清华大学研究生公共课教材——数学系列

# 泛函分析基础

步尚全 编著

清华大学出版社

清华大学研究生公共课教材—— 数学系列

# 泛函分析基础

步尚全 编著

清华大学出版社
北京

**内 容 简 介**

本书主要论述泛函分析的基本内容及其在分析及逼近论中的应用. 全书共分为五大部分，依次论述度量空间、赋范空间、内积空间、赋范空间中的基本定理及有界线性算子的谱论.

本书可以作为综合性大学工科各专业学生以及没有修过实变函数的理科各专业学生学习泛函分析的教材，也可以作为数学系学生学习泛函分析时的参考书.



**图书在版编目（CIP）数据**

泛函分析基础/步尚全编著. —北京：清华大学出版社，2011.5
（清华大学研究生公共课教材. 数学系列）
ISBN 978-7-302-25057-9

Ⅰ. ①泛… Ⅱ. ①步… Ⅲ. ①泛函分析—研究生—教材 Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 046013 号

**责任编辑：** 刘 颖
**责任校对：** 王淑云
**责任印制：** 杨 艳

**出版发行：** 清华大学出版社 **地 址：** 北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编：** 100084
**社 总 机：** 010-62770175 **邮 购：** 010-62786544
**投稿与读者服务：** 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈：** 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者：** 北京市清华园胶印厂
**经 销：** 全国新华书店
**开 本：** 185×230 **印 张：** 12.75 **字 数：** 276 千字
**版 次：** 2011 年 5 月第 1 版 **印 次：** 2011 年 5 月第 1 次印刷
**印 数：** 1～4000
**定 价：** 22.00 元

---

产品编号：040418-01

# 前　言

泛函分析是数学的一个抽象分支，它起源于经典分析．人们在研究各种实际数学问题时发现，虽然他们研究的对象不同，有时可能是序列，有时可能是函数，有时可能是欧氏空间中的点，但他们研究这些问题的方法和技巧本质上是一样的．人们根据这个事实，通过对问题的提炼，而获得了解决这些问题有效而统一的途径，形成了一套综合应用代数、分析和几何的理论，这就是泛函分析的起源．泛函分析与数学的几乎所有学科均有内在的联系，在微分方程的现代理论、调和分析、随机过程与随机分析学、计算数学、生物数学以及经济数学等数学分支中有着十分重要的应用．泛函分析在规划与优化、电子信息、控制论、自动化及管理学等方面也有着十分重要的应用，这也是越来越多的大学对工科学生开设泛函分析这门课程的原因．

本书是针对工科各专业学生和没有修过实变函数的数学系学生讲授的泛函分析教材．考虑到工科学生一般仅仅掌握高等数学的基本内容，对于较深的数学内容（如拓扑、Lebesgue 积分及集合论）所知甚少，我们在本书的编写过程中力图避开应用这些较深的数学内容．考虑到工科学生的数学基础，我们尽量将所编内容细化，在证明的推导过程中尽力给出详细过程．只要了解高等数学基本内容的学生就可以不费力地读懂此书，从而掌握泛函分析的基本内容及其在实际中的应用技巧．我们希望学生们通过对详细推导过程的阅读和理解，不光可以掌握泛函分析的基本内容和应用技巧，也可以同时提高他们的抽象逻辑思维能力，这对他们以后在学习和工作中掌握更加深入的数学知识是十分必要的．

本书涵盖了泛函分析的基本内容．第 1 章讨论度量空间，这是全书的基础．在这一部分中，将给出度量空间的基本例子，研究度量空间的基本性质，包括开集、闭集、内部、闭包、稠密性、序列的收敛性、可分性、完备性、紧性、映射的连续性等，在这一部分里还将介绍著名的 Banach 不动点定理，它在数学的许多分支均有重要的应用．第 2 章讲授赋范空间的基本内容，包括线性空间的维数、Hamel 基、线性算子、线性泛函以及线性泛函的表示等．第 3 章研究内积空间，主要内容包括 Hilbert 空间的正交投影、正交分解、标准正交基以及 Hilbert 空间上有界线性泛函的表示等．第 4 章是本书的核心内容，将建立赋范空间中的四大基本定理，即 Hahn-Banach 定理、一致有界性原理、开映射定理和闭图像定理，在这一章里还将给出这些基本定理的几个应用．第 5 章主要讨论有界线性算子的谱论，首先给出谱论的一般理论，然后研究紧算子的谱论及自伴算子的谱论．

由于工科学生更加注重泛函分析的应用，我们在每个重要理论之后力图多给一些此类抽象理论的具体应用．这些应用包括 Banach 不动点定理在求解线性方程组、微分方程初值问题解的局部存在性、求解函数积分方程及隐函数存在定理方面的应用．在第 4 章的最后

一节，给出了泛函分析在逼近论中的几个应用，包括 Chebyshev 多项式、最小二乘法及三阶样条函数等. 另外在第 4 章还给出了一致有界性原理在周期函数傅里叶级数收敛性、序列的可求和性以及求数值积分等方面的几个典型应用. 为了使所讲授的主要内容紧凑些，将与集合的半序性及势的概念与基本性质安排在附录中，以便于读者自己补充这方面的知识.

本书是作者在清华大学多年讲授针对工科研究生的基础泛函分析这门课程的讲义基础上形成的. 在本书的撰写过程中，得到了不少专家、同事及这门课程助教们的支持和帮助，作者借此机会一并向他们表示衷心的感谢. 对于书中的疏漏之处，也请读者给予批评指正.

步尚全

2010 年 9 月于清华园

# 符 号 表

| | |
|---|---|
| $\mathbb{K}$ | 实数集或复数集 |
| $\mathbb{R}$ | 实数集 |
| $\mathbb{C}$ | 复数集 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数集 |
| $\mathbb{N}$ | 自然数集 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数集 |
| $\mathrm{Re}(\lambda)$ | 复数 $\lambda$ 的实部 |
| $\mathrm{Im}(\lambda)$ | 复数 $\lambda$ 的虚部 |
| $\bar{\lambda}$ | 复数 $\lambda$ 的共轭复数 |
| $d(x,y)$ | 从 $x$ 到 $y$ 的度量 |
| $B(x,r)$ | 以 $x$ 为中心以 $r$ 为半径的开球 |
| $\bar{B}(x,r)$ | 以 $x$ 为中心以 $r$ 为半径的闭球 |
| $S(x,r)$ | 以 $x$ 为中心以 $r$ 为半径的球面 |
| $M^{\circ}$ | $M$ 的内部 |
| $\overline{M}$ | $M$ 的闭包 |
| $M'$ | $M$ 的导集 |
| $\rho(x,M)$ | 点 $x$ 到集合 $M$ 的距离 |
| $\mathrm{diam}(M)$ | 集合 $M$ 的直径 |
| $s$ | 全体数列之集 |
| $\ell^p(1\leqslant p<\infty)$ | $p$-阶可和的数列空间 |
| $\ell^{\infty}$ | 有界数列空间 |
| $c_0$ | 收敛到 0 的数列空间 |
| $C[a,b]$ | 闭区间$[a,b]$上的连续函数空间 |
| $D(T)$ | 线性算子 $T$ 的定义域 |
| $N(T)$ | 线性算子 $T$ 的零空间 |
| $R(T)$ | 线性算子 $T$ 的像空间 |
| $I_X$ | $X$ 上的恒等映射 |
| $\mathrm{span}(M)$ | 由 $M$ 生成的线性子空间 |
| $\dim(X)$ | 线性空间 $X$ 的维数 |
| $X^*$ | 线性空间 $X$ 的代数对偶空间 |

| | |
|---|---|
| $X'$ | 赋范空间 $X$ 的对偶空间 |
| $X''$ | 赋范空间 $X$ 的二次对偶空间 |
| $\Vert T \Vert$ | 线性算子 $T$ 的范数 |
| $B(X,Y)$ | 从赋范空间 $X$ 到赋范空间 $Y$ 的有界线性算子空间 |
| $B(X)$ | 赋范空间 $X$ 上的有界线性算子空间 |
| $T(M)$ | 集合 $M$ 通过映射 $T$ 下的像集 |
| $T^{-1}(M)$ | 集合 $M$ 在映射 $T$ 下的逆像 |
| $T^*$ | 算子 $T$ 的共轭算子或伴随算子 |
| $X/M$ | 商空间 |
| $\hat{x}$ | 商空间中 $x$ 所代表的等价类 |
| $G_T$ | 线性算子 $T$ 的图像 |
| $x_n \to x$ | $\{x_n\}$收敛到 $x$ |
| $x_n \rightharpoonup x$ | $\{x_n\}$弱收敛到 $x$ |
| $BV[a,b]$ | $[a,b]$上的有界变差函数空间 |
| $\Vert \omega \Vert_{bv}$ | $\omega$ 的有界变差范数 |
| $J: X \to X''$ | 从赋范空间 $X$ 到其二次对偶空间 $X''$的典范映射 |
| $M^\perp$ | $M$ 的正交补 |
| $\rho(T)$ | 线性算子 $T$ 的预解集 |
| $\sigma(T)$ | 线性算子 $T$ 的谱集 |
| $\sigma_p(T)$ | 线性算子 $T$ 的点谱 |
| $\sigma_c(T)$ | 线性算子 $T$ 的连续谱 |
| $\sigma_r(T)$ | 线性算子 $T$ 的剩余谱 |
| $r(T)$ | 有界线性算子 $T$ 的谱半径 |
| $\omega(T)$ | 有界线性算子 $T$ 的数值值域 |
| $R(T)$ | 有界线性算子 $T$ 的数值半径 |
| $R(\lambda,T)$ | 线性算子 $T$ 的预解式 |
| $M \oplus N$ | $M$ 与 $N$ 的直和 |
| $K(X,Y)$ | 赋范空间 $X$ 到赋范空间 $Y$ 的紧算子空间 |
| $K(X)$ | 赋范空间 $X$ 到 $X$ 的紧算子空间 |

# 目　　录

# 第1章 度量空间

本章将研究度量空间的基本结构，给出度量空间的基本例子，讨论度量空间的完备性、可分性，子集的稠密性、紧性，序列的收敛性，度量的等价性，度量空间之间映射的连续性. 在最后一节，介绍 Banach 不动点定理及其应用. 这一章提供了全书的基础知识.

## 1.1 度量空间的定义及例子

度量空间是泛函分析最基本的研究框架，其在泛函分析中的作用如同实数集 $\mathbb{R}$ 在微积分中的作用. 事实上，它是实数集 $\mathbb{R}$ 的推广. 度量空间为统一处理分析各个分支中的重要问题提供了一个共同基础. 度量空间是更加一般的拓扑空间的特例，但在泛函分析研究中我们仅限于度量空间的研究. 也就是说在泛函分析中我们将要遇到的空间均为度量空间.

度量空间的概念起源于经典分析，人们在研究线性常微分方程、偏微分方程、变分法以及逼近论时，发现不同领域的不同问题虽然提法不一样，但却具有相互关联的特征和性质. 人们由此通过去伪存真的提炼，获得了处理这些问题的一个有效统一的途径，度量空间的概念和内容就是这样一个十分标准的例子. 在以后的章节里我们还会接触到赋范空间和内积空间的概念，其结构和内容较度量空间更加丰富. 在泛函分析研究中，我们经常将符合一定要求的元素放在一起所构成的集合称之为一个"空间"，而该空间中的元素称之为该空间的"点". 这样的点可以是欧氏空间中真正意义下的点，也可以是数列或函数. 在泛函分析中我们很少研究一个点(如一个函数或是一个数列)的具体性质，而是研究一个空间中点与点之间的关系，以及空间中符合一定条件的点组成的该空间子集的一些性质.

有时我们需要在空间中的两点间研究它们之间的"距离"，比如欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的欧氏距离

$$d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2},$$

或是闭区间 $[a,b]$ 上两个连续函数之间的平均距离

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

这些距离表面上可能会很不一样，即使在同一个空间上的不同距离在形式上也可能千变万化，但本质上空间中两点距离最主要的性质可以归纳为四条，这就是将要引入的四条度量公理.

**定义 1.1.1** 设 $X$ 为集合，$d$ 为 $X\times X$ 上的实值函数. 称 $d$ 为 $X$ 上的**度量**(也称为距

离),若 $d$ 满足下述公理:

(1) $\forall x,y\in X, d(x,y)\geqslant 0$(非负性);

(2) 若 $x,y\in X$,则 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$(非退化性);

(3) $\forall x,y\in X, d(x,y)=d(y,x)$(对称性);

(4) $\forall x,y,z\in X, d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$(三角不等式).

此时称序对 $(X,d)$ 为**度量空间**(也称为**距离空间**),为叙述方便,有时也简称 $X$ 为度量空间. $d(x,y)$ 称为从 $x$ 到 $y$ 的**度量**(或**距离**). $X$ 中的元素称为度量空间 $(X,d)$ 中的**点**.

定义 1.1.1 中的四个条件称为度量公理. 由度量公理中的三角不等式可以得到广义三角不等式:任给 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$,有

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n).$$

另外,若 $Y\subset X$,则 $d$ 在 $Y\times Y$ 上的限制 $d|_{Y\times Y}$ 为 $Y$ 上的度量,从而 $(Y,d|_{Y\times Y})$ 也为度量空间,我们称此度量空间为 $(X,d)$ 的(度量)子空间,简记为 $Y$.

很多常见的集合都可以赋予一个度量而成为度量空间. 在本书中,我们用 $\mathbb{K}$ 来统一表示复数集 $\mathbb{C}$ 或实数集 $\mathbb{R}$.

**例 1.1.1**　设数集 $A\subset\mathbb{K}$. 任给 $x,y\in A$,令 $d(x,y)=|x-y|$. 则 $d$ 为 $A$ 上的度量.

**例 1.1.2**　设 $1\leqslant p<\infty$, $A\subset\mathbb{K}^n$,其中 $n\geqslant 1$. 任给 $A$ 中元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,令

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\Big)^{1/p}.$$

则 $d_p$ 为 $A$ 上的度量. 事实上,度量公理中的前三条很容易验证,第四条我们将在 Hölder 不等式(定理 1.1.1)建立之后给出证明.

**例 1.1.3**　设 $A\subset\mathbb{K}^n$,其中 $n\geqslant 1$. 任给 $A$ 中元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,令

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

则 $d_\infty$ 为 $A$ 上的度量. 度量公理的前三条容易验证的. 为了证明三角不等式,任取 $A$ 中元素

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),\quad \boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

对于 $1\leqslant i\leqslant n$,利用数集 $\mathbb{K}$ 中的三角不等式有

$$|x_i-y_i|\leqslant|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\leqslant d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+d_\infty(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}),$$

从而

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+d_\infty(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}).$$

这就证明了 $d_\infty$ 满足三角不等式.

**例 1.1.4**　设 $a<b$,令 $C[a,b]$ 为所有闭区间 $[a,b]$ 上连续函数构成的集合. 由连续函数的性质,任给 $x\in C[a,b]$,函数 $|x|$ 必在 $[a,b]$ 达到上确界,即存在 $t_0\in[a,b]$ 使得 $|x(t_0)|=$

$\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$. 对于 $x,y\in C[a,b]$,令

$$d_\infty(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

则 $d_\infty$ 为 $C[a,b]$ 上的度量. 事实上,度量公理的前三条也是显然成立的. 若 $x,y,z\in C[a,b]$,$t\in[a,b]$,则

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\leqslant d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y),$$

因此有

$$d_\infty(x,y)\leqslant d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y).$$

这就证明了三角不等式. 如果不加特殊说明，以后我们在考虑连续函数空间 $C[a,b]$时，总赋予这个度量.

**例 1.1.5** 设 $X$ 为集合,若 $x,y\in X$,定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

我们来证明 $d$ 为 $X$ 上的度量. 度量公理中的前三条由定义容易验证. 设 $x,y,z\in X$,若 $x=y$,则由定义有 $d(x,y)=0$,又因为 $d(x,z)\geqslant0$ 及 $d(z,y)\geqslant0$,所以必有

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

若 $x\neq y$,则 $d(x,y)=1$. 由于 $x\neq y$,所以要么 $x\neq z$,要么 $z\neq y$,从而要么 $d(x,z)=1$,要么 $d(z,y)=1$,又由于 $d(x,z)$和 $d(z,y)$均为非负的,所以总有

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

这就证明了 $d$ 满足三角不等式. 这个度量 $d$ 称为 $X$ 上的**离散度量**,$(X,d)$称为**离散度量空间**.

**例 1.1.6** 设

$$s=\{\{x_n\}:x_n\in\mathbb{K}\}$$

为所有数列的集合. 若 $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}\in s$,令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

由于

$$\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\leqslant1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\infty,$$

所以 $d(x,y)$的定义有意义. 下面证 $d$ 为 $s$ 上的度量. 度量公理中的前三条是显然成立的. 为证三角不等式,考虑函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$,其中 $t\geqslant0$. 我们有 $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$,因此 $f$ 为单调递增函数. 任给

$$x=\{x_n\},\quad y=\{y_n\},\quad z=\{z_n\}\in s,$$

则

$$\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}=f(|x_n-y_n|)\leqslant f(|x_n-z_n|+|z_n-y_n|)$$
$$=\frac{|x_n-z_n|+|z_n-y_n|}{1+|x_n-z_n|+|z_n-y_n|}\leqslant\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}+\frac{|z_n-y_n|}{1+|z_n-y_n|}.$$

不等式两边同时乘以$\frac{1}{2^n}$,然后求和即为三角不等式

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

**例 1.1.7**　设$(X_1,d_1)$,$(X_2,d_2)$为度量空间,考虑笛卡儿乘积

$$X=X_1\times X_2=\{(x_1,x_2):x_1\in X_1,x_2\in X_2\}.$$

在 $X$ 上定义

$$d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}.$$

则易证 $d_\infty$ 为 $X$ 上的度量.

**例 1.1.8**　令$\ell^\infty$为所有有界数列构成的集合,即数列 $x=\{x_n\}\in\ell^\infty$ 当且仅当存在与 $x$ 有关的常数 $C\geqslant 0$,任给 $n\geqslant 1$,有$|x_n|\leqslant C$. 若 $x,y\in\ell^\infty$,$x=\{x_n\}$,$y=\{y_n\}$,令

$$d_\infty(x,y)=\sup_{n\geqslant 1}|x_n-y_n|.$$

则 $d_\infty$为$\ell^\infty$上的度量. 事实上,度量公理中的前三条是显然成立的. 为了证明三角不等式,设 $x,y,z\in\ell^\infty$,

$$x=\{x_n\},\quad y=\{y_n\},\quad z=\{z_n\}.$$

则

$$|x_n-y_n|\leqslant|x_n-z_n|+|z_n-y_n|\leqslant d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y),$$

从而

$$d_\infty(x,y)\leqslant d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y).$$

即三角不等式对 $d_\infty$成立.

**例 1.1.9**　设 $1\leqslant p<\infty$,称数列 $x=\{x_n\}$为 **$p$-阶可和的数列**,若

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty.$$

我们用$\ell^p$表示所有 $p$-阶可和的数列构成的集合. 若 $x,y\in\ell^p$,

$$x=\{x_n\},\quad y=\{y_n\},$$

令

$$d_p(x,y)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\Big)^{1/p}.$$

则 $d_p(x,y)$有意义,这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n|+|y_n|)^p\leqslant 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\max\{|x_n|,|y_n|\}^p$$

$$= 2^p\sum_{n=1}^{\infty}\max\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \leqslant 2^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)<\infty.$$

$d_p$ 为$\ell^p$上的度量. 度量公理中的前三条也是显然成立的. 三角不等式则是下述 Hölder 不等式的直接推论.

**定理 1.1.1**(Hölder 不等式) 设 $1<p,q<\infty$且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$(此时称 $p,q$ 互为**共轭指数**), $x=\{x_n\}\in\ell^p$, $y=\{y_n\}\in\ell^q$. 则$\{x_ny_n\}\in\ell^1$且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}. \tag{1.1}$$

**证明** 由$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 易得$(p-1)(q-1)=1$. 考虑函数 $u=t^{p-1}$, 其中 $t\geqslant 0$. 其反函数为 $t=u^{q-1}$, 其中 $u\geqslant 0$. 设 $\alpha>0$, $\beta>0$. 曲线 $u=t^{p-1}$ 的图像将 $Otu$ 平面上由$(0,0)$, $(0,\beta)$, $(\alpha,\beta)$及$(\alpha,0)$所组成的矩形分为两部分 Ⅰ 和 Ⅱ. 此时有两种可能性, 如图 1.1 所示.

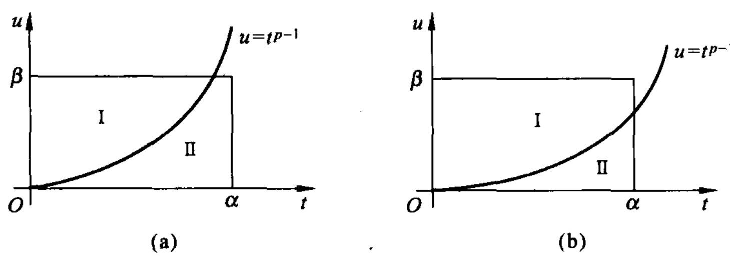


图 1.1

如果是图 1.1(a)的情形, 则上述矩形的面积 $\alpha\beta$ 是两部分 Ⅰ 和 Ⅱ 的面积之和, 第一部分的面积等于 $u=t^{p-1}$ 的反函数 $t=u^{q-1}$ 在区间$[0,\beta]$上的积分, 第二部分的面积则小于等于函数 $u=t^{p-1}$ 在区间$[0,\alpha]$上的积分, 从而

$$\alpha\beta \leqslant \int_0^{\alpha}t^{p-1}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\beta}u^{q-1}\,\mathrm{d}u. \tag{1.2}$$

易见上式在图 1.1(b)的情形也成立. 因此我们总有

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\beta^p}{p}+\frac{\alpha^q}{q}.$$

上式当 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 时显然也成立. 若

$$x=\{x_n\}\in\ell^p,\quad y=\{y_n\}\in\ell^q$$

满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q=1.$$

利用已证不等式(1.2), 有

$$|x_ny_n|=|x_n||y_n|\leqslant\frac{|x_n|^p}{p}+\frac{|y_n|^q}{q},$$

从而,成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leqslant\frac{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p}{p}+\frac{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

若数列 $x=\{x_n\}$ 的每项均为 0 或者数列 $y=\{y_n\}$ 的每项均为 0,则 Hölder 不等式(1.1)显然成立. 因此不妨假设

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p>0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q>0.$$

考虑序列 $x'=\{x'_n\}\in\ell^p$,$y'=\{y'_n\}\in\ell^q$,其中

$$x'_n=\frac{x_n}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}},\quad y'_n=\frac{y_n}{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}}.$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x'_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|y'_n|^q=1.$$

由已经证明的结论可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x'_ny'_n|\leqslant 1.$$

等价地,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}.$$ □

**注 1.1.1**　(1)当 $p=q=2$ 时,由 Hölder 不等式,若 $x=\{x_n\}$,$y=\{y_n\}\in\ell^2$,则有 $\{x_ny_n\}\in\ell^1$,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{1/2}.\tag{1.3}$$

这是著名的 **Cauchy-Schwarz 不等式.**

(2) Hölder 不等式在 $p=1$,$q=\infty$ 时也是成立的,即任给

$$x=\{x_n\}\in\ell^1,\quad y=\{y_n\}\in\ell^\infty,$$

则 $\{x_ny_n\}\in\ell^1$,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\sup_{n\geqslant1}|y_n|.\tag{1.4}$$

这是由于任取 $n\geqslant1$,显然有

$$|x_ny_n|\leqslant|x_n|\sup_{n\geqslant1}|y_n|.$$

对这个不等式求无穷和就可以得到式(1.4).

(3) Hölder 不等式(1.1)对任意数列 $x=\{x_n\}$ 和 $y=\{y_n\}$ 均成立. 事实上,若 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=\infty$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q=\infty$,则 Hölder 不等式退化为

$$\infty\leqslant(\infty)\cdot(\infty),0\leqslant 0\cdot(\infty),0\leqslant(\infty)\cdot 0 \text{ 或 } \infty\leqslant c(\infty).$$

在 $p=1,q=\infty$ 情形,我们也有类似结果.

利用 Hölder 不等式(1.1),我们可以证明例 1.1.9 中定义的度量 $d_p$ 满足三角不等式. 设 $x=\{x_n\}\in\ell^p,y=\{y_n\}\in\ell^p$. 则有

$$|x_n+y_n|^p\leqslant|x_n||x_n+y_n|^{p-1}+|y_n||x_n+y_n|^{p-1}.$$

因此由 Hölder 不等式(1.1),得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x_n||x_n+y_n|^{p-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n||x_n+y_n|^{p-1}\\ &\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\\ &\quad+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}\\ &=\Big(\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\Big)^{1/p}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

注意到 $(p-1)q=p$ 及 $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$,我们就可以得到著名的 **Minkowski 不等式**:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\Big)^{1/p}. \tag{1.5}$$

若 $x=\{x_n\}\in\ell^p,y=\{y_n\}\in\ell^p,z=\{z_n\}\in\ell^p$,则应用 Minkowski 不等式(1.5),有

$$\begin{aligned}d_p(x,y)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\Big)^{1/p}&=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|(x_n-z_n)+(z_n-y_n)|^p\Big)^{1/p}\\ &\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-z_n|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|z_n-y_n|^p\Big)^{1/p}=d_p(x,z)+d_p(z,y).\end{aligned}$$

即 $\ell^p$ 中的三角不等式成立.

若 $A\subset\mathbb{K}^n$ 且 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $A$ 中元素,对 $k\geqslant n+1$,令 $x_k=y_k=0$. 则 $x,y$ 可以自然地视为 $\ell^p$ 中的元素. 应用已证的 $\ell^p$ 空间中的三角不等式可以得到例 1.1.2 中定义的度量 $d_p$ 的三角不等式.

**例 1.1.10** 若 $a<b,1\leqslant p<\infty$,闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 还可以赋予如下度量:

$$d_p(x,y)=\Big(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

度量公理中前三条是显然成立的. 在 $p=1$ 情形,关于 $d_1$ 的三角不等式是显然成立的,在 $1<p<\infty$ 情形,要建立关于 $d_p$ 的三角不等式,需要用到关于连续函数的 Hölder 不等式

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q},$$

其中 $x,y\in C[a,b]$,且 $1<p,q<\infty$ 互为共轭指数. 我们在这里不给出其证明,有兴趣的读者可以比照定理 1.1.1 的证明给出其完整证明.

## 1.2 开集和闭集

正如我们在引入度量空间概念时所说的那样,在泛函分析中很少研究度量空间中某个点的具体性质,而是研究该空间中符合一定条件的点组成集合的具体性质,以及该空间中不同集合间的内在联系. 我们下面要引入的度量空间中的开球、闭球和球面的概念是欧氏空间中相应概念在度量空间中的自然推广.

设$(X,d)$为度量空间,$x_0\in X$,$r>0$. 令

$$B(x_0,r)=\{x\in X:d(x_0,x)<r\},$$
$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X:d(x_0,x)\leqslant r\},$$
$$S(x_0,r)=\{x\in X:d(x_0,x)=r\}.$$

称 $B(x_0,r)$为以 $x_0$ 为中心以 $r$ 为半径的**开球**,称 $\overline{B}(x_0,r)$为以 $x_0$ 为中心以 $r$ 为半径的**闭球**,$S(x_0,r)$则称为以 $x_0$ 为中心以 $r$ 为半径的**球面**.

**例 1.2.1**

(1) 若在$\mathbb{R}^3$上赋予例 1.1.2 中定义的度量 $d_2$,则上面定义的开球、闭球及球面与通常$\mathbb{R}^3$中的相应概念一致.

(2) 设$(X,d)$为离散度量空间,则

$$B(x_0,1)=\{x_0\},\quad \overline{B}(x_0,1)=X,\quad S(x_0,1)=X\setminus\{x_0\}.$$

若 $0<r<1$,则

$$B(x_0,r)=\overline{B}(x_0,r)=\{x_0\},\quad S(x_0,r)=\varnothing.$$

而当 $r>1$ 时,我们有

$$B(x_0,r)=\overline{B}(x_0,r)=X,\quad S(x_0,r)=\varnothing.$$

(3) 设 $X=[0,1]$,赋予例 1.1.1 定义的度量,若 $x_0=\frac{1}{4}$,$r=\frac{1}{2}$,则 $B(x_0,r)=\left[0,\frac{3}{4}\right)$,$\overline{B}(x_0,r)=\left[0,\frac{3}{4}\right]$,$S(x_0,r)=\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

**定义 1.2.1** 设$(X,d)$为度量空间,$M\subset X$,$x_0\in M$. 若存在 $r>0$ 使得 $B(x_0,r)\subset M$,则称 $x_0$ 为 $M$ 的**内点**. $M$ 的所有内点之集称为 $M$ 的**内部**,记为 $M^\circ$. 若 $M=M^\circ$,即 $M$ 的所有点均为内点,则称 $M$ 为 $X$ 的**开子集**,简称**开集**. 称 $F\subset X$ 为 $X$ 的**闭子集**,简称**闭集**,若 $F$ 的余

集 $F^c = X \backslash F$ 为开集.

$M^\circ$总为开集. 事实上,任给 $x \in M^\circ$,存在 $r>0$ 使得 $B(x,r) \subset M$,下证 $B(x,r) \subset M^\circ$:任取 $y \in B(x,r)$,令

$$\delta = \frac{r-d(x,y)}{2} > 0,$$

利用三角不等式易得 $B(y,\delta) \subset B(x,r)$,所以 $B(y,\delta) \subset M$,从而 $y \in M^\circ$. 这就证明了 $B(x,r) \subset M^\circ$,即 $M^\circ$的所有点均是 $M^\circ$的内点,由定义知 $M^\circ$为开集.

$M^\circ$为包含在 $M$ 中的最大开集. 事实上,设 $G \subset M$ 为开集,$x \in G$,则由于 $G$ 是开集,存在 $r>0$ 使得 $B(x,r) \subset G \subset M$,从而 $x$ 为 $M$ 的内点,即 $x \in M^\circ$. 所以 $G \subset M^\circ$.

开球 $B(x,r)$必为开集. 事实上,由三角不等式,若 $y \in B(x,r)$,总有

$$B\left(y, \frac{r-d(x,y)}{2}\right) \subset B(x,r),$$

从而 $y$ 必为 $B(x,r)$的内点. 这就说明 $B(x,r)$为开集.

闭球 $\overline{B}(x,r)$必为闭集. 为此我们来证明其余集是开集. 设 $y \in \overline{B}(x,r)^c$,则 $d(x,y)>r$,令

$$\delta = \frac{d(x,y)-r}{2} > 0,$$

则利用三角不等式易得

$$B(y,\delta) \subset \overline{B}(x,r)^c.$$

这说明 $\overline{B}(x,r)^c$ 的每个点均是其自身的内点,从而 $\overline{B}(x,r)^c$ 为开集. 因此 $\overline{B}(x,r)$为闭集.

需要特别注意的是,不为开集的子集未必是闭集,不为闭集的子集未必一定是开集. 为此可以考虑 $X=\mathbb{R}$ 赋予通常度量的情形,半开半闭区间$(0,1]$既不是开集,也不是闭集.

另外,说一个集合是开集,一定要强调它相对于哪个度量空间. 若$(X,d)$为度量空间,$Y$ 为 $X$ 的子集(则 $Y$ 是 $X$ 的度量子空间),若 $M \subset Y$ 为 $Y$ 的开集,则 $M$ 未必是 $X$ 的开集. 例如,取 $X=\mathbb{R}$ ,$Y=[0,1]$,则半开半闭区间$\left(\frac{1}{2},1\right]$为 $Y$ 的开集,但$\left(\frac{1}{2},1\right]$不为 $X$ 的开集.

**例 1.2.2**

(1) 开区间$(a,b)$为$\mathbb{R}$ 的开集,闭区间$[a,b]$为$\mathbb{R}$ 的闭集. 在$\mathbb{K}^n$中,开球

$$\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2 < r^2\right\}$$

为开集.

(2) 若$(X,d)$为离散度量空间,则 $X$ 的任意子集 $M$ 均为开集. 这是由于任取 $x \in M$,$B\left(x,\frac{1}{2}\right)=\{x\} \subset M$,从而 $M$ 的每个点均是其内点,由定义知 $M$ 为开集. 从而 $X$ 的任意子集均为闭集.