21世纪高等教育规划教材

概率论与数理统计

宋代清 王文杰 主编

西南交通大学出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

21 世纪高等教育规划教材

概率论与数理统计

主　编　宋代清　王文杰

副主编　邢丽君　武文华

常华珍　王　冠

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 宋代清，王文杰主编. 一成都：西南交通大学出版社，2007.7

21 世纪高等教育规划教材

ISBN 978-7-81104-571-0

Ⅰ.概… Ⅱ.①宋…②王… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 099597 号

21 Shiji Gaodeng Jiaoyu Guihua Jiaocai

21 世纪高等教育规划教材

Gailülun yu Shuli Tongji

概率论与数理统计

主编 宋代清 王文杰

责任编辑	张宝华
封面设计	水木时代
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 87600533
邮编	610031
网址	http://press.swjtu.edu.cn
印刷	安徽蚌埠市广达印务有限公司
成品尺寸	170 mm×228 mm
印张	11.75
字数	204 千字
版次	2007 年 7 月第 1 版
印次	2007 年 7 月第 1 次印刷
书号	ISBN 978-7-81104-571-0
定价	19.80 元

内容提要

本书以培养运用概率论与数理统计的思想、方法解决随机性问题的能力为基本出发点,介绍了概率论与数理统计的基本概念、原理和方法.

本书内容包括随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、多维随机变量及其数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验.

本书可作为普通高等学校本科教材和函授大学本科教材,也可供高职高专相关专业选用.

前　言

本书是参照高等学校工科数学教学指导委员会拟定的《概率论与数理统计课程教学基本要求》,并结合《2007年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》及培养21世纪工程技术人才对数学的需要,同时汲取了我校多年来教学改革的经验编写而成.

概率论与数理统计是从数量上研究随机现象统计规律性的一门数学学科,是现代数学的重要组成部分,它在自然科学、社会科学、工程技术和经济管理中都有广泛的应用.因此,概率论与数理统计已经成为高校工科各专业的一门重要基础课.学习本门课程对于提高学生的数学素质,培养学生逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决问题的能力起着重要的作用,同时也为学好后继课程打下良好的基础.

本书分为概率论(1～4章)与数理统计(5～7章)两个部分,其中1～3章由宋代清、武文华、常华珍编写;4～7章由王文杰、邢丽君、王冠编写.内容安排由王文杰策划,宋代清统稿.考虑到各专业对概率论与数理统计的要求不同,教学时数不等,对内容次序也做了相应的安排.在概率论中,对随机变量部分,把有关一维随机变量内容放在前面,多维随机变量(随机向量)内容放在后面.在编写过程中,我们针对学生的数学基础和特点,在内容叙述上,力求把概念讲清、思路讲明、方法讲透,做到深入浅出、通俗易懂,便于学生自学.为了能够帮助学生深入理解概念,除了必要的论证外,尽量用实例说明、直观解释,删去了烦琐的数学推导和证明.本书联系实际,实用性较强,安排了较多的例题,并配有适量的习题和自我检测题.自我检测题可作为学生用于检查自己对所学内容的掌握程度.书后附有参考答案.

本书的编写得到了东北电力大学成人教育学院的大力支持和帮助,在此深表谢意.

由于我们水平有限,书中尚有不妥之处,恳请同行和读者批评指正.

编　者

2007年7月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

随机事件及其概率是概率论的两个最基本的概念.本章将介绍随机事件、随机事件的概率、概率的基本性质、条件概率、事件的独立性以及计算概率的几个重要公式.

1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

在自然界与人类社会中,人们能观察到的现象是各种各样的,但归纳起来,大体可分为两类.一类是在一定条件下必然发生(或必然不发生)某一种结果的现象.例如,在一个大气压下,把纯水加热到 100 ℃,水必然沸腾;把 10 V 直流电压接到 2 Ω 的电阻两端,必然会产生 5 A 的电流;两个同性电荷不相互吸引等.这类现象称为必然现象或确定性现象.另一类是在一定条件下可能发生种种不同结果的现象.例如,将一枚硬币上抛,着地时可能正面朝上,也可能反面朝上;某电话交换台,在一小时内接到的呼叫次数,可能是 0,也可能是 1,2,…中的一个数;某电厂的一号发电机,今日正常运行,明年的今日可能发生故障,也可能不发生故障等.这类现象称为随机现象或偶然现象.

人们经过长期实践并深入研究后,发现上述随机现象虽然就每次试验来说具有偶然性,但在大量的重复试验之下却呈现出某种规律性——统计规律性.例如,多次抛一枚硬币,出现正面次数和反面次数约各占一半;多次观察某电话交换台在一小时内接到的呼叫次数,会发现具有一定的规律.这样,可把随机现象更确切地解释为:在个别试验中虽具有不确定性,但在大量重复试验中却呈现出某种统计规律性的现象.

概率论与数理统计就是从数量方面研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1.2　随机试验

为了研究随机现象,就要对随机现象进行观察、测量或进行实验.为叙述方便,统称为试验.

若试验具有以下三个特点：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)试验的所有可能结果不止一个，且事先是已知的；

(3)每次试验前不能确定哪一个结果会出现，

则称这样的试验为随机试验，简称试验，用字母 E 表示. 下面给出几个随机试验的例子：

E_1：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_2：抛两枚硬币，观察正、反面出现的情况；

E_3：记录某电话交换台在一小时内接到的呼叫次数；

E_4：从一批电脑中任取一台，记录无故障运行时间.

1.1.3 随机事件

在随机试验中，可能出现也可能不出现的事情(结果)称为随机事件，简称事件，用字母 A,B,C 等表示. 例如，在 E_1 中，{出现偶数点}是一个随机事件，可用 $A=$ {出现偶数点}表示.

在每次试验中必然发生的事情称为必然事件，记作 Ω. 不可能发生的事情称为不可能事件，记作 $\varnothing$. 例如，在 E_1 中，{出现点数大于零}是必然事件，{出现点数小于 1}是不可能事件.

必然事件与不可能事件没有随机性，可以说不是随机事件，但为了讨论问题方便，可把它们看作是两个特殊的随机事件.

1.1.4 样本空间

为了研究随机试验，首先要知道这个试验所有可能的结果. 随机试验的每一个可能的且不能再分的结果称为该试验的样本点(或基本事件)，用 ω 表示. 全体样本点组成的集合称为样本空间(或基本空间)，记作 Ω. 例如：

E_1 有 6 个基本事件：$\omega_i=$ {出现 i 点} $(i=1,2,\cdots,6)$，样本空间为 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

E_2 的样本空间为 $\Omega_2=$ {(正正)，(正反)，(反正)，(反反)}，这里“(正反)”是基本事件，表示“第一枚硬币出现正面，第二枚硬币出现反面”，其余类推.

E_3 的样本空间为 $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

E_4 的样本空间为 $\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$，其中 t 为所取一台电脑的无故障工作时间.

从以上几个例子可以看出，样本空间的构成取决于随机试验的内容.

在引入样本空间概念之后，可从集合论的角度来定义随机事件. 随机事件就是由样本空间 Ω 的若干个基本事件组成的集合，即样本空间 Ω 的一个子

集. 例如,在 E_1 中,事件 $A=\{$出现偶数点$\}$,$B=\{$出现点数不超过 3$\}$都是样本空间 Ω_1 的子集. 特殊地,必然事件包含试验的所有基本事件,即样本空间 Ω. 不可能事件不包含任何基本事件,即空集$\varnothing$.

1.1.5　事件的关系与运算

一般来说,每一个随机试验都有若干个随机事件,这些事件是有一定联系的. 因此,在研究随机事件时,不能孤立地研究某个随机事件,而是需要研究在同一试验中的其他随机事件以及它们之间的关系与运算,这对于研究复杂的随机事件以及概率的计算是很有用的.

为直观起见,用平面上的一个矩形区域表示样本空间 Ω,矩形内的每个点表示样本点,并用矩形内每个圆表示事件. 设试验 E 的样本空间为 Ω,A,B,C,$A_i(i=1,2,\cdots)$是试验 E 的事件. 下面介绍事件之间的关系与运算.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中每一个样本点都属于 B,则称 B 包含 A(或 A 包含于 B),记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$(见图 1-1).

若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

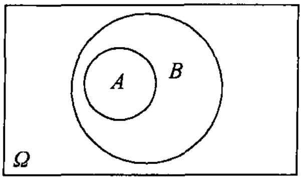
例如,在 E_4 中,设 $A=\{$电脑无故障工作时间不超过 500 h$\}$,B$=\{$电脑无故障工作时间不超过 1 000 h$\}$,则 $A\subset B$.

对任意事件 A,有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的和(并)

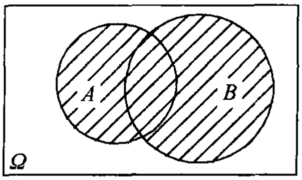
设 A,B 为两个事件,则"A 与 B 中至少有一个发生"的事件,称为 A 与 B 的和(并),记作 $A\cup B$.

$A\cup B$ 是由属于 A 或属于 B 的所有样本点组成的集合(见图 1-2).



$A\subset B$

图 1-1



$A\cup B$

图 1-2

一般来说,n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots$或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,它们都表示"所列事件中至少有一个发生"的事件.

3. 事件的积(交)

设 A,B 为两个事件，则“A 与 B 同时发生”的事件，称为 A 与 B 的积(交)，记作 $A\cap B$ 或 AB.

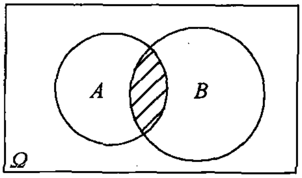
$A\cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的集合(见图 1-3).

一般来说，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积记为 $A_1A_2\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示“所列事件都发生”的事件.

4. 事件的差

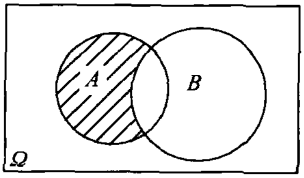
设 A,B 为两个事件，则“A 发生但 B 不发生”的事件，称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

$A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合(见图 1-4).



$A\cap B$

图 1-3



$A-B$

图 1-4

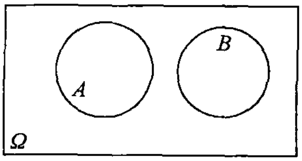
5. 互斥(互不相容)事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥或互不相容，这时 A 与 B 没有公共的样本点(见图 1-5).

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥.

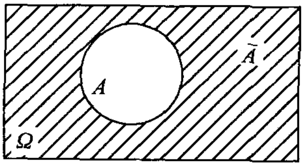
6. 互逆(对立)事件

设 A,B 为两个事件，若 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为逆事件(或互为对立事件). A 的逆事件，记作 $\overline{A}$，这时 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$，$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的集合(见图 1-6).



$AB=\varnothing$

图 1-5



$\overline{A}=B$

图 1-6

显然有 $A\overline{A}=\varnothing$，　$A\cup\overline{A}=\Omega$，　$\overline{\overline{A}}=A$，　$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

注意：事件互斥与事件互逆是两个不同的概念，若事件 A,B 互逆，则 A,B 一定互斥，反之不成立.

1.1.6　事件的运算规律

与集合论中集合运算一样，事件之间有下列运算规律：

(1)吸收律　若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B,AB=A$；

(2)交换律　$A\cup B=B\cup A,AB=BA$；

(3)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$；

(4)分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC,A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

(5)对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1　如图 1-7 和图 1-8 所示的电路中，开关 1,2 开或关是随机的，设 A,B 分别表示开关 1,2 闭合，C 表示灯亮，试用事件 A,B 表示事件 C 和 $\overline{C}$.

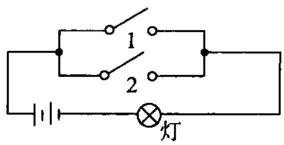


图 1-7

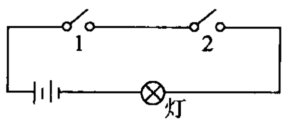


图 1-8

解　在图 1-7 中，$C=A\cup B,\overline{C}=\overline{A}\overline{B}$.

在图 1-8 中，$C=AB$，$\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.2　向指定目标射击三次，以 A_i 表示"第 i 次射中目标"$(i=1,2,3)$，试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)样本空间 Ω；　(2)三枪均射中；　(3)至少射中一枪；

(4)至少射中两枪；　(5)最多射中一枪；　(6)最多射中两枪；

(7)三枪均未射中.

解

(1) $\Omega=\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1A_2A_3\}$；

(2){三枪均射中}$=A_1A_2A_3$；

(3){至少射中一枪}$=A_1\cup A_2\cup A_3$；

(4){至少射中两枪}$=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$；

(5){最多射中一枪}$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

(6){最多射中两枪}$=\overline{A_1A_2A_3}\cup\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$；

(7){三枪均未中}$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

1.2 频率与概率

我们研究随机现象，不仅要知道它们可能出现哪些事件，更重要的是要知道各事件出现的可能性大小，并使得出现可能性较大的事件对应较大的数，出现可能性较小的事件对应较小的数，这个数量指标就是下面要讨论的事件的频率与概率.

1.2.1 事件的频率

能反映事件出现的可能性大小的数量指标，最简单、最直观的方法就是用事件出现的频率表示.

定义 1.1 若随机事件 A 在 n 次重复试验中出现了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在这 n 次重复试验中出现的频率，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

由这个定义易知频率具有以下性质：

(1)对任意事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(\Omega)=1$；

(3)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一定程度上能反映事件 A 出现的可能性大小，但由于 $f_n(A)$ 具有随机性，所以用频率来度量事件 A 出现的可能性大小是不确切的. 为了寻求事件 A 出现的规律性，历史上有人做过成千上万次抛硬币的试验，下面列出部分试验结果(见表 1-1).

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	频率 $f_n(A)=\frac{m}{n}$
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔孙	12 000	6 019	0.501 6
皮尔孙	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

从表 1-1 可见，“出现正面”的频率都接近 0.5，并且当抛掷次数 n 越大时，它越趋于 0.5 附近，根据上述统计规律，我们引出概率的统计定义.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2 如果当试验次数 n 增大时，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 在某一

常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动，而且一般来说，随着 n 的增大，这种摆动的幅度越来越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)=p$.

概率的这种定义，称为概率的统计定义. 由概率的统计定义和频率的性质，可得统计概率性质：

(1)对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

1.2.3　概率的公理化定义

概率的统计定义虽然适合一般情况，而且直观，但从数学角度看是不严密的，需要从理论上加以解决，下面给出一个严密的定义.

定义 1.3　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，如果对于 E 的任一事件 $A\subset\Omega$，都对应一实数 $P(A)$，且 $P(A)$ 满足下列三条公理：

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)对两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由定义 1.3 可推出概率的如下性质：

(1)$P(\varnothing)=0$.

证

$$\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$$

由定义 1.3，得 $P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$，又 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故 $P(\varnothing)=0$.

(2)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

证　取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$$

由定义 1.3 及 $P(\varnothing)=0$，得

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\=&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)\\=&P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\\=&P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\end{aligned}$$

(3)$P(A)=1-P(\overline{A})$.

证　因为 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，所以由性质(2)和定义 1.3，得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

于是
$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

(4)若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,且 $P(A)\geqslant P(B)$.

证　因为 $B\subset A$,所以
$$A=B\cup(A-B),\quad B(A-B)=\varnothing$$
于是由性质(2),得
$$P(A)=P(B\cup(A-B))=P(B)+P(A-B)$$
即
$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$
由于 $P(A-B)\geqslant 0$,即 $P(A)-P(B)\geqslant 0$,故 $P(A)\geqslant P(B)$.

(5)设 A,B 为任意两个事件,则
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,所以由性质(2),得
$$P(A\cup B)=P[A\cup(B-AB)]=P(A)+P(B-AB)$$
又因为 $B\supset AB$,于是由性质(4),得
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
此公式称为概率的加法公式.

类似地,对于任意的三个事件 A,B,C,有
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有
$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\\&\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+\\&(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned}$$

1.3　古典概率

1.3.1　古典概率

在概率的发展史上,人们最早研究的随机试验是“抛硬币”、“掷骰子”等.这些试验的共同特点是:

(1)试验的样本空间 Ω 所含的基本事件的个数是有限的,即
$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

(2)每个基本事件发生的可能性是相等的,即
$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$$

具有上述两个特点的试验，叫做古典概型试验，简称古典概型.

1.3.2　古典概率定义

定义 1.4　*在古典概型中，设样本空间 Ω 所含的基本事件总数为 n，事件 A 含有 Ω 中的 m 个基本事件，则规定事件 A 的概率为*

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

古典概率定义是概率公理化定义的特殊情形，显然它满足概率的性质.

例 1.3　一袋中有 3 只白球和 2 只黄球，从中分别按以下 3 种情况取球：

(1)有放回抽样(第一次取一球后放回，第二次再取一球)；

(2)不放回抽样(第一次取一球后不放回，第二次再取一球)；

(3)一次抽样(一次取两只球).

求取得的两只球都是白球的概率.

解　设 $A=\{$取得的两只球都是白球$\}$.

(1)有放回抽样时，基本事件总数为 $n=5^2=25$，事件 A 所含的基本事件数为 $m=3^2=9$，于是

$$P(A)=\frac{9}{25}$$

(2)不放回抽样时，基本事件总数为 $n=A_5^2=5\times4=20$，事件 A 所含的基本事件数为 $m=A_3^2=3\times2=6$，于是

$$P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

(3)一次抽样时，基本事件总数为 $n=C_5^2=\dfrac{A_5^2}{2!}=10$，事件 A 所含的基本事件数为 $m=C_3^2=\dfrac{A_3^2}{2!}=3$，于是

$$P(A)=\frac{3}{10}$$

从上面求得的结果看，有放回抽样与不放回抽样有本质的区别，故事件 A 的概率值不同；而不放回抽样与一次抽样虽然抽样方式不同，但是从概率的计算过程中可知，两者是有密切联系的.

$$P\left\{\begin{matrix}\text{一次抽样取}\\ \text{得两只白球}\end{matrix}\right\}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{A_3^2/2!}{A_5^2/2!}=\frac{A_3^2}{A_5^2}=P\left\{\begin{matrix}\text{不放回抽样取}\\ \text{得的两只白球}\end{matrix}\right\}$$

以后遇到不放回抽样或一次抽样求概率时，既可按不放回抽样去解，也可按一次抽样去解.

例 1.4 已知10个某种型号的继电器中，有6个正品和4个次品. 甲、乙两人各买了一个，问：

(1)两人都买到正品的概率是多少？

(2)恰有一人买到正品的概率是多少？

(3)至少有一人买到正品的概率是多少？

解 设 $A=\{$两人都买到正品$\}$，$B=\{$恰有一人买到正品$\}$，$C=\{$至少有一人买到正品$\}$. 在所讨论的问题中，甲、乙两人各买一个，可视为一个人买两个，于是基本事件总数为 $n=\mathrm{C}_{10}^2=45$.

(1)A 所含的基本事件数为 $m=\mathrm{C}_6^2=15$，于是

$$P(A)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

(2)B 所含的基本事件总数为 $m=\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_6^1=24$，于是

$$P(B)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

(3)解法一：由于 $C=A\cup B$ 且 $AB=\varnothing$，于是

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{15}+\frac{8}{15}=\frac{13}{15}$$

解法二：因为 $\overline{C}=\{$两人都买到次品$\}$，所以，$\overline{C}$ 所含的基本事件数为 $m=\mathrm{C}_4^2=6$，于是

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{6}{45}=\frac{13}{15}$$

例 1.5 某地区电话号码由7位数字组成，且每一位数字可以是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的任一个. 设 $A=$“7个数码全相同”，$B=$“7个数码全不相同”，$C=$“7个数码中有3个是6”. 求事件 A,B,C 的概率.

解 将每一个可能的电话号码作为一个基本事件，由于数码是可重复的，故基本事件的总数为 10^7. 显然 A 所含的基本事件的数为10，于是

$$P(A)=\frac{10}{10^7}=10^{-6}$$

B 所含的基本事件数为 A_{10}^7，于是

$$P(B)=\frac{\mathrm{A}_{10}^7}{10^7}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{10^7}=0.060\ 48$$

C 所含的基本事件数为 $\mathrm{C}_7^3\times9^4$，这是因为数码“6”在电话中占有3个位置的方法有 C_7^3 种，而其余4个位置的每一个都可以从9个数码 $0,1,2,3,4,5,7,8,9$ 中重复选取，于是

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_7^3\times9^4}{10^7}=0.022\ 96$$