高等数学

解题方法与技巧

上海交通大学数学系 贺才兴 主编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等数学解题方法与技巧

上海交通大学数学系

贺才兴 主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书在介绍相关内容的基础上，指明了重点、难点以及基本概念、方法、公式和定理。在例题和解题方法等方面，共选编了381题，每题均有详解，对较难的题目首先给出分析，然后给出解法，有的甚至给出几种解法和点评，以使读者开阔思路，扩大眼界，融会贯通。

本书适合高等学校、成人高校学生学习，也可作为教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法与技巧/贺才兴主编. —上海：上海交通大学出版社，2011

ISBN978-7-313-06546

Ⅰ. 高… Ⅱ. 贺… Ⅲ. 高等数学—高等学校—解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第103376号

高等数学解题方法与技巧

贺才兴 **主编**

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路951号 邮政编码200030)

电话：64071208 出版人：韩建民

上海交大印务有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16 印张：15.75 字数：296千字

2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷

印数：1～4 030

ISBN 978-7-313-06546-9/0 定价：28.00元

前　　言

本书是为帮助广大读者学习高等数学(微积分),配合教材和考纲而撰写的一本学习辅导书。

全书紧扣教学内容,共分10章。每章包括下列两个部分:

一、基本概念、基本性质和公式;

二、例题和解题方法。

主要介绍了相关的教学内容,指明了重点、难点和认知层次以及基本的概念、方法、公式和定理,再通过典型例题,给出恰当的分析,指出解题的思路和方法,经过推导、论证和计算,开阔思路,扩大眼界,融会贯通,以提高读者分析问题和解决问题的能力,同时更具体地展示了教学内容的深度、广度以及读者所应具备的知识和能力。

总有读者反映,“为什么上课听得懂,题目却做不出?”“为什么题目稍微一变就做不出来?”“为什么一道题目自己要冥思苦想老半天?”……,问题在于要学好高等数学这门课程,必须对基本概念、基本理论和基本方法有较全面的理解,并能准确而灵活地运用。参考一些典型的题目及其解析过程,并独立地思考和演算一些题目,是实现这些目标的有效方法之一。

本书内容充实,概念清楚,重点突出,简明扼要,清晰易懂,层次分明,合理运用“推导”与“归纳”的方法,通过典型例题,教会读者如何思考和分析,使读者从不同内容的内在联系上体会数学思维和应用的精髓,同时加强分析问题和解决问题的综合能力的培养与训练。

审题解题,积累解题经验;总结反思,提炼解题方法;默想记忆,生发解题灵感。一分的记忆减少十分的思考,熟能生巧,思如泉涌,……。

本书由贺才兴教授主编,各讲分别由贺才兴、王铭、何铭、郑麒海和李铮编写。编者希望本书的出版能帮助读者用不太长的时间,花费不很多的精力,对所学过的高等数学知识起到复习、巩固和提高的作用。希望她是一把钥匙,能为广大读者顺利打开成功之门;她是一座桥梁,能引导广大读者顺利通向成功之路;她是一位贴心的优秀辅导老师,能为广大读者真正释疑解难。

本书可供广大学习高等数学知识的高等院校、成人教育的学生参考,也可供有

关的教师和科技工作者参考。

对于书中的不足之处,欢迎广大读者批评指正。

感谢上海交通大学出版社的鼎力帮助。

编　者

于上海交通大学

2010年6月

目　录

第一章　函数 …… 1
一、基本概念、基本性质和公式 …… 1
1. 两个重要不等式 …… 1
2. 数集的界 …… 1
3. 函数 …… 2
二、例题和解题方法 …… 5
1. 不等式 …… 5
2. 函数 …… 6
3. 综合题 …… 11

第二章　极限和连续 …… 14
一、基本概念、基本性质和公式 …… 14
1. 数列的极限 …… 14
2. 函数的极限 …… 16
3. 函数的连续性 …… 20
二、例题和解题方法 …… 22
1. 数列的极限 …… 22
2. 函数的极限 …… 28
3. 函数的连续性 …… 34
4. 综合题 …… 37

第三章　导数及其应用 …… 47
一、基本概念、基本性质和公式 …… 47
1. 导(函)数的定义 …… 47
2. 微分的定义 …… 47
3. 高阶导数的定义 …… 48
4. 与函数性态相关的一些概念 …… 48
5. 曲率的定义,公式 …… 48

6. 求导法则 …… 49
7. 主要定理 …… 49
8. 洛必达(L'Hoslital)法则 …… 50
9. 函数的单调性和凹凸性 …… 50
二、例题和解题方法 …… 51
1. 利用导(函)数定义计算导数 …… 51
2. 利用求导法则和微分计算导数 …… 53
3. 高阶导数计算法 …… 56
4. 导数与微分的一些初步应用 …… 58
5. 微分中值定理与泰勒公式 …… 59
6. 利用导数研究函数性态 …… 67
7. 证明不等式 …… 71

第四章 积分 …… 73
一、基本概念、基本性质和公式 …… 73
1. 定积分的概念 …… 73
2. 不定积分概念 …… 73
3. 变上限积分和 Newton-Leibniz 公式 …… 74
4. 不定积分的基本计算方法 …… 74
5. 几类常见函数的不定积分 …… 74
6. 定积分的基本计算方法 …… 75
7. 广义积分 …… 76
8. 定积分的近似计算 …… 77
9. 定积分的应用 …… 77
二、例题和解题方法 …… 79
1. 定积分概念及性质 …… 79
2. 原函数,不定积分和变上限积分 …… 81
3. 不定积分和定积分的计算 …… 85
4. 广义积分 …… 96
5. 定积分的应用 …… 99
6. 综合题 …… 103

第五章 微分方程 …… 109
一、基本概念、基本性质和公式 …… 109

1. 微分方程的概念 …… 109
2. 一阶微分方程 …… 109
3. 某些可降阶的高阶微分方程 …… 111
4. 线性方程解的结构 …… 111
5. 常系数线性微分方程 …… 113
二、例题和解题方法 …… 115
1. 一阶微分方程 …… 115
2. 可降阶的高阶微分方程 …… 118
3. 二阶变系数齐次方程的刘维尔公式 …… 120
4. 常系数线性微分方程 …… 120
5. 常系数线性方程组 …… 122
6. 应用题 …… 122
7. 综合题 …… 124

第六章　向量代数与空间解析几何 …… 128
一、基本概念、基本性质和公式 …… 128
1. 向量及其运算 …… 128
2. 平面 …… 129
3. 直线 …… 129
4. 平面、直线和点的一些位置关系 …… 130
5. 曲面 …… 131
6. 空间曲线 …… 132
7. 曲面的参数方程 …… 132
二、例题和解题方法 …… 134
1. 向量及其运算 …… 134
2. 平面和直线 …… 139
3. 曲面和曲线 …… 148

第七章　偏导数及其应用 …… 154
一、基本概念、基本性质和主要公式 …… 154
1. 偏导(函)数的定义 …… 154
2. 全微分的定义 …… 154
3. 方向导数与梯度的定义 …… 155
4. 求导法则 …… 155

5. 空间曲线的切线 …… 156
6. 空间曲面的切平面 …… 157
7. 极值　条件极值 …… 157
二、例题和解题方法 …… 157
1. 偏导数与全微分的计算 …… 157
2. 多元函数微分学的几何应用　多元函数的极值 …… 167

第八章　重积分 …… 172
一、基本概念、基本性质和公式 …… 172
1. 二重积分定义 …… 172
2. 二重积分的几何意义 …… 172
3. 二重积分的性质 …… 172
4. 二重积分的对称性 …… 174
5. 二重积分的计算 …… 174
6. 二重积分的变量代换 …… 175
7. 三重积分定义 …… 176
8. 三重积分的性质 …… 176
9. 三重积分的对称性 …… 176
10. 三重积分的计算 …… 177
11. 三重积分的变量代换 …… 179
二、例题和解题方法 …… 180
1. 二重积分的概念与性质 …… 180
2. 化二重积分为二次积分 …… 181
3. 交换二次积分的积分次序 …… 181
4. 计算二重积分 …… 183
5. 二重积分的应用 …… 187
6. 二重积分的变量代换 …… 189
7. 计算二次积分 …… 192
8. 二重积分综合与证明 …… 192
9. 计算三重积分 …… 194
10. 三重积分的变量代换 …… 201

第九章　曲线积分与曲面积分 …… 203
一、基本概念、基本性质和公式 …… 203

1. 数量值函数的曲线积分,质线的质量 …… 203
2. 第一类曲线积分的性质 …… 203
3. 第一类曲线积分的计算 …… 204
4. 向量值函数的曲线积分,变力作功 …… 204
5. 第二类曲线积分的性质 …… 205
6. 两类曲线积分之间的关系 …… 206
7. 第二类曲线积分的计算 …… 206
8. Green 公式 …… 206
9. 平面区域的面积 …… 207
10. 平面曲线积分与路径无关的条件 …… 207
11. 全微分求积,全微分方程 …… 207
12. 数量值函数的曲面积分 …… 208
13. 第一类曲面积分的性质 …… 208
14. 第一类曲面积分的计算 …… 208
15. 向量值函数的曲面积分 …… 209
16. 两类曲面积分之间的联系 …… 209
17. 第二类曲面积分的性质 …… 210
18. 第二类曲面积分的计算 …… 210
二、例题和解题方法 …… 210
1. 第一类曲线积分的计算 …… 210
2. 第二类曲线积分的计算 …… 212
3. Green 公式 …… 213
4. 第一类曲面积分的计算 …… 217
5. 第二类曲面积分的计算 …… 218
6. 高斯公式 …… 220

第十章 级数 …… 223
一、基本概念、基本性质和公式 …… 223
1. 级数的基本概念 …… 223
2. 正项级数及正项级数敛散性的判别法 …… 224
3. 交错级数及莱布尼茨判别法 …… 224
4. 任意项级数的条件收敛和绝对收敛 …… 225
5. 函数项级数 …… 225
6. 幂级数 …… 225

7. 泰勒级数 …………………………………………………… 226
8. 函数展开为幂级数 …………………………………………… 227
9. 常见函数的马克劳林级数 ……………………………………… 227
10. 傅立叶级数 ………………………………………………… 227
二、例题和解题方法 …………………………………………………… 228
1. 数项级数 …………………………………………………… 228
2. 函数项级数 ………………………………………………… 232
3. 幂级数 ……………………………………………………… 233
4. 傅立叶级数 ………………………………………………… 237

第一章　函　数

一、基本概念、基本性质和公式

1. 两个重要不等式

1）A—G 不等式

若 $n\in\mathbb{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbb{R}_+$，则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

2）Bernoulli 不等式

若 $x\geqslant 0, n\in\mathbb{N}$，则

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

2. 数集的界

(1) 设 $E\neq\varnothing$，且 $E\subset\mathbb{R}$，则称 E 是有上界的$\Leftrightarrow$若 $\exists M\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in E$，有 $x\leqslant M$(此时称 M 为 E 的一个**上界**)；称 E 是有下界的$\Leftrightarrow$若 $\exists m\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in E$，有 $x\geqslant m$(此时称 m 是 E 的一个**下界**)；称 E 为有界的$\Leftrightarrow$若 E **既有上界又有下界**.

注　显然，一个数集若有上界，则上界必不唯一. 对下界也有同样的结论.

(2) 设 $E\neq\varnothing$，且 $E\subset\mathbb{R}$. 若 $\exists\beta\in\mathbb{R}$ 满足：(i) $\forall x\in E\, x\leqslant\beta$；(ii) $\forall\delta>0$，$\exists x_\delta\in E$，使得 $x_\delta>\beta-\delta$，则称 β 是 E 的**上确界**，记为 $\beta=\sup E$.

注 1　上确界包含了两层意思：① β 是 E 的上界；② 任何小于 β 的数都不是 E 的上界，因此上确界是最小上界. 类似可定义 E 的下确界 $\inf E$，下确界是最大下界. 上、下确界统称为**确界**.

注 2　若一个数集 E 中存在最大的数 b，记为 $b=\max E$，显然 b 就是 E 的上确界；同样，若 E 中存在最小的数 a，记为 $a=\min E$，那么 a 就是 E 的下确界. 反之，一个数集的上确界(或下确界)并不一定是这数集中的数.

3. 函数

1) 映射的概念

(1) 设 $X,Y\neq\varnothing$,若存在对应法则 T,依此法则,$\forall x\in X$,存在唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称 T 是由 X 到 Y 的映射,记为 $T:X\to Y$,称 y 为 x 在映射 T 下的**像**,记为 $T(x)$,即 $y=T(x)$,而将 x 称为 y 在映射 T 下的**原像**. 集合 X 称为 T 的**定义域**,记为 $D(T)$,即 $X=D(T)$,X 所有元素的像的集合称为 T 的**值域**,记为 $R(T)$,即 $R(T)=\{y\mid y=T(x),x\in X\}$,当然 $R(T)\subset Y$.

(2) 若 $X\to Y$ 的映射 T 的值域 $R(T)=Y$,即 $\forall y\in Y,\exists x\in X$,使得 $T(x)=y$,则称 T 为由 X 到 Y 的**满射**;又若值域 $R(T)$ 中每个元素的原像是唯一的,即 $\forall x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则称 T 为由 X 到 Y 的**单射**;既单又满的映射称为**双射**,双射也称为一一对应.

(3) 设 T 是由 X 到 Y 的双射,则 $\forall y\in Y,\exists$ 唯一 $x\in X$ 与之对应,使得 $y=T(x)$,这样由 Y 到 X 的映射称为 T 的**逆映射**,记为 T^{-1}. 显然,当 T 是双射时,有

$$T^{-1}(T(x))=x\quad(\forall x\in X),$$
$$T(T^{-1}(y))=y\quad(\forall y\in Y).$$

2) 函数的概念

(1) 设 I 为数集,f 是 $I\to R$ 的映射,则称 f 是定义在 I 上的函数,记为 $f:I\to R$ 或 $y=f(x),x\in I$,此时 f 的定义域 $D(f)=I$ 和值域 $R(f)$ 分别称为函数的**定义域**和**值域**;$\forall x_0\in I$ 在 f 下的像 $f(x_0)$(有时也写为 $f\big|_{x=x_0}$ 或 $y\big|_{x=x_0}$)称为 x_0 的函数值. 函数为 $y=f(x)$ 时,函数值 y 随着 x 的取值变化而变化,因此常称 x 为**自变量**,y 为**因变量**.

(2) 确定一个函数需要两要素,即定义域和对应法则. 由解析式给出的函数,其定义域通常就是使解析式有意义的数集,这种定义域称为自然定义域. 对有实际背景的函数,定义域还受到实际条件的约束.

(3) 集合 $C=\{(x,y)\mid x\in D(f),y=f(x)\}$ 在坐标平面上的图形称为**函数 f 的图形**.

(4) 几个特殊的函数:如绝对值函数 $f(x)=|x|$;取整函数 $f(x)=[x]$;符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$,和 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数}),\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$ 的定义、定义域和值域需记住.

3) 函数的运算

(1) 和、差、积、商四则运算,要求两函数具有公共定义域.

(2) 复合运算：设函数 $f:I_1\to R$ 和 $g:I_2\to R$，有 $R(g)\subset D(f)$，则 f 与 g 的复合记为 $f\circ g$，即 $f\circ g:I_2\to R$，$\forall x\in I_2$，$(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

注　若分别记 f 和 g 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，常将 u 称为**中间变量**. 当条件 $R(g)\subset D(f)$ 不满足时，复合运算一般不能进行.

(3) 逆运算：设 $f:I\to R$，且 f 是 $I\to R(f)$ 的双射，则称 f 的逆映射 $f^{-1}:R(f)\to R$ 为 f 的反函数. 函数 $y=f(x)$，$x\in I$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R(f)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

4) *函数的性质*

(1) 奇偶性：若函数 f 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称，f 为奇函数 $\Leftrightarrow\forall x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，奇函数的图形关于原点对称；f 为偶函数 $\Leftrightarrow\forall x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，偶函数的图形关于 y 轴对称.

注　$D(f)$ 关于原点对称是讨论 f 的奇偶性的前提.

(2) 单调性：f 在 I 单调增加 $\Leftrightarrow$ 对 I 上 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$；f 在 I 严格单调增加 $\Leftrightarrow$ 对 I 上 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$；f 在 I 单调减少 $\Leftrightarrow$ 对 I 上 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$；f 在 I 严格单调减少 $\Leftrightarrow$ 对 I 上 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$.

注 1　因为 I 上的严格单调函数是 $I\to R(I)$ 的双射，所以区间 I 上的严格单调函数必定存在反函数.

注 2　函数的单调性是依附区间的.

(3) 有界性：f 在 I 有上界(或有下界) $\Leftrightarrow$ 其值域 $R(f)$ 有上界(或有下界)；

f 在 I 有界 $\Leftrightarrow$ f 在 I 既有上界又有下界 $\Leftrightarrow\exists M>0$，$\forall x\in I$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，此时称 f 是 I 上的有界函数.

非有界函数称为无界函数.

f 是 I 上的无界函数 $\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists x_M\in I$，使得 $|f(x_M)|>M$.

注　讨论函数的有界性时，也应该指明所在区间.

(4) 周期性：f 为周期函数 $\Leftrightarrow$ 存在非零 $T\in\mathbb{R}$，使 $\forall x\in I$ 有 $f(x+T)=f(x)$，T 称为 f 的一个周期. 显然，若 T 为 f 的周期，则 $nT(n\in\mathbb{Z},n\neq 0)$ 也是 f 的周期.

注 1　一般情况下所说的周期是指函数的最小正周期(若存在的话).

注 2　并非所有周期函数都有最小正周期. 如常数函数就是没有最小正周期的周期函数，另一个例子是 Dirichlet 函数.

5) *六类基本初等函数*

(1) 常数函数：$y=c$，$x\in\mathbb{R}$，值域就一个值 c.

(2) 幂函数：$y=x^{\alpha}$，α 为非零常数，其定义域依赖指数 α，例如当 α 为正整数时，x 可为一切实数；α 为负整数时，x 可为非零实数，对一般的 α 而言，定义域为 $\mathbb{R}_+$. 特别当 $\alpha=0$ 时，得到常数函数 $y=1$，$x\in\mathbb{R}$，而当 $\alpha>0$ 时，x^{α} 在 $\mathbb{R}_+$ 是严格单调增

函数，而当 $\alpha<0$ 时，x^α 在 $\mathbb{R}_+$ 是严格单调减函数. 所有的幂函数在 $x=1$ 时取值为 1，从而它们的图形均过(1,1)点.

(3) 指数函数：$y=a^x$，$x\in\mathbb{R}$（其中 a 是不等于 1 的正常数），其值域为 $\mathbb{R}_+$. 当 $a>1$时，a^x 是严格单调增函数，而当 $0<a<1$ 时，a^x 是严格单调减函数. 所有的指数函数在 $x=0$ 时取值为 1，从而它们的图形都过(0,1)点.

(4) 对数函数：$y=\log_a x$，$x\in\mathbb{R}_+$（其中 a 是不等于 1 的正常数），它是指数函数的反函数. 当 $a>1$ 时. $y=\log_a x$ 是严格单调增函数，而当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是严格单调减函数. 所有的对数函数在 $x=1$ 时取值为 0，从而它们的图形都过(1,0)点.

(5) 三角函数：正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$. 正切函数 $y=\tan x$、正割函数 $y=\sec x$ 的定义域为 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$，余切函数 $y=\cot x$、余割函数 $y=\csc x$ 的定义域 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq k\pi\}$. 三角函数都是周期函数.

(6) 反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域均为 $[-1,1]$；反正切函数 $y=\arctan x$、反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 定义域为 $\mathbb{R}$. 反三角函数是三角函数的反函数. 由于三角函数在定义域上不是一一对应的双射，因此是在其一个单调的周期区间上求得的反函数. 例如 $\arcsin x$、$\arctan x$ 分别是正弦函数 $\sin x$、正切函数 $\tan x$ 在相应区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数，它们都是严格单调增加的，而 $\arccos x$、$\operatorname{arccot} x$ 分别是余弦函数 $\cos x$、余切函数 $\cot x$ 在 $[0,\pi]$ 和 $(0,\pi)$ 上的反函数，它们都是严格单调减少的.

6) *初等函数*

(1) 初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所得到的并可用一个式子表示的函数.

注：分段函数往往不是初等函数，因为有的分段函数不能用一个数学式子来表示. 但也不能说分段函数都不是初等函数.

(2) 双曲函数：双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；双曲正切 $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；双曲余切 $\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

(3) 双曲函数的性质：

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x};\cosh^2 x-\sinh^2 x=1;$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y;$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y.$$

7）隐方程、参数方程、极坐标方程表示的函数

(1) 隐函数：有时由方程 $F(x,y)=0$ 并不能解出表达式 $y=y(x)$，但对每一个 x，由方程可得到唯一的 y 与之对应，这样就确定了一个函数，称之为由方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**.

(2) 参数方程：它代表的函数关系是通过参数来联系的，即由形式为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t\in I)$ 的方程给出，其中 x,y 均为 t 的函数，t 则作为一个参与的变量，称为**参数**.

(3) 极坐标方程：$r=r(\theta)$，其与直角坐标的关系为 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta, \end{cases}$ 此方程反映了 x,y 间的关系. 心脏线和双纽线的极坐标方程分别为 $r=a(1-\cos\theta)$ 和 $r^2=a^2\cos 2\theta$.

二、例题和解题方法

1. 不等式

【例 1.1】 证明：不等式 $\sqrt[n]{n}-1<\dfrac{2}{\sqrt{n}}(n\in\mathbb{N})$.

分析 把欲证不等式变形为 $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$，则左端形似 A－G 不等式，故可考虑用 A－G不等式来证明. 当然通过两端 n 次方后也可借助二项式定理来证明.

证 当 $n=1,2$ 时，不等式显然成立，当 $n>2$ 时，根据 A－G 不等式，有

$$\sqrt[n]{n}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+\cdots+1}^{(n-2)}}{n}=\frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

即
$$\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

【例 1.2】 证明：不等式 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，其中 n 为正整数.

分析 利用不等式 $\dfrac{m}{m+1}<\dfrac{m+1}{m+2}$ 和 $\dfrac{m}{m+1}>\dfrac{m-1}{m}$ 即可证得.

证 由不等式 $\dfrac{m}{m+1}<\dfrac{m+1}{m+2}$，得

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)},$$

于是$\left[\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2<\frac{1}{2n+1}$，即$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 再由$\frac{m}{m+1}>\frac{m-1}{m}$，得

$$\begin{aligned}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)(2n)}&>\frac{1}{2}\times\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-4)(2n-2)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-3)(2n-1)}\\&=\left(\frac{2n}{2n}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-4)(2n-2)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-3)(2n-1)}\\&=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)(2n)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-3)(2n-1)}\times\frac{1}{4n},\end{aligned}$$

即
$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

【例 1.3】 设$k,n\in\mathbb{N}$，且$k<n$，求证：$\frac{k^n}{n^n}<\frac{(k+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$.

分析 利用 A－G 不等式证明.

证 由 A－G 不等式

$$\sqrt[n+1]{\frac{k^n}{n^n}}=\sqrt[n+1]{1\times\left(\frac{k}{n}\right)^n}<\frac{1+\frac{k}{n}+\cdots+\frac{k}{n}}{n+1}=\frac{k+1}{n+1},$$

即得
$$\frac{k^n}{n^n}<\frac{(k+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.$$

2. 函数

【例 1.4】 判断下列各题中，$f(x)$和$g(x)$是否相同.

(1) $f(x)=\log_2 x^2$，$g(x)=2\log_2 x$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-2x^3}$，$g(x)=x^3\sqrt{x-2}$.

分析 函数的两个要素是定义域和对应法则. 两个函数当且仅当其定义域和对应法则完全相同时才表示同一个函数.

解 (1) 因为$f(x)$的定义域是$\{x\mid x\in\mathbb{R},x\neq0\}$，$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，所以$f(x)\neq g(x)$.

(2) 注意到$\sqrt[3]{x^3}\equiv x$，可知$f(x)$和$g(x)$的定义域和对应法则完全相同，所以$f(x)=g(x)$.

【例 1.5】 求下面各题中，$f(x)$的表达式：

(1) $f(x-2)=x^2+4x+4$；

(2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-2$.