恩波考研
ENBO

2007

历年试题解析

硕士研究生入学考试·数学三

陈仲 主编

答案准确 解析到位

- 1994年—2006年 **13** 套全真试题逐题解析
- **考点提示+思路点拨+技巧评点**
- **考点提示** 试题内涵及隐含信息披露无遗
- **思路点拨** 抽象思路与具体解法尽陈案前
- **技巧评点** 解题诀窍与应试策略启迪无限
- 书后特附有《历年真题分类索引》

学苑出版社

硕士研究生入学考试

历年试题解析

全国硕士研究生入学考试

历年试题解析

数学三

主编　陈　仲
编者　姜东平　陈华钧

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试数学历年试题解析(文科卷)/
陈仲主编. —6 版—北京:学苑出版社,2006. 2
ISBN 7 - 5077 - 1793 - 3

Ⅰ. 全... Ⅱ. 陈... Ⅲ. 数学 - 研究生 - 入学考试
- 解题 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 09350 号

责任编辑:刘　涟
责任校对:姜东平
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼
邮政编码:100078
网　　址:www. book001. com
电子信箱:xueyuan@ public. bta. net. cn
销售电话:010 - 67675512、84560465
经　　销:新华书店
印 刷 厂:北京通州皇家印刷厂
开本尺寸:850 × 1168　1/16
印　　张:25. 75
字　　数:560 千字
版　　次:2006 年 2 月北京第 6 版
印　　次:2006 年 2 月北京第 1 次印刷
印　　数:0001—5000 册
定　　价:38. 00 元(共两册)

总前言

本套丛书是在“恩波考研辅导丛书”编辑部的支持、组织和策划下编写出版的。它以历年硕士生入学考试试题为基础，经过辅导专家的整理并作详尽解析而成，提供给广大考生备考复习使用，目的是帮助广大考生高效、有序地做好考前复习，从而取得理想的考试成绩。

本套丛书在编写过程中突出如下特点：

一、引导考生备考和复习　2006 年参加考研的人数达到 127.5 万人，竞争之激烈可想而知。所以考研复习不能落入俗套，要有创新思想，既要寻找适合自己特点的路子，又要清醒地把握住自己复习的进程，做到临考不乱，胸有成竹。本套丛书有引导考生备考和复习的初衷，供广大考生参考。

二、总结考试特点和规律　公共课是考研成功道路上最大的障碍，大多数考生因公共课成绩未达到国家最低录取控制分数线，而使其考研成功的梦想破灭。经调查分析，其原因是考生在复习时没有抓住考试的特点和规律，结果误入歧途。本套丛书编写时将试题解析与大纲考点相结合，总结出考试特点和规律，而遵循考试特点和规律从事考前复习将使考生避免盲目性，达到有的放矢、事半功倍的效果。

三、预测命题思路和趋势　本套丛书的试题与解析按时间顺序排列，先试题后解析，目的是希望考生通过做真题，熟悉考试的内容和形式；通过试题解析加强对考点的认识，理清解题思路，了解考试的最新动态和发展趋势，并对照答案解析检查不足与差距。

使用本套丛书时，请不要直接看解析和答案，最好先测试一下自己的水平，按规定的时间做完，然后对照答案，给自己记分，通过对照分析试题规律和自己的不足，以确定自己的复习重点。一位恩波考研辅导班的学员曾深有体会地说："认真做一套全真试题，并熟记全部考点和类型，其效率超过做两套模拟试题。"总之，考生在使用本套丛书时不要就题论题，而是要通过对历年考题的比较、对书中详尽解析和复习方法指导的把握，发现一些规律性的东西，使这些资料为我所用，从而提高自身水平，并轻松应对考试。

参加本套丛书编写工作的有陈仲、余术、姜东平、陈华钧、王锁明、周固等老师。

编写组

http://www.enbobook.org

目录

2007 年数学考研指南

近几年来，国家机关、企事业单位、各行各业对高素质、高能力、高学历人才的需求不断提高，也由于就业市场的竞争日趋激烈，促使不少大学毕业生选择考研接受继续教育的道路，希望学到更多的专业知识，提高学历，以增强自己的竞争力. 国家的硕士生招生人数也逐年增加，2005 年 37 万人，2006 年将达 40 万人. 约占当年本科毕业人数的 11% 左右.

硕士生入学数学统一考试是国家选拔高层次人才的水平考试，命题者将考试成绩的期望值设置在 75 ～ 80 分(总分 150 分)之间进行命题，试题面广量大，基础性强，难题较多，因此竞争力强，淘汰率高.

考试大纲

数学考试的命题是严格按照国家考试中心制定的"数学考试大纲"所规定的考试内容和考试要求进行的. 该大纲对考试方法、试卷分类和适用专业详细阐明；对各卷考试内容、考试要求和试卷结构均一一详述，它不但是国家考试中心命题的指导性文件，也是广大考生复习迎考的惟一重要依据. 每年的"考试大纲"都有变化，如 2004 年数学二增加了"多元函数微积分学"，并将选择题和填空题的考分比例由原来的 48 分增加到 56 分，总分 150 分不变. 2005 年的"大纲"在"隐函数存在定理"，"平面曲线的切线方程与法线方程"等内容又作了修改，对样卷作了修订. "数学考试大纲"是必备材料，广大考生在复习时要好好研究"大纲"，经常对照"大纲"，明确考试范围和考试要求，了解分数分布，按"大纲"所指明的"了解"、"理解"、"掌握"等不同考试要求有重点地复习.

三轮复习

考研数学复习通常分三轮进行. 第一轮，重温教材，系统复习. 考生将自己在大学一年级时学习的课本认真复习，将自己过去的作业本看一遍，学过的东西抓起来往往容易一些. 第二轮，搜集资料，重点复习. 选择一、二本好的考研复习参考书，将有助于提高阶段的复习质量. 现在市面上考研参考书琳琅满目，有的内容太杂，非常容易的基本题很多，非常难的不适合作考研题的题目也很多. 一本差的参考书可能会误人子弟；一本好的考研参考书可以使你的复习更接近于考试的要求. 此外，选择一个好的辅导班，在名师指导下，除系统复习外，更好地掌握数学方法，把握考研重点，提高应试水平，这也是一个明智的选择. 在辅导层次上有些辅导班又分为基础班、提高班、强化班与冲刺班. 一些基础不好的考生可选基础班和提高班(或强化班)两期，基础较好的考生可选择提高班(或强化班)和冲刺班两期，不要四期全部参加. 辅导班只能助你一臂之力，不可能代替你的复习. 听了辅导班之后还得消化、巩固，认真地、耐心地做一定量的习题. 犹如学习游泳，老是听教练讲如何如何游，怎么也学不会，一定要自己下水去多练习才行. 听课方法也大有学问，要多听，听懂，理解，能达到举一反三. 第三轮，模拟考研，实战演练.

数学的概念和方法一般说来不是一、二遍就能学好的. 必须多次反复、多次学习才能掌握. 学会了还有个熟练的问题. 如果在考试中，基本题不但会做，而且能较熟练地、比别人花较少的时间做对，你就有较多的时间去做难题，难的那怕做对一半也能使你的考分比别人高.

试题分析与解题指导

要收集与研究近几年的研究生入学考试试题，了解题型、题量，知道哪一类题是常考的，哪一类题是必考的，哪一类题是基本不考的. 全国研究生入学统一考试的基本模式是稳定的，虽然每年都有一些新编的题目，但大量的题目还是老脸谱，甚至有相当一部分是雷同题. 例如：

(1) 2005 年数学一、数学二题(8) 与 1999 年数学一题二(1),数学二题二(3);
(2) 2004 年数学一题(18) 与 1996 年数学一题四(1);
(3) 2003 年数学三(19) 与 2002 年数学一题七;
(4) 2003 年数学一题四与 2001 年数学一题五;
(5) 2001 年数学一题一(2) 与 1993 年数学一题一(4);
(6) 2001 年数学一题六与 1997 年数学一题三(2);
(7) 2001 年数学二题八与 1995 年数学一题五;
(8) 2001 数学三、数学四题三与 1997 年数学三题四;
(9) 2001 年数学三、数学四题七与 1996 年数学三题六;
(10) 2000 年数学三、数学四题九与 1991 年数学一题七;
(11) 2000 年数学一题七与 1995 年数学一题一(4);
(12) 2000 年数学三、数学四题五与 1991 年数学三题七;

关于考研试题的特点,主要有下列四点:

第一,研究生入学统一考试一直是以考查"三基"(即基本概念、基本理论和基本方法) 为主线的. 这些考查"三基" 内容的基本题,覆盖面广,基础性强,而且要求有一定的熟练程度. 基本 题的主体是填空题 和选择题,统称为客观题,它是考研的必考题型,从 2004 年起,其题量已稳定在填空题 6 道,选择题 8 道,每道 4 分,共 54 分,占总分的 37%,在整份考研试卷中有着举足轻重的作用. 填空题分值少,只写结果,不写过程,因此作答时要做到:小题小做,小题巧做,运算准确,书写规范. 选择题是一种标准化题型,形式活泼新颖,知识面宽,综合性强,技巧性高. 选择题做的好坏,直接影响到整份试卷的解题速度. 解选择题有两个重要思路,一是肯定 1 条,二是排除 3 条. 下面介绍解选择题的常用方法.

1. 直接法. 从题设条件出发,通过分析、计算、判断,得到一个正确答案,或从 4 个备选答案中挑选出一个给出正面证明,这是解选择题最基本与常用的方法.

例如,2004 年数学一题二(9):设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

解析　由于 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n}} = \lambda \quad (\lambda \neq 0)$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散,应用比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,故选(B). 若改用排除法,欲举出反例否定其他三条,难度将大大增加.

2. 排除法. 若从正面入手,不易挑选出正确答案时,可从反面入手,逐一排除 3 个不正确的备选答案,则剩下的一个(无须证明) 就是正确答案.

2002 年数学一题二(3) 与数学二题二(4) 是一道相同的选择题:

设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导,则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=0$.

解析 设$f_1(x)=\dfrac{1}{x}\sin(x^2)$，则 $f_1(+\infty)=0$，$f_1(0+)=0$，但是

$$\lim_{x\to+\infty}f'_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)$$

不存在，故排除(A). 设 $f_2(x)=\sin x$，则 $f_2(0+)=0$，$f'_2(0+)=1\neq 0$，故排除(C) 和(D). 剩下的只有选(B) 为正确答案了. 如果用直接法，证明(B) 是有一定难度的.

3. 验证法. 根据题设条件，举一实例进行运算，验证备选答案并从中选择.

例如，1996 年数学一题二(4)：

设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

解析　设 $f(x)=x$，则 $f(0)=0$，$f'(0)=1\neq 0$，且

$$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)t\mathrm{d}t=\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4},$$

于是 $F'(x)=x^3$，$k=3$，故选(C).

4. 图解法. 对于一些具有几何背景的考题，可根据题给条件，画出函数的图形，并数形结合，综合分析，获取正确答案.

例如，1997 年数学一题二(2) 与数学二题二(2)：

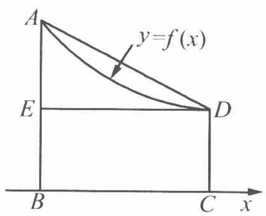
设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令

$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，　$S_2=f(b)(b-a)$，　$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则

(A) $S_1<S_2<S_3$.　(B) $S_2<S_1<S_3$.　(C) $S_3<S_1<S_2$.　(D) $S_2<S_3<S_1$.

解析 根据题设条件，知函数的图形特征是：

位于 x 轴上方，严格减少，下凸. 画出图形如右图. 则 S_1 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积，S_2 是矩形 $EBCD$ 的面积. S_3 是梯形 $ABCD$ 的面积. 由图得知 $S_2<S_1<S_3$，故选(B).



第二，每年都有考查灵活运用重要定理、重要公式的证明题. 除了要理解这些重要定理的条件、结论外，还要针对具体情况灵活运用.

例如 2000 年数学一、二、三、四的试题中有一道全同的证明题：

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，试证：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

该题需用到高等数学的零点定理、定积分中值定理、罗尔定理. 有两种解法：一是先用定积分中值定理，推得 $f(x)$ 的一个零点，再用反证法求得第二个零点；二是构造辅助函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

设法对 $F(x)$ 两次应用罗尔定理推得 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少有两个零点. 绝大部分考生用的是上述第一种方法，上述第二种方法证明很简捷，但使用此方法的考生极少.

又例如 1998 年数学一题九、数学二题八、数学三题六、数学四题七分别是应用罗尔定理、柯西中值定理、拉格朗日中值定理的证明题，在证明中都要根据题意构造辅助函数，这一点对许多考生而言是个难点，要通过做一定数量的习题(包括一定比例的难题) 才能做到.

第三，每年都有一定量的应用题. 在考查"三基" 的基础上，对考生运用所学知识解决实际问题的能力进行考查，在近几年的考研试题中有加强的趋势. 应用题包括几何与物理上的应用(如变力作功，旋转体体

积，弧长，立体的重心等），还有与社会生活有关的其他专门设计的应用题，其中积分学和微分方程的应用是重点. 对文科考生而言，应用导数或偏导数解经济问题中的极值应用题是重点.

例如 2004 年数学一题(16) 同数学二题(20) 是微分方程的应用题，求飞机滑行的最大距离；2003 年数学一题六是定积分与极限的综合应用题，求汽锤打桩的深度；2003 年数学二题九是定积分与微分方程的综合应用题，求容器侧壁的曲线方程；2001 年数学一题八同数学二题九是微积分的应用，求雪堆全部融化所需的时间；2001 年数学四题六是导数在经济上的应用，求利润的最大值. 2000 年数学一题八是三重积分的应用题，求球体的重心坐标；2000 年数学三题五同数学四题五是多元函数极值(拉格朗日乘数法) 在经济上的应用，求产品销售价格使利润取最大值.

第四，每年都有一定量的综合题. 在近几年研究生入学试题中综合题也有加强的趋势. 它要求考生将微积分、线性代数和概率统计这三部分的知识综合起来解题. 这类题往往有一定难度，失分率大，要求考生所学知识融汇贯通，灵活运用.

例如 2005 年数学二题(15)：

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

该题用到变上限积分的求导公式、洛必达法则、定积分中值定理、定积分的换元公式等.

又如 2000 年数学二题十一：

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0,$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时成立不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

该题是导数、积分、微分方程和导数的应用的综合题.

又如 1999 年数学三题一(5)：

设随机变量 $X_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 独立同分布，$\mathrm{E}(X_{ij})=2$，求行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 E(Y). 这是线性代数与概率统计的综合题.

考试艺术

考试时要遵循先易后难，遇难不慌，知一写一的原则.

硕士生入学考试是国家选拔高层次人才的水平考试，因此考试题中一定有难题，应试者一定会有不顺手的地方，这时应试者的心态是很重要的，如果遇难题就发慌，再遇难题就不知所措，严重影响甚至放弃后面的考试，那是一定考不好的. 有这样的一个真实的例子，1998 年硕士生入学考试中有一位考生数学考了 38 分，其他 4 门都过线，总分超过分数线 15 分，结果落榜. 该考生非常懊恼地回忆道：数学考试时很不顺手，几道题不会做，认为一定完了，就没有信心做余下的题，没想到最后数学单科的分数线是 40 分(注：数学单科的分数线 2002 年前一般在 50 ～ 55 之间，2003 年后一般在 75 ～ 80 分之间.) 如果当时心态好一点，认真做余下的题，多拿 5 ～ 10 分一定没问题. 广大考生应从这个例子中吸取教训，应试时会做的题，能拿分的题先解；难题或自己没有见过的题型要逐个攻克，能写几步写几步(评分是按步给分)；没有把握的题，分析题意，估计用什么公式，写出有关的思路和公式有时也能得 1 ～ 2 分；有些题或一些解题步骤很难，得分又少，放到最后思考或者大胆地放弃；最后还一定要腾出时间复查一遍，纠正笔误或不足之处. 如果能将有限的时间都花在能得分的解题上，达到高水平发挥，就一定能获得好成绩，实现自己的理想.

1994 年数学三试题与解析

1994 年数学三试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1) $\int_{-2}^{2} \frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x =$ ________;

(2) 已知 $f'(x_0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)} =$ ________;

(3) 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________;

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,其中 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________;

(5) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件$\{X \leqslant \frac{1}{2}\}$出现的次数,则 $P\{Y=2\}=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的圆括号内)

(1) 曲线 $y=\mathrm{e}^{1/x^2}\arctan\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有　　(　　)

(A) 1 条.　(B) 2 条.　(C) 3 条.　(D) 4 条.

(2) 设常数 $\lambda>0$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$　　(　　)

(A) 发散.　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　(D) 收敛性与 λ 有关.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1,则　　(　　)

(A) $r>r_1$.　(B) $r<r_1$.

(C) $r=r_1$.　(D) r 与 r_1 的关系依 $\boldsymbol{C}$ 而定.

(4) 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,则　　(　　)

(A) 事件 A 和 B 互不相容.　(B) 事件 A 和 B 互相对立.

(C) 事件 A 和 B 互不独立.　(D) 事件 A 和 B 相互独立.

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值,记

$$s_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ s_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$s_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\ s_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是　(　)

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s_1/\sqrt{n-1}}$.　(B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s_2/\sqrt{n-1}}$.

(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s_3/\sqrt{n}}$.　(D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s_4/\sqrt{n}}$.

三、(本题满分 6 分)

计算二重积分

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$.

四、(本题满分 5 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2,\quad y'(0)=-4. \end{cases}$$

求广义积分

$$\int_0^{\infty} y(x)\,\mathrm{d}x.$$

五、(本题满分 5 分)

已知 $f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$,求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

六、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0$,$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线,求

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0);

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x.

八、(本题满分 6 分)

假设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续,$f''(x)$ 在 (a,∞) 内存在且大于零,记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad (x>a),$$

证明:$F(x)$ 在 (a,∞) 内单调增加.

九、(本题满分 11 分)

设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 证明:若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等,则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$. 且已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是该方程组的两个解,其中

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

写出此方程组的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 x 和 y 应满足的条件.

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且同分布,

$$P\{X_i = 0\} = 0.6, \quad P\{X_i = 1\} = 0.4 \quad (i = 1,2,3,4).$$

求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

十二、(本题满分 8 分)

假设由自动线加工的某种零件的内径 X(毫米)服从正态分布 $N(\mu, 1)$,内径小于 10 或大于 12 的为不合格品,其余为合格品,销售每件合格品获利,销售每件不合格品亏损,已知销售利润 T(单位:元)与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T = \begin{cases} -1, & \text{若 } X < 10; \\ 20, & \text{若 } 10 \leqslant X \leqslant 12; \\ -5, & \text{若 } X > 12. \end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时,销售一个零件的平均利润最大?

1994 年数学三试题解析

一、填空题

1 $\ln 3$.

考点提示 定积分的计算.

思路点拨 注意利用奇、偶函数在对称区间上的积分的性质.

【解】
$$\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}dx+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}dx$$
$$=0+2\int_{0}^{2}\frac{x}{2+x^2}dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{2+x^2}d(2+x^2)=\ln(2+x^2)\Big|_{0}^{2}=\ln 3.$$

2 1.

考点提示 函数的极限.

思路点拨 应用导数的定义.

【解】 先将分式颠倒:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-x)}{x}$$

为应用 $f'(x_0)$ 的定义,引进辅助项

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$$
$$=-2f'(x_0)+f'(x_0)=-f'(x_0),$$

故
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}=\frac{-1}{f'(x_0)}=1.$$

3 $-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$.

考点提示 隐函数的导数.

思路点拨 利用一元隐函数的求导法.

【解】 视 $y=y(x)$,在所给方程两端对 x 求导,得 $e^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x$,解得
$$y'=-\frac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}.$$

技巧评点 也可利用公式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

考点提示 逆矩阵.

思路点拨 可以利用初等行变换(解法 Ⅰ),也可利用分块矩阵的求逆公式(解法 Ⅱ).

解法 Ⅰ

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc:cccccc} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc:cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a^n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right),$$

所以