元的公式 $A(x)$.

(i)和(ii)使记号 $\{x|A(x)\}$ 合法化.

Russell 悖论:考虑对象 $R=\{x|x\notin x\}$;$R\in R$ 与 $R\notin R$ 皆不成立——矛盾.

Frege 的处理方法所遭遇的问题致使基础研究受挫. 苏黎世教授 Zermelo 是第一个给出令人满意的公理化的数学家. 补充替换公理之后,Zermelo 的公理化系统是两个广为接受的数学逻辑基础之一. 另一个系统由 Bernays 给出,它也是苏黎世的产物.

让我们回到主题:什么是实数?我们将给出两个公理化系统,一个是以代数观点实现的,而另一个偏向分析观点. 两个系统皆利用一阶谓词演算. 这里的形式语言不再象 Frege 所做的那样用来生成全域而只是刻划它. 这就是说,结构被认为是给定的而且其目的是阐述它的特征性质. 全体实数被刻划成一个完全有序域.

实数的基本理论

$\mathbf{R}=\langle R,\leqslant,+,\cdot,-,^{-1},0,1\rangle$

语言和逻辑:

带等词的一阶谓词演算.

个体变元：$x, y, z, \cdots$

个体常元：0，1.

函数符：$+, \cdot$（二元）；$-, {}^{-1}$（一元）.

基本谓词：$\leqslant$（二元）.

公理：

（i）域公理.

（ii）序公理：

$x \leqslant x, x \leqslant y \wedge y \leqslant x \cdot \supset x = y,$

$x \leqslant y \wedge y \leqslant z \cdot \supset x \leqslant y, x \leqslant y \vee y \leqslant x,$

$x \leqslant y \supset x + z \leqslant y + z;$

$z \geqslant 0 \wedge x \leqslant y \cdot \supset x \cdot z \leqslant y \cdot z$

（iii）完全性公理：对于任何只以 x 为自由变元的公式 $A(x)$，我们有

$\exists xA(x) \wedge \exists b \forall x(A(x) \supset x \leqslant b) \supset \cdot$

$\exists b[\forall x(A(x) \supset x \leqslant b) \wedge \forall c(\forall x(A(x) \supset x \leqslant c) \supset b \leqslant c]$

对公理组（i）和（ii）无需进一步解释，但关于完全性公理还要补充说明. 首先在数学观念的历史中，完全性概念已起着特别有趣的作用. 其次问题在于我们已经给出的形式化在何种程度上获得原先集合论完全性公理的“全部内容”. 让我们先来讨论这个问题.

现在可供使用的形式语言并没有提供任何方法去把集合当作论域中的个体处理. 为了能够处理集合，我们借用一个 Frege 的概念而且从元理论把集合当作谓词的外延引入（但没有采用模糊方式来给出这些外延描述的整体的个体形态）. 取代于论及集合，我们论及定义这些集合的性质，特别是那些个体（实数）的性质其可被表示于已经给出的语言中. 例如，断言“具有性质 $A(x)$ 的实数 x 所成集合是非空的”被简单地表示为$\exists xA(x)$；上界的存在性可被表示为$\exists b \forall x(A(x) \supset x \leqslant b)$，等等. 就是使我们能像上面那样表

示完全性公理，此公理达不到“全部”集合论完全性公理的程度问题现在实际上是什么样的集合族可由性质 $A(x)$ 定义，答案将在第三节中给出.

没有一个概述能替代对原始文献的研究，下面对完全性概念历史的注解也不例外(参考文献中列出一些优秀的原版文章的文集). 在希腊数学中，数的概念与测度紧密相连. 给出有理数的目的是满足哲学家特别是毕达哥拉斯学派的需要. 无理数 $\sqrt{2}$ 的发现和化圆为方的问题激励了可度量性数学的发展，这也是古代人们最壮丽的惊人的现代性创造. 这是由 *Eudoxus* 做的且能在欧几里德的第五本书中找到它. 我们把一个陈基米德量值系统刻划成一个满足陈基米德公理的线性有序阿贝尔半群且以现代记号表达如下：

阿基米德度量系统

所述系统：$G=\langle G,\leqslant,+\rangle$

定义：对于 $n\in\{1,2,3,\cdots\}$ 令 $n\cdot a=_{def}a+\cdots+a$ (n 个 a)

公理：

(*i*)带相对补的阿贝尔半群：

$x+y=y+x,(x+y)+z=x+(y+z)$

$x+y\neq x,x\neq y\cdot\supset\exists\ z(x+z=y)\vee\exists\ z(x=y+z)$

(*ii*)序公理：

$x\leqslant x,x\leqslant y\wedge y\leqslant x\cdot\supset x=y$

$x\leqslant y\wedge y\leqslant z\cdot\supset x\leqslant z,x\leqslant y\vee y\leqslant x,$

$x\leqslant y\supset x+x\leqslant y+z$

(*iii*)阿基米德公理：$\forall\ x\forall\ y\exists\ n(x\leqslant n\cdot y)$

正整数、正有理数和正实数显然构成阿基米德度量系统. 限制为正数是合理的，因为这些数是作为度量大小的. 我们将在以后对阿基米德公理的“不纯形式”加以注解. 接下来 Eudoxus 和 Euclid 阐述在度量系统中定义的序和加法怎样以一种直接的方式被扩展