高等财经院校试用教材

GAO DENG CAIJING YUAN XIAO SHIYONG JIAOCAI

苏均和 主编

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHU LI TONG JI

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／苏均和主编.–北京：中国财政经济出版社，1995

高等财经院校试用教材

ISBN 7–5005–2785–3

I. 概… II. 苏… III. ①概率论–高等学校：专业学校–教材②数理统计–高等学校：专业学校–教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 11332 号

中国财政经济出版社 出版

社址：北京东城大佛寺东街 8 号 邮政编码：100010

涿州市新华印刷厂印刷 各地新华书店经销

850×1168 毫米 32 开 14.75 印张 351 000 字

1995 年 12 月第 1 版 1998 年 3 月涿州第 2 次印刷

印数：3 001—4 160 定价：17.30 元

ISBN 7—5005—2785—3/F·2639(课)

(图书出现质量问题，本社负责调换)

编 审 说 明

本书是全国财经类通用教材。经审阅，我们同意作为高等财经院校试用教材出版。书中不足之处，请读者批评指正。

财政部教材编审委员会

1995 年 2 月 20 日

前　言

这本概率论与数理统计教材是按照财政部“八五”教材建设规划精神和 1992 年 9 月在武汉中南财经大学所确定的概率论和数理统计大纲而编写的。本书主要对象是财经院校统计专业学生。它有如下特点：(1) 在内容、体系的安排上，把统计思想、方法和数学的逻辑程序相结合；(2) 理论联系实际，书中的理论阐述和社会经济活动相结合，以反映财经类的特色，也能使学生学以致用；(3) 本教材可以适应多层次多专业对统计的要求，即适应面广。

概率论与数理统计在科学技术、社会经济等各领域都有广泛的应用性。本书分为两大部分。第一部分为概率论，它包括第一、二、三、四章。这部分内容主要对概率论的基本概念和理论作了较为详细的阐述，并运用大量例子介绍和说明这些概念和理论的实际背景和运用方法。第二部分是数理统计部分，包括第五、六、七、八、九章。这部分涉及面广，应用性强，我们主要对基本概念尤其是它的方法作了严格的证述和介绍。对这些方面最新动态也作了相应的阐述。本书全部讲完约需 110 学时。如果对象是非统计专业学生可以删去有关章节以 72 学时完成。

参加本书编写的有：中央财政金融学院曹克明（第一、二章）；山东财政学院刘国钧（第三、四章）；江西财经学院余仲弓（第五、六章）；上海财经大学苏均和（第七、八、九章）。全书由苏均和主编，负责全书的总体框架设计，以及全书的修改、总

纂和定稿工作。

在编写过程中得到了施锡荃、徐国祥教授的支持和帮助，在此谨致谢意。由于编者水平有限，错误难免，敬请读者批评斧正。

编 著

1994年7月20日

目　　录

第一章　随机事件与概率 …………………………………… (1)
§1.1　随机事件及其运算 …………………………………… (1)
§1.2　随机事件的概率及其性质 …………………………… (14)
§1.3　条件概率、乘法公式、全概率公式与
贝叶斯公式 …………………………………… (31)
§1.4　相互独立的随机事件与独立试验概型 ……… (40)
习题一 …………………………………… (49)
第二章　随机变量及其分布 …………………………………… (56)
§2.1　随机变量及其分布函数 …………………………… (56)
§2.2　离散型随机变量 …………………………………… (60)
§2.3　连续型随机变量 …………………………………… (74)
§2.4　多维随机变量及随机变量的独立性 ………… (86)
§2.5　随机变量函数的分布 …………………………… (106)
习题二 …………………………………… (120)
第三章　随机变量的数字特征与特征函数 ……………… (129)
§3.1　随机变量的数学期望 …………………………… (129)
§3.2　随机变量的方差、协方差与相关系数 ……… (146)
§3.3　随机变量的特征函数 …………………………… (169)
习题三 …………………………………… (182)
第四章　大数定律和中心极限定理 ……………………… (188)
§4.1　大数定律 …………………………………… (188)

§4.2 中心极限定理 …… (197)
习题四 …… (214)
第五章 数理统计的基本概念 …… (217)
§5.1 总体与样本 …… (217)
§5.2 统计量与样本矩 …… (220)
§5.3 抽样分布 …… (223)
习题五 …… (235)
第六章 参数估计 …… (238)
§6.1 参数的点估计 …… (238)
§6.2 点估计量的优良性标准 …… (248)
§6.3 参数的区间估计 …… (259)
习题六 …… (273)
第七章 假设检验 …… (279)
§7.1 假设检验的基本思想和概念 …… (279)
§7.2 单个正态总体的假设检验 …… (283)
§7.3 两个正态总体的假设检验 …… (290)
§7.4 总体分布的假设检验(非参数检验) …… (296)
习题七 …… (308)
第八章 回归分析 …… (313)
§8.1 概述 …… (313)
§8.2 一元回归分析和相关分析 …… (314)
§8.3 非线性回归 …… (330)
§8.4 多元线性回归 …… (335)
§8.5 逐步回归分析 …… (344)
习题八 …… (349)
第九章 试验设计与方差分析 …… (356)
§9.1 引言 …… (356)

§9.2 单因子试验与方差分析 …………………… (360)
§9.3 双因子试验和方差分析 …………………… (386)
习题九 …………………………………… (413)
附录 1 习题参考答案 …………………………… (418)
附录 2 关于上、下及双侧分位数关系的说明 ………… (435)
附表
1. 二项分布表 …………………………………… (438)
2. 泊松分布表 …………………………………… (440)
3. 标准正态分布表 ……………………………… (442)
4. t 检验临界值表 ……………………………… (444)
5. F 分布表 …………………………………… (445)
6. χ^2 分布表 …………………………………… (454)
7. 相关系数检验表 ……………………………… (455)
8. 符号检验表 …………………………………… (456)
9. 秩和检验表 …………………………………… (457)
10. Duncan 多重显著性极差表 ………………… (458)
11. 随机数表 …………………………………… (460)

第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件及其运算

(一) 必然现象与随机现象

在生产实践、科学实验和日常生活中，人们观察到的现象大体可归结为两种类型：确定性现象（或称必然现象）和随机现象(或称偶然现象)。

在一定条件下必然出现（或不出现）某种结果的现象称为确定性现象。例如：向上抛掷的重物必然自由下落；直角三角形的勾 a、股 b、弦 c 之间的关系一定满足 $a^2+b^2=c^2$；在一批合格的产品中任意取出一件，必定不是废品等等。几何、代数、微积分、线性代数等都是研究确定性现象的数学工具。

另一类现象是：在相同条件下可能得到多种不同的结果。例如将一枚均匀的硬币上抛，自由落下后，可能观察到有币值的一面（通常规定为“正面”）朝上，也可能观察到有图案的一面(“反面”）朝上，并且不论怎样控制抛掷条件，在每次抛掷之前总无法肯定究竟出现哪一个结果；某射手向同一目标多次射击，各次弹着点不尽相同，并且不论怎样控制射击条件，在一次射击之前无法预知弹着点的确切位置。这类现象的共同点是：可以在相同条件下重复进行试验或观察，而每次试验或观察的可能结果不止一个，且事前无法预知确切的结果，即试验结果呈现出不确定

性。人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象虽然在个别试验或观察中，其结果呈现出不确定性，但在大量观察或多次重复试验后，其结果却呈现出某种客观规律性，并且这种客观规律性是可以认识的。例如多次重复抛掷同一枚均匀硬币，"正面"朝上的次数大致占抛掷总次数的一半；某射手向同一目标射击的弹着点按照一定的规律分布等等。这种在大量重复试验或观察中所呈现出事物的固有规律性称为"统计规律性"。

我们把在个别试验或观察中呈现不确定性，在大量重复试验或观察中又具有统计规律性的现象称为随机现象。正如恩格斯所说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律"。(《马克思恩格斯选集》中译本第四卷，第 243 页)，根据马克思恩格斯的论述，必然性与偶然性是对立统一的概念，偶然性中蕴含着内在必然性的规律。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。但各有侧重，概率论侧重于理论上的研究，介绍随机现象反映的基本概念，建立相应的定理和公式，找出计算统计规律的方法。而数理统计是以概率论为理论依据，研究如何设计试验并对试验结果进行整理和统计分析。

概率论的研究开始于意大利文艺复兴时代，联系于赌博。其时，赌徒们为寻求取胜的方法，商询当时的一些学者。著名的数学天文学家伽利略提出了概率论的基本原理，奠定了统计科学的基础。数理统计学是伴随着概率论而发展的，最早见于国家的人口统计和方法。到 19 世纪末期，这门科学开始形成，20 世纪上半叶已发展成为一门成熟的科学。

当今，概率统计的理论和方法几乎遍及所有的科学技术领域以及工农业生产和国民经济各部门之中。在经济科学中，它是经

济管理、质量控制、保险理论、系统论、控制论、经济预测与决策、计量经济学等的理论基础，是各类经济、管理专门人材不可缺少的数学工具。

（二）随机试验与随机事件

1. 随机试验及其特性

为研究随机现象的统计规律性而进行的各种科学实验或对事物某种特征进行的观察都称为试验。因此，在概率统计中试验是一个广泛的术语。一般用字母 E 表示这类试验。例如：

E_1：抛掷一枚均匀的硬币，观察它自由落下后正反两面出现的情况。

E_2：在相同条件下接连不断地向同一个目标射击，直到射中为止，记录射击次数。

E_3：在一批同型号的灯泡中，任意抽取一只，测试它的使用寿命。

E_4：记录某班学生的数学考试成绩。

以上试验都可以在相同条件下重复进行。试验 E_1 只有两种可能结果：出现正面或出现反面，但是抛掷前不知道究竟出现哪一面。对于试验 E_2 射击次数可以为 1，2，……，因此试验的所有可能结果是全体自然数，在击中目标前究竟需要射出多少次不能事先肯定。对于试验 E_3 灯泡的寿命（以小时计）是一个非负的实数，在测试前不能确定它的寿命有多长。

这些试验都具有下列特性：

①试验可以在相同的条件下重复进行；

②每次试验的可能结果不止一个，并且能在试验之前明确知道所有可能结果；

③每次试验之前不能肯定这次试验会出现哪个结果，但可以

肯定每次试验总会出现且仅出现这些可能结果中的一个。

我们将具有上述三个特性的试验称为随机试验，简称试验。随机试验总是在一定条件下进行的，也就是说，试验的含意是离不开条件的，如果条件不同，则认为是不同的试验。

2. 样本空间与随机事件

在概率论中讨论一个随机试验时，试验的所有可能结果是明确知道的，每一个结果称为一个样本点，并用 w 表示。由样本点（试验的所有可能结果）的全体构成的集合称为样本空间或基本事件空间，常用 Ω 表示。在具体问题中，给出样本空间是描述随机试验的第一步。下面举一些随机试验的例子并给出它们的样本空间。

例 1 抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况。这个试验的所有可能结果共有两个：正（正面朝上）、反（反面朝上），所以样本空间 $\Omega=\{$正、反$\}$。若记 $w_1=$正，$w_2=$反，则样本空间可以表示为：$\Omega=\{w_1,w_2\}$。

例 2 连续两次抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况。在这个试验中，共有四个可能结果：（正，正），（反，反），（正，反），（反，正）。其中（正，反）表示“第一次抛得正面朝上，第二次抛得反面朝上”这一结果，其余类推，因此样本空间 $\Omega=\{$（正，正），（反，反），（正，反），（反，正）$\}$。若记 $w_1=$（正，正），$w_2=$（反，反），$w_3=$（正，反），$w_4=$（反，正），则 $\Omega=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$。

例 3 某射手对同一目标射击，观察命中目标与否。在这个试验中只有“命中目标”与“未命中目标”两个可能结果。若记 $w_1=$“命中目标”，$w_2=$“未命中目标”，则样本空间 $\Omega=\{w_1, w_2\}$。

例 4 某射手对同一目标射击，观察弹着点与目标的距离。

在这个试验中，若用 x 表示“弹着点与目标的距离”这一结果，则样本空间 $\Omega=\{x|0\leqslant x<+\infty\}$。

例 5 观察电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数，其结果可能是“接到 1 次呼唤”，“接到 2 次呼唤”，“没有接到呼唤”等。若用 w_i 表示“接到 i 次呼唤”（$i=0, 1, 2, \cdots\cdots$），则样本空间 $\Omega=\{w_0, w_1\cdots\cdots\}$。

在具体确定随机试验的样本空间时，要特别注意试验的内容和目的。例 1 和例 2 都是抛掷硬币的随机试验，但是它们的试验内容不同。例 1 是将一枚硬币抛掷一次，而例 2 是将一枚硬币抛两次，所以样本空间不同。例 3 和例 4 有相同的试验内容，都是观察某射手向同一目标射击，但试验目的不同，相应的样本空间也不同，例 3 的样本空间只有两个样本点，而例 4 的样本空间含有无限多个样本点。

由上述这些例子可知，样本空间中的样本点可以是有限的，如例 1，例 2，例 3，也可以是无限的，如例 4 和例 5。而例 4 的样本点充满区间（$0, +\infty$），我们称它的样本点为无穷不可列，例 5 的样本点可以依照某种次序排列起来，称它的样本点为无穷可列。

在概率论中，将随机试验的结果称为事件。

对一个随机试验而言，在一次试验中可能出现（或发生）也可能不出现（或不发生），而在大量重复试验中具有某种规律性的事件称为随机事件（或偶然事件），简称事件。通常用大写拉丁字母 A，B，C……表示。如在例 2 中“两次都抛得正面朝上”，“仅有一次抛得正面朝上”，“至少有一次抛得正面朝上”；在例 4 中“弹着点与目标相距为 500 米”，“弹着点与目标相距不超过 400 米”；在例 5 中“单位时间内收到 2 次呼唤”，“单位时间内至多收到 4 次呼唤”，“单位时间内收到的呼唤超过 3 次”等等。对一

次试验而言，它们可能出现也可能不出现，所以都是随机事件。将它们分别记为:

A_1＝“两次都抛得正面朝上”，

A_2＝“仅有一次抛得正面朝上”，

A_3＝“至少有一次抛得正面朝上”;

B_1＝“弹着点与目标相距为 500 米”，

B_2＝“弹着点与目标相距不超过 400 米”;

C_1＝“单位时间内收到 2 次呼唤”，

C_2＝“单位时间内至多收到 4 次呼唤”，

C_3＝“单位时间内收到的呼唤超过 3 次”。

对于一个随机试验来说，显然，它的每一个可能结果（即每个样本点）都是一个随机事件，它们是试验中最简单的随机事件，称为基本事件。如上述的事件 A_1，B_1，C_1 都是相应试验中的基本事件。

在一个随机试验中，除了基本事件以外，还有由若干个可能结果（即若干个样本点）组成的事件，相对于基本事件，称这种随机事件为复合事件。例如，上述的随机事件 A_2 是由 $w_3=$（正，反）和 $w_4=$（反，正）这两个样本点所组成的，其含义是：事件 A_2 发生当且仅当这两个样本点中某一个发生。又如随机事件 A_3，它是由 w_1，w_3 及 w_4 这三个样本点组成的，其含义是：事件 A_3 发生当且仅当这三个样本点中某一个发生。随机事件 B_2 是由“弹着点为 x 米，且 $0<x\leqslant 400$”这些样本点所组成的，其含义是 B_2 发生当且仅当这些样本点中某一个发生。

特别地，在一个随机试验中，每次试验一定发生的事件称为必然事件，每次试验一定不发生的事件称为不可能事件。在例 1 中“抛一枚硬币，观察到不是正面出现就是反面出现”是必然事件；“抛一枚硬币，观察到出现两个正面”就是不可能事件。在任

何一个随机试验中都有必然事件和不可能事件，尽管必然事件与不可能事件没有不确定性，它们不是随机事件，但为了讨论方便起见，在概率统计中把它们当作特殊的随机事件。

对于随机事件，通常是用语言表述，在引入样本空间之后，随机事件可以用样本空间 Ω 的子集来表示。对于基本事件，由于它是某个样本点，用以这个样本点为元素的单点集来表示它。对于复合事件，由于它是由若干个样本点所组成，所以用这若干个样本点为元素的集合来表示它。例如上面所列举的一些事件就可以用 Ω 的子集分别表示如下：

$A_1=\{(正，正)\}=\{w_1\}$，

$A_2=\{(正，反)，(反，正)\}=\{w_3，w_4\}$，

$A_3=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)\}=\{w_1，w_3，w_4$，

$B_1=\{x|x=500\}$，

$B_2=\{x|\}$，

$C_1=\{2\},0\leqslant x\leqslant 400$，

$C_2=\{0,1,2,3,4\}$，

$C_3=\{4，5，6\cdots\cdots\}$。

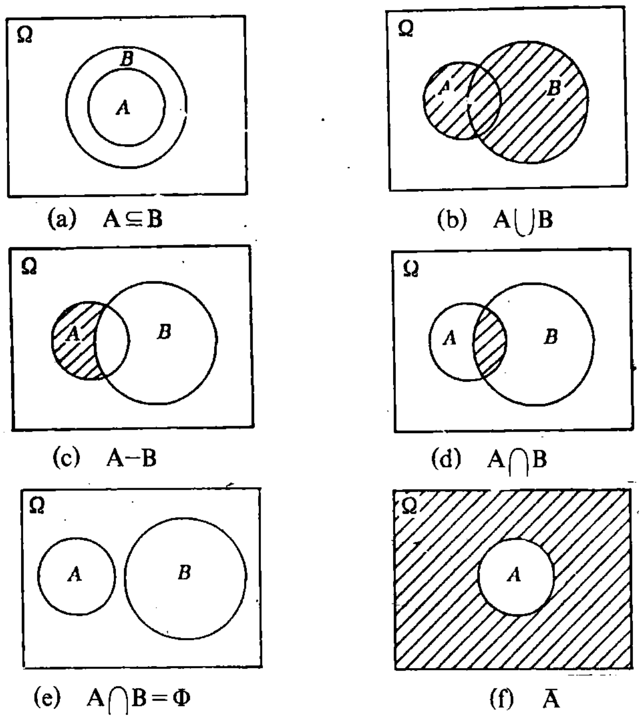
由此可见，当一个随机事件 A 用样本空间的子集来表示时，A 就是样本点的集合。这时，自然规定，事件 A 发生当且仅当 A 中的某一个样本点发生。这样，我们可以用全集 Ω 和空集 Φ（它们都是样本空间 Ω 的子集）分别表示必然事件和不可能事件。这是因为在每次试验中，必然有 Ω 中的某一个样本点发生，即事件 Ω 在每次试验中一定发生，所以 Ω 是必然事件。又因为空集 Φ 不含样本点，在每次试验中，事件 Φ 一定不发生，故 Φ 为不可能事件。

3. 事件间的关系及运算

任何一个随机试验中总有许多随机事件，其中有些比较简

单，有些比较复杂，它们之间存在着各种各样的关系。正确分析事件之间的关系，无论是推导公式还是计算复杂事件发生的概率都非常重要。

如前所述，随机事件可以用样本空间 Ω 的子集表示，因此，研究事件间的关系和运算，应用集合的概念和图示比较直观，也便于理解。通常用平面上的某矩形区域表示样本空间，该区域内的一个子区域表示事件，见图 1-1。



(a) $A\subseteq B$　(b) $A\bigcup B$　(c) $A-B$　(d) $A\bigcap B$　(e) $A\bigcap B=\Phi$　(f) $\bar{A}$

图 1-1

例 6　检查一批圆柱形产品的质量，规定产品的长度 L 和直径 d 都合格时才算做合格品。从这批产品中任取一件进行质量检查，其结果可能是“产品合格”、“产品不合格”；“长度合格”；“直径合格而长度不合格”等事件，显然这些事件之间是有关系的。

下面讨论事件间的几个主要关系及运算。

①事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于事件 B，记作 $B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$，见图 1-1 (a)。

对任一事件 A，有 $A \subseteq \Omega$。

在例 6 中，用 B 表示“产品不合格”，B_1 表示“长度不合格”，长度不合格必然导致产品不合格。于是 $B_1 \subseteq B$。

②事件的相等

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 包含事件 A，即 $A \supseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称事件 A 与 B 相等，即 A 与 B 所含的样本点完全相同，记作 $A = B$。

在例 6 中，用 A 表示“产品合格”，用 C 表示“长度和直径都合格”，显然事件 A 与 C 相等。相等的两个事件实际上是同一事件，只不过表达的方式不同而已。

③事件的和

“两个事件 A，B 中至少有一个发生”的事件称为事件 A 与 B 的和（或并），它是由事件 A 与 B 的所有样本点构成的集合，记为 $A+B$ 或 $A \cup B$，见图 1-1 (b)。

由图可知 $A \subseteq A+B$，$B \subseteq A+B$。

对任一事件 A 有 $A+A=A$，$A+\Phi=A$，$A+\Omega=\Omega$。若 $A \subseteq B$，则 $A+B=B$。

在例 6 中，用 B 表示“产品不合格”，B_1 表示“长度不合格”，B_2 表示“直径不合格”，则 $B=B_1+B_2$。

事件和的概念可以推广到有限个或可列无穷多个事件。

“事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”的事件 A 称为这 n 个事件 A_i $(i=1, 2, \cdots n)$ 的和（或并），记作