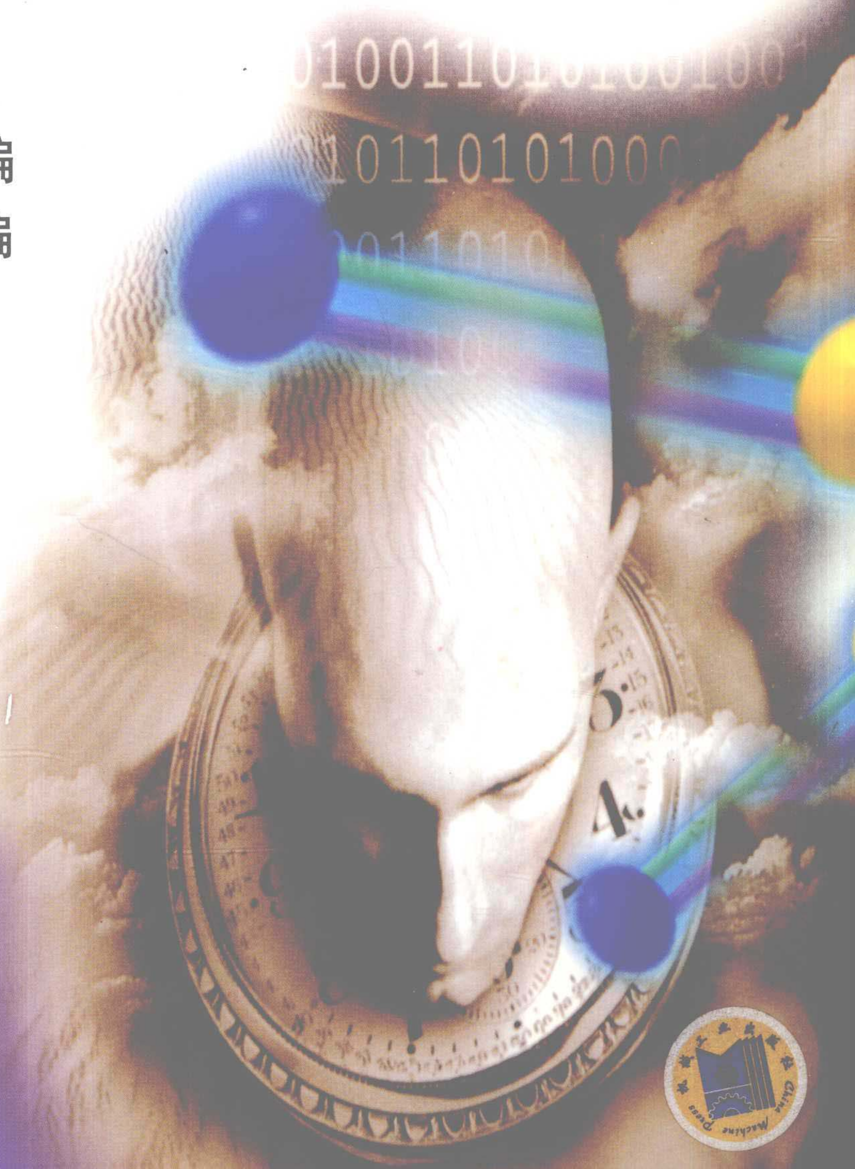
高职高专机电工程类规划教材

高等数学

刘贵濂 主 编
谭惠燕 副主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专机电工程类规划教材

高 等 数 学

主　编　刘贵濂
副主编　谭惠燕
参　编　（以姓氏笔划为序）
田俊刚　吴静　黄国荣　程伟敏

机 械 工 业 出 版 社

本书共分8章，分别为：函数的极限，微积分的基本概念，中值定理与导数的应用，微积分的基本定理及积分法，多元函数的微积分，常微分方程，无穷级数，拉普拉斯变换．

本书从培养学生的创新精神和创新能力出发，在内容的取舍上，本着“以能力培养为主，必须够用为度”的原则．学生通过本书的学习，能够达到了解数学思想的本质内容，掌握一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、级数与常微分方程、拉普拉斯变换等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能的目的，为今后学习各类后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量等数学基础．同时，努力提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力及较强的自主学习的能力．

本书适合作为高等职业学院（校）理工科各专业教材使用，也可作为高等专科院校、成人高校教学用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/刘贵濂主编．—北京：机械工业出版社，2005.8

高职高专机电工程类规划教材

ISBN 7-111-17037-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第083479号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：王海峰　版式设计：霍永明　责任校对：程俊巧
封面设计：马精明　责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷
2005年9月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·12.5印张·307千字
定价：18.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
封面无防伪标均为盗版

前　　言

高等职业技术学院的人才培养宗旨是培养生产第一线的高级技术应用人才．基于这一共识，使学生掌握高等数学的基本思想，培养学生在本专业及相关领域中应用数学分析问题、解决问题的意识和数学应用能力，提高学生的数学文化素质便成为数学教学的基本目标．因此，高职类高等数学教材的编写，在内容体系上应突出以应用为目的，以应用为主线，以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题、加强数学与各专业及其他领域之间的联系为核心，以有限的课时数最大化教学内容为目标，在向两年制过渡的趋势下，本着“以能力培养为主，必须够用为度”的思想，力求在教材编写上有所创新．．

本教材有以下几方面的特点：

1. 体现高等职业技术教育的特点，符合“以必须、够用为度”的原则．除保证必要的系统外，突出本课程内容的应用性和针对性．

2. 缓解了教学内容多而教学课时不足的矛循，以适合当前高等职业教育向两年制过渡的趋势．

3. 重整了知识机构．如让学生尽早地了解积分理论，部分地缓解了与其他课程在配合上的矛循．

4. 全书力求做到语言准确、条理清楚，简明扼要，由浅入深，灵活多样．不过分追求理论证明和推导的严密性，而注重加强那些与实际应用联系较多的基础知识；不追求过分复杂的计算，而加强基本运算方法的训练和能力的培养；既注意教材的科学性和逻辑性，更注意培养学生科学的、良好的思维习惯，提升了学生的学习素质．

5. 本教材适用面广．备有必学和选学内容，可供不同专业、不同要求的高等职业学院（校）各专业选用．

本教材适用于高等职业学院（校）各专业，也可作为专科层次及成人教育的高等数学教材．全书内容包括：一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、级数与常微分方程、拉普拉斯变换等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能．为便于及时消化和理解概念及方法，每节都配有习题，每章后配有复习题．基本教学课时数约为52学时．书中注有“*”号的内容供不同专业、不同要求选学．注有“*”号的内容教学课时数约为38学时．

本教材由刘贵濂任主编，谭惠燕任副主编．参加编写的有（以姓氏笔划为序）田俊刚、吴静、黄国荣、程伟敏等．

限于编者水平有限，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请使用本书的同行和广大读者批评指正．e-mail：lg2811@163．com

编　者

目录

第1章　函数的极限

在初等数学中,我们主要是利用数学工具,解决静态的、规则的、不变的、均匀的等实际问题.如求规则图形的面积、求匀速直线运动物体的速度等.随着生产、科学研究的需要,产生了变量数学,如研究“运动”涉及到变速直线运动的瞬时速度、曲线围成的平面图形面积等一系列问题.这些基本问题的解决都需要“无限趋近”或“无限逼近”等概念,这些概念描述的是动态的且是无限的过程.本章首先介绍解决这些问题的思想方法——极限的概念及其基本理论.极限既是解决这些问题的工具,又是一种思考问题的方法.极限的思想和方法不仅是高等数学的基础,而且在自然科学和社会科学的许多基本概念中也有广泛的应用.

本章主要介绍函数的极限和连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

1.1　极限的概念

1.1.1　$x\to\infty$ 时函数的极限

自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋向于无穷大,记作 $x\to\infty$.

下面来考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.当 $x\to\infty$ 时,可以看出对应的函数值无限接近于零,即当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to 0$.

定义1　如果当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\text{或者 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty\text{ 时})$$

根据上述的定义可知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

定义2　如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的**极限**,记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)=A,\text{或者 } f(x)\to A\quad(\text{当 } x\to+\infty\text{ 或 } x\to-\infty\text{ 时})$$

例如,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$,而且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

又如,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,但 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

显然,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

1.1.2　$x\to x_0$ 时函数的极限

首先介绍邻域的概念.

设 $\delta>0$，则数集$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$称为点$x_0$的$\delta$邻域，记作$U(x_0,\delta)$，即$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，点$x_0$称为该邻域的中心，$\delta$称为该邻域的半径．数集$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$称为点$x_0$的去心$\delta$邻域，记作$U(\hat{x}_0,\delta)$，即$U(\hat{x}_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

下面来考察当$x\to 1$时，函数$f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$的变化趋势．由图1-1可以看出，对应的函数值无限接近于常数4，即当$x\to 1$时，$f(x)\to 4$.

定义 3 设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，如果当x以任意方向趋向x_0时，即当$x\to x_0$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A，或者 f(x)\to A \quad (当 x\to x_0 时)$$

根据上述的定义可知，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{x-1}=4$.

从上面的例子可以看出，当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限与函数$f(x)$在$x=x_0$处是否有定义没有关系．

根据定义，容易得出下面的结论：

$$\lim_{x\to x_0} C=C(C为常数)；\qquad \lim_{x\to x_0} x=x_0$$

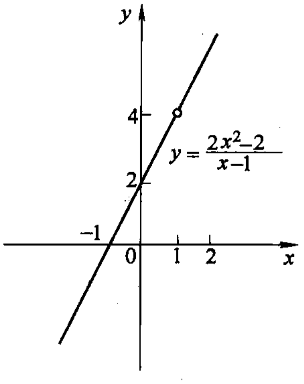


图 1-1

1.1.3 左极限与右极限

定义3中的“$x\to x_0$”是指x既从x_0的左侧也从x_0的右侧趋向x_0，下面给出x从x_0的一侧趋向于x_0时函数极限的定义．

定义 4 设函数$f(x)$在点x_0的某一个左半邻域$(x_0-\delta,x_0)$内有定义，如果当x从x_0的左侧趋向于x_0（记作$x\to x_0^-$）时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A，或者 f(x_0-0)=A$$

若函数$f(x)$在点x_0的某一个右半邻域$(x_0,x_0+\delta)$内有定义，如果当x从x_0的右侧趋向于x_0（记作$x\to x_0^+$）时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A，或者 f(x_0+0)=A$$

显然，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

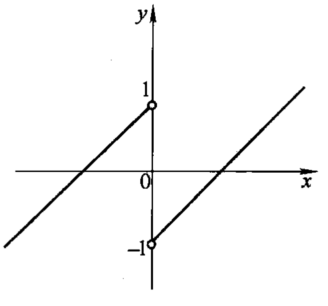


图 1-2

例 1-1 讨论函数$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x-1 & (x>0) \end{cases}$当$x\to 0$时的极限．

解 由图1-2可知，因为$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在．

习 题 1-1

1. 观察并写出下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x+2)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$　　(3) $\lim\limits_{x\to -\infty}3^x$

(4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arccot}x$　　(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x+1}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}$

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限 .

1.2 极限的性质与运算

1.2.1 极限的性质

性质 1(唯一性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

性质 2(有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$内有界 .

性质 3(保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

推论　若函数 $f(x)$在 x_0 的某个去心邻域 $U(x_0,\delta)$内恒有 $f(x)\geqslant 0$ 或 $f(x)\leqslant 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$ 或 $A\leqslant 0$.

性质 4 (夹逼准则)　如果在 x_0 的某个去心邻域 $U(x_0,\delta)$内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

当 $x\to\infty$ 时，函数的极限仍具有上述的性质 .

1.2.2 极限的四则运算法则

定理　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$.

(3)当 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq 0)$.

(证明从略)

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim_{x\to x_0}f(x)=CA\ (C\ \text{为常数})$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$$

上述极限运算法则对于 $x\to\infty$ 的情形也是成立的．法则(1)和法则(2)可以推广到有限个函数的情形．

例 1-2 求 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x+3)$

解 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x+3)=(\lim\limits_{x\to3}x)^2-2\lim\limits_{x\to3}x+\lim\limits_{x\to3}3=3^2-2\times3+3=6$

例 1-3 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-1}{x^2+3}$

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-1}{x^2+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to3}(x-1)}{\lim\limits_{x\to3}(x^2+3)}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

例 1-4 求 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

解 当 $x\to3$ 时，分母的极限为零，这时不能用商的法则，由于当 $x\to3$ 时，即 $x\neq3$，因此在分式中约去公因式 $(x-3)$，这样就可以用商的法则，所以

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$$

例 1-5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{2x^2-3x+2}$

解 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限均不存在，不能用商的法则，但可以将分子、分母同除以 x^2，再求极限．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{3}{2}$$

例 1-6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{2x^2+5}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{2x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}=\dfrac{0}{2}=0$

例 1-7 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

解 当 $x\to1$ 时，上式两项的极限均不存在，不能用差的法则，但可以先通分，再求极限．

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)}=-1$$

习 题 1-2

计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x}{5x^2-2x-4}$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{2x^3-x+6}$　(3) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-3x+3)$

(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x}{x^2+2x-3}$　(5) $\lim\limits_{x\to0}(x^2+3)\cos x$　(6) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3-3x^2+5x}{6x^2-3x}$　(8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{x-1}\right)$

1.3 两个重要的极限

1.3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

首先考察当 $x\to 0$ 时，函数$\frac{\sin x}{x}$的变化趋势：

x	± 0.5	± 0.1	± 0.01	± 0.001	……
$\frac{\sin x}{x}$	0.958851	0.998334	0.999983	0.999999	……

由上表可以看出，当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 1$.

可以证明，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

例 1-8 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

解 设 $3x=t$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3$$

例 1-9 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

例 1-10 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

例 1-11 求$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2}-\theta}$

解 当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{2}-\theta\to 0$

因此 $$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\frac{\pi}{2}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\frac{\pi}{2}-\theta}=1$$

1.3.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

我们先列表考察当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势 .

x	1	10	100	1000	10000	100000	$\cdots\to+\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2.59	2.705	2.717	2.718	2.71827	……

x	-10	-100	-1000	-10000	-100000	$\cdots\to-\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.88	2.732	2.720	2.7183	2.71828	……

从上表可以看出，当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值无限接近于一个常数 $e=2.7182818\cdots$，可以证明，当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在而且相等，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{1-1}$$

在式(1-1)中，设$\frac{1}{x}=t$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，于是式(1-1)又可写成

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e,\qquad 即\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

例 1-12 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2$

令$\frac{x}{2}=t$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)^t\right]^2=e^2$$

例 1-13 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\left[\lim\limits_{-x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$

例 1-14 求$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}$

解 $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{\cot x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\cot x}\right)^{\cot x}=e$

习 题 1-3

1. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$　　(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\tan x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$

1.4 无穷小及其比较

1.4.1 无穷小量

定义1 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的极限为零,则称函数$f(x)$是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,简称无穷小.

如,因为$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$,所以 $x-2$ 是当 $x\to 2$ 时的无穷小

又如,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以$\frac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小.

无穷小具有下面的性质:

性质1 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质2 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

性质3 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

(证明从略)

例1-15 求$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

解 当 $x\to 0$ 时,$\sin\frac{1}{x}$的极限不存在,所以不能用积的极限法则.但因为$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,所以 x 是当$x\to 0$ 时的无穷小,又因为$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,所以 $\sin\frac{1}{x}$是有界函数.根据无穷小的性质2,可知

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

下面的定理将说明函数、函数的极限与无穷小三者之间的关系.

定理1 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 的充要条件是$f(x)=A+\alpha$,其中,α 是当$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$时的无穷小.

例如,$\lim\limits_{x\to 5}(x-2)=3$,则 $x-2=3+(x-5)$,$\alpha=x-5$ 是当 $x\to 5$ 时的无穷小.

1.4.2 无穷大量

定义2 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,则称函数 $f(x)$是当 $x\to x_0$或 $x\to\infty$时的无穷大量,简称无穷大,记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$.

如,因为$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$,所以$\frac{1}{x-2}$是当 $x\to 2$ 时的无穷大.

又如,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$,所以 x 是当$x\to\infty$时的无穷大.

在同一变化过程中,无穷小与无穷大之间有以下的倒数关系:

定理2 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{1}{f(x)}=0$;反之,如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

例 1-16 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2}{2x^2+5}$

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5}{3x^3-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x^3}}=0$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2}{2x^2+5}=\infty$

归纳上例以及第二节的例 1-5、例 1-6,可得以下的一般结论:

设 $a_0\neq0,b_0\neq0,m$、n 为正整数,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+a_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & (m=n)\\ 0 & (m>n)\\ \infty & (m<n)\end{cases}$$

1.4.3 无穷小的比较

我们已经知道,两个无穷小的代数和及乘积仍然是无穷小,但两个无穷小的商会出现不同的情况 . 例如,当 $x\to0$ 时,函数 x、$2x$、x^2 都是无穷小,而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0,\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\infty,\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$$

定义 设 α 和 β 都是同一变化过程中的无穷小,又 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是这同一变化过程中的极限 .

1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$.

2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小 .

3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$,则称 β 与 α 为同阶的无穷小,特别当常数 $c=1$ 时,则称 β 与 α 为等价的无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$.

根据以上定义可知,当 $x\to0$ 时,

x^2 是比 x 高阶的无穷小;

x 是比 x^2 低阶的无穷小;

$2x$ 是与 x 同阶的无穷小 .

又因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{2}=1$

所以 $x^2-1\sim2(x-1)(x\to1)$.

可以证明:当 $x\to0$ 时,有下列各组等价无穷小:

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x.$$

利用等价无穷小可以简化某些极限的计算,有下面的定理 .

定理 3 设 $x\to x_0$ 时,$\alpha\sim\alpha^*$,$\beta\sim\beta^*$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta^*}{\alpha^*}$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta^*}{\alpha^*}$.

证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\beta}{\beta^*}\cdot\frac{\beta^*}{\alpha^*}\cdot\frac{\alpha^*}{\alpha}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\beta^*}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta^*}{\alpha^*}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha^*}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta^*}{\alpha^*}$

例 1-17 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

解 当 $x\to0$ 时,$\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

习 题 1-4

1. 下列函数在相应的变化趋势下哪些是无穷小? 哪些是无穷大?

(1) $\frac{x+2}{x}(x\to0)$ (2) $3^x(x\to-\infty)$ (3) $e^{\frac{1}{x}}(x\to0^+)$ (4) $\log_2{}^x(x\to1)$

2. 下列函数在什么变化趋势下是无穷小? 在什么变化趋势下是无穷大?

(1) $\frac{x+3}{x^2-1}$ (2) $\ln x$ (3) $e^{\frac{1}{x}}$ (4) $3+\frac{1}{x}$

3. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arccot}x}{x}$

4. $x\to1$ 时,试比较两个无穷小 $1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$的阶数。

5. 用等价无穷小代换计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sin bx}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sin\frac{x}{2}}$ (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x\sin5x}{x^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1)\ln(1+3x)}{x\arcsin2x}$

1.5 函数的连续性

1.5.1 连续函数的概念

自然界中很多变量都是连续变化的,例如,气温随时间的变化而变化,当时间变化很微小时,气温的变化也很微小,反映在数学上就是函数的连续性 .

1. 函数的增量

定义 1 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,当自变量从 x_0 变到 x,相应的函数值从$f(x_0)$变到 $f(x)$,称 $x-x_0$ 为自变量的增量,记作 $\Delta x=x-x_0$,它可正可负;称 $f(x)-f(x_0)$为函数的增量,记作 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$,或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

例 1-18 求函数 $y=x^2$,当 $x_0=2,\Delta x=0.1$ 时的增量 .

解 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(2+0.1)-f(2)=f(2.1)-f(2)$
$=2.1^2-2^2=0.41$

2. 函数在点 x_0 的连续性

定义 2 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续,x_0 称为$f(x)$的连续点 .

在上述定义中,设 $x_0+\Delta x=x$,则 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$,所以 $\Delta x\to 0$,即 $x\to x_0$,$\Delta y\to 0$,即 $f(x)\to f(x_0)$. 所以上述定义可叙述为:

定义 3 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

例 1-19 讨论函数 $y=x^2$,在 $x=2$ 处的连续性.

解 1) 因为 $\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4\Delta x+(\Delta x)^2$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[4\Delta x+(\Delta x)^2]=0$

所以函数 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处连续.

2) 因为$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2=2^2=4$

又因为 $f(2)=2^2=4$

所以$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

所以函数 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处连续.

有时需要考虑函数在点 x_0 的一侧的连续性,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处右连续;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续.

显然,函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续且右连续.

3. 函数在区间上的连续性

如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续. 区间(a,b)称为函数的连续区间,如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内连续,且在左端点 $x=a$ 处右连续,又在右端点 $x=b$ 处左连续,则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 在连续区间上,连续函数的图形是一条连绵不断的曲线.

1.5.2 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内都是连续的.

法则 1 (连续函数的和、差、积、商的连续性) 设函数 $f(x)$,$g(x)$均在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$$(g(x_0)\neq 0)$都在点 x_0 处连续.

法则 2(反函数的连续性) 单调连续函数的反函数在其对应区间上也是单调连续的.

法则 3(复合函数的连续性) 设函数 $y=f(u)$在点 u_0 处连续,又函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续.

这个法则说明连续函数的复合函数仍为连续函数.

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0),\ \lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0),\text{且 } u_0=\varphi(x_0),\text{则}$$

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

上式说明复合函数求极限时,极限运算的符号与复合函数的符号可以交换,该式的条件还可减弱为:如果$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,则

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)]$$

例 1-20 求$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{\sin 2x}{x}}$

解 $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{2 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x}} = \sqrt{2}$

定理 1 初等函数在其定义域区间内是连续的．

由定理 1 可知，如果 x_0 是函数 $f(x)$定义区间内的点，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 1-21 设 $f(x) = x^2 + \sqrt{x-2}$，求$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

解 因为函数 $f(x)$的定义域是$[2, +\infty)$，而 $3 \in [2, +\infty)$，

所以 $$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 3^2 + \sqrt{3-2} = 10$$

1.5.3 函数的间断点

如果函数 $f(x)$在点 x_0 不连续，则称函数 $f(x)$在点 x_0 间断，x_0 称为函数 $f(x)$的**间断点**或**不连续点**．

由连续的定义可知，函数 $f(x)$在点 x_0 连续必须满足三个条件：

1) 函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义．

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在．

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果函数 $f(x)$在点 x_0 不满足三个条件的任何一个，那么函数 $f(x)$在点 x_0 间断．下面讨论函数间断点的类型．

1．第一类间断点

函数 $f(x)$在点 x_0 的左右极限都存在的间断点，则点 x_0 称为**第一类间断点**，第一类间断点又分为可去间断点和跳跃间断点．

(1)如果函数 $f(x)$在点 x_0 处极限存在，则点 x_0 称为**可去间断点**．

例 1-22 函数 $f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x-1}$在 $x=1$ 处没有定义，所以函数在 $x=1$ 处间断，又因为 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} 2(x+1) = 4$

所以 $x=1$ 是函数的可去间断点．

例 1-23 函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$在 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=1$，但 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2} \neq 2 = f(0)$，所以函数在 $x=0$ 处间断，所以 $x=0$ 是函数的可去间断点．

在函数的可去间断点 x_0 处，可以补充或改变函数在 x_0 处的定义，使点 x_0 成为连续点．如在例 1-22 中可补充定义 $f(1)=4$，如在例 1-23 中可改变函数在 $x=0$ 处的定义，令 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，则分别使两例中的函数在 $x=1$ 与 $x=0$ 处连续．

(2)如果函数 $f(x)$在点 x_0 处左右极限存在但不相等,则点 x_0 称为函数的**跳跃间断点**.

例 1-24 函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有定义,且 $f(0)=0$,又因为

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$,

即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,所以函数在 $x=0$ 处间断,$x=0$ 是函数的跳跃间断点.

2.第二类间断点

函数 $f(x)$在点 x_0 的左右极限至少有一个不存在的间断点,则点 x_0 称为**第二类间断点**.

例 1-25 函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$在 $x=1$ 处没有定义,所以函数在 $x=0$ 处间断,又因为$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$,所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点,因为$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$,所以 $x=1$ 又称为函数的无穷间断点.

例 1-26 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 处没有定义,所以函数在 $x=0$ 处间断,当 $x\to0$ 时,函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$的值在 -1 和 $+1$ 之间无限次地震荡,不会趋向于一个确定的常数,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处的左右极限都不存在,$x=0$ 是函数的第二类间断点,$x=0$ 又称为函数的震荡间断点.

1.5.4 闭区间上连续函数的性质

下面不加证明,给出闭区间上连续函数的一些重要性质,并给出几何解释.

定理 2(最大值和最小值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在两点 x_1,x_2,使得对于任何 $x\in[a,b]$,都有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$$

这里,$f(x_1)$和 $f(x_2)$分别称为函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最小值和最大值.

定理 3(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,M 和 m 分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,则对于满足 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 的任何实数μ,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\mu$$

定理 3 指出:闭区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$可以取遍 M 和 m 之间的一切值,这个性质反映了函数连续变化的特征,其几何意义是:闭区间上的连续曲线 $y=f(x)$与水平直线 $y=\mu$ $(m\leqslant\mu\leqslant M)$至少有一个交点.

推论(方程实根的存在定理) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

其几何意义是:当连续曲线 $y=f(x)$的端点 A、B 在 x 轴的两侧时,曲线 $y=f(x)$与 x 轴至少有一个交点.

习 题 1-5

1. 求下列函数的间断点,并判断其类型.如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义,使其在该点连续.