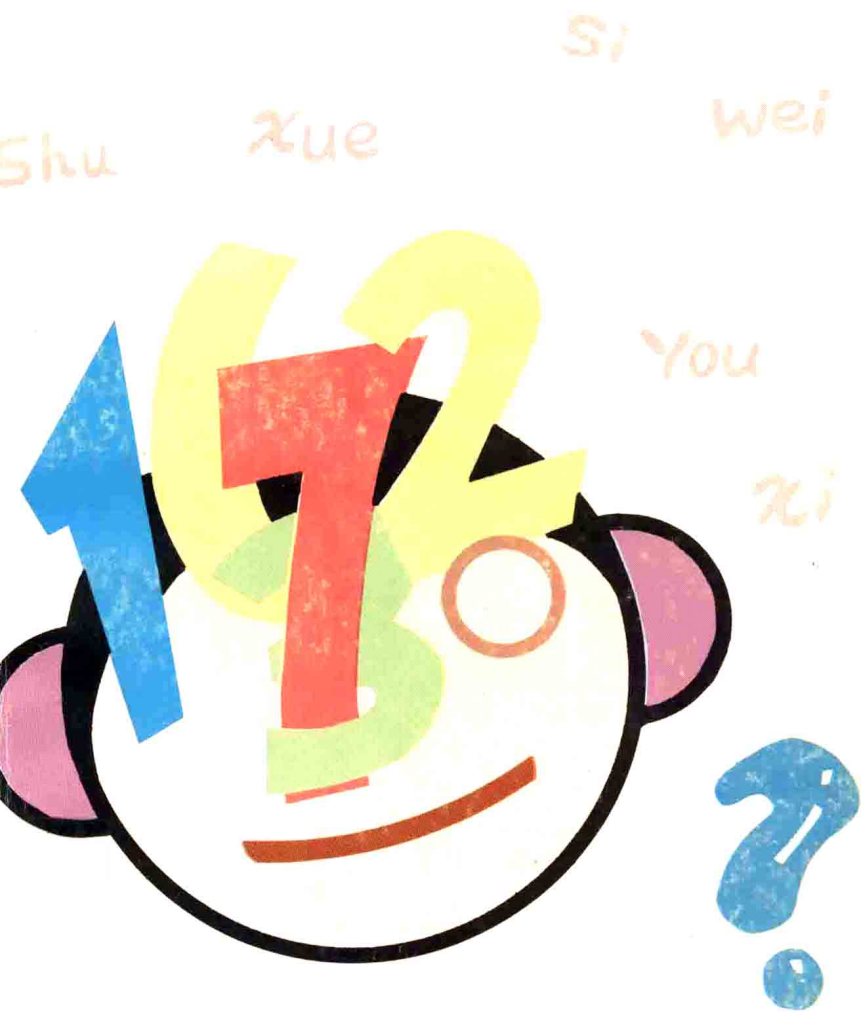


陶臣铨 毛澍芬 编著

数学思维游戏



上海科技教育出版社

前 言

《数学思维游戏》是引导学生进入数学学科殿堂的前奏，又是一种极好的启迪思维的工具。作为学生家长谁不想自己的孩子更聪明一些，那末《数学思维游戏》无疑是极好的课外阅读资料了。

我们近年来有机会亲自涉足对青少年的数学启蒙工作，在积累资料过程中有不少体会，很乐意把它奉献给社会，于是本书得以应运而生。

在《数学思维游戏》中，趣味性是一种手段，知识的传授和能力的培养才是我们的目的，其中思维习惯、思维能力和解题方法的培养尤为重要。青少年对趣味数学一般兴趣很高，但往往只是追求结果，至于如何运用正确的解题方法，如何使用有效的思维方法不甚注意，特别是解题后再考虑有否其他方法，或题目能否推广，或改变条件后将产生什么结果，更不太会去考虑，而这些正是我们编写的内容。

《数学思维游戏》首先培养学生积极思维习惯，要求能弄清题意、分析条件，然后引导学生寻找解题的途径，每走一步要弄明白它的目的性，多问几个为什么。思维往往不是一帆风顺的，要培养读者严谨的学风，有钻劲、有韧劲，有一种百折不回的精神。为使学生尝到积极思维的无穷乐趣，解决问题后的喜悦，学习要循序渐进。当然具体思维方法的培养也在要求之列，要使学生善于思考，驾驭方法。最后在原有基础上

还应有进一步地提高,技能要上升为技巧,解题能不拘一格,另辟蹊径。

本书是依照上述精神编写的,当然作为一本书有一定的体系,我们以上述对思维的五点要求为经,以入门题、趣味题、游戏题、推理题、综合题为纬分成五章。根据上述精神,每题解答不是单纯给出结论,而力求在怎样想、怎样做、有否别法、能否推广方面下工夫。虽然看起来似乎有些累赘,但有利于培养学生的思维能力,有利于自学,也可供初次接触本内容的教师和家长在教学或辅导时参考。

本书以小学高年级、初中低年级学生为主要对象。为了使内容更丰富、充实、生动、有趣,尽量做到图文并茂、通俗易懂,但限于水平,缺点和错误仍是难免的,还希同行专家和广大读者多加指正。

陶臣铨 毛澍芬

1993年2月于上海师范大学

目 录

第一章 凡事要多问为什么?提倡积极思维——入门题 ...	1
1. 万载一珠.....	1
2. 聚纸成峰.....	3
3. 是否相等.....	5
4. 买蟹骗局.....	8
5. 填数字(1)	9
6. 重大节日.....	10
7. 钟慢人准时.....	11
8. 张(只)数最少.....	13
9. 何时等高.....	14
10. 书有几页.....	15
11. 借书和还书.....	16
12. 末张谁得.....	17
13. $37 \times 3 = 111$ 与 $13 \times 11 \times 7 = 1001$ 的妙用	19
14. 末尾为五求平方.....	20
15. 三球同色.....	22
16. 锁的秘密.....	23
17. 箭头变正方.....	25
18. 巧拼正方形.....	26
19. 找规律.....	27
20. 一笔画.....	30

第二章 思维需要有百折不回的精神——趣味题	33
21. 合理分摊	33
22. 门牌号码	34
23. 数字分组	36
24. 两者得兼、兼收并蓄、不可得兼	38
25. 美点酬宾	39
26. 平分糖果	41
27. 填数字(2)	42
28. 填数字(3)	43
29. 填数字(4)	44
30. 卡片拼数	47
31. 恕不零卖	48
32. 巧设连环	49
33. 恰为整十的和、差	52
34. 相会何处	53
35. 选择捷径	54
36. 物尽其用	55
37. 物尽其用续篇	58
38. 快速确定自然数幂的个位数	59
39. 条件分数	62
40. 能分成两数吗?	64
41. 师徒分利	64
42. 异式同积	66
43. 千“变”一律	68
44. $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}$ 的因数	70
45. 回文数(1)	73

46. 回文数(2)	74
47. 橄榄数	75
48. 名次排列	77
49. 超越几次	78
50. 两方拼一方	79
51. 一方分两方	80
52. 化长为方	82
53. 化框为方	85
54. 折纸分形	86
55. 多少、大小转换(1)	89
56. 多少、大小转换(2)	90
57. 俄罗斯方块(1)	92
58. 俄罗斯方块(2)	94
59. 俄罗斯方块(3)	94
60. 有几个正方形	95

第三章 思维乐, 乐无穷——游戏题 99

61. 抢 30	99
62. 抢 31	100
63. 因数接龙	101
64. 符号接龙	102
65. 心领神会	104
66. 数学谜语	106
67. 猜年龄游戏	107
68. 猜爱好游戏	109
69. 猜生肖游戏	110
70. 猜星期游戏	113
71. 猜数游戏	116

72. 拍手几次	118
73. 谁是幸存者	120
74. 成双出现	121
75. 十二只棋子	122
76. 六星聚会	123
77. 螺旋变向	125
78. 古题	127
79. 四堆火柴	129
80. 圆桌红花	131
第四章 善于思考, 驾驭方法——推理题	134
81. 三方擂台赛(1)	134
82. 三方擂台赛(2)	137
83. 五张照片	138
84. 各人的籍贯	139
85. 来自何班	141
第五章 不拘一格, 另辟蹊径——综合题	146
86. 有几个“1”	146
87. 填数字(5)	147
88. 姓名之谜	149
89. 小朋友爱科学	151
90. 参赛得分	154
91. 合理用车	156
92. 能赶到吗?	158
93. 会被淘汰吗? 在第几轮被淘汰?	160
94. 球队有几个, 末名得几分?	161
95. 四对兄妹	163
96. 演出阵营	165

97. 均等与不等	167
98. 快速确定自然数幂的十位数	170
99. 巧比大小	171
100. 俄罗斯方块(4).....	173
101. 五条直径	175
102. 三阶幻方	178
103. 异途同归(1).....	182
104. 异途同归(2).....	184
105. 多种展开	185
106. 蜘蛛和苍蝇(1).....	189
107. 蜘蛛和苍蝇(2).....	191
108. 桌球中的反射击球	192
109. 立体填数(一)	193
110. 立体填数(二)	195

第一章 凡事要多问为什么?提倡 积极思维——入门题

1. 万载一珠

算盘是我国传统的计算工具,常用的算盘有十三档,使用时每一档表示一个数位,如果最右面一档表示个位,那末与记数法相同,它左面是十位,再往左依次是百位、千位、万位、……,最左面一档是万亿位,这些都是大家熟知的。

一天,数学老师王老师向同学提出一个问题:如果我们仿照数数那样,在算盘上从1开始,不间断地逐次加1,那末需要拨多少时间,才能在最左面一档上拨上一个珠(图1-1)。

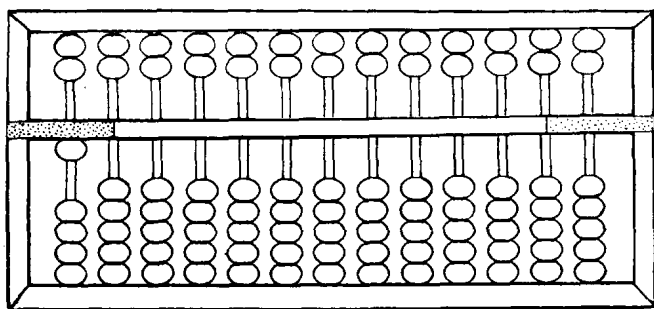


图 1-1

同学们觉察到要完成上述过程,需要的时间是不会太少的,所以有人说要一天,有人说要二、三天。王老师说,对于

一个科学问题应该有科学态度,不能随意瞎猜,要动手动脑,要具体计算一下。那末该如何计算呢?

解:王老师启发说,要求出需要多少时间,需要先知道两点:

1 整个过程共拨珠多少次?

2. 每拨一珠需多少时间?

王老师还对拨珠次数作了具体解释:

在珠算中,加1的口诀共有三条,即“一上一”、“一下五去四”、“一去九进一”。我们规定每使用一条口诀就说是拨珠一次。现在要计算拨珠时间,所以对可能耗用时间的步骤都要加以考虑,其中在使用口诀“一去九进一”时,涉及在相邻两档上拨珠,在较低档次上去掉九,在较高档次上需要加上一,所以在较高档次上又需使用上述三条口诀中的某一条。如果从0开始,逐次加1到10时,共需拨珠11次,逐次加到100时,共拨珠111次(个位上拨100次,十位上拨10次,百位上拨1次),现在逐次加到一万亿(1 000 000 000 000),需拨珠1 111 111 111 111次。

王老师又说,每拨一珠需多少时间显然因人而异,他要大家按要求先拨到1000,记下时间,再除以1111(为什么?),就可得到拨一个珠的时间。从同学们实际操作中得到的数据,我们不妨假定每秒钟拨3次。于是可以计算如下:

因为每秒钟拨珠3次,所以一年可拨珠

$$3 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365 = 94\,608\,000 \text{ (次)}.$$

因为拨到最左面一档有一个珠需拨珠1 111 111 111 111次,所以需时间为:

$$1\,111\,111\,111\,111 \div 94\,608\,000 \approx 11744.3 \text{ (年)}.$$

可见要完成上述过程,即使日以继夜、无休止地拨也需要

拨1万多年，真是“万载一珠”。通过本题的计算，还告诉我们，凡事必须要细细想一想，切忌信口开河，没有根据地凭臆测从事。

最后，再请你算一算(利用本题已算得的一些数据)，快速电子计算机现在每秒运算已达亿次以上，如果就假定为1亿次，而如果用人工计算，每次运算假定需3秒钟(当然是不够的)，那末电子计算机计算一秒钟相当于人工计算多少时间？

2. 聚纸成峰

被称为“世界屋脊”的喜马拉雅山的主峰——珠穆朗玛峰海拔8848米，是世界第一高峰，薄薄的一张纸的厚度只有0.01厘米，但是通过把纸对折、对折、再对折，不过几十次，其厚度居然超过珠峰，你相信吗？你不妨实地计算一下，到底需要对折几次才能纸峰超珠峰。

解：每张纸的厚度是0.01厘米，100张纸迭在一起厚度是1厘米，10000层纸的厚度是1米，1亿层纸的厚度是1万米，所以我们问对折几次后，纸的厚度达到(或超过)珠峰高度，就是问对折几次后，纸的层数达到(或超过)1亿层。

第1次对折后有2层，就是 2^1 (层)，

第2次对折后有4层，就是 2^2 (层)，

第3次对折后有8层，就是 2^3 (层)，

.....

第9次对折后有 $2^9 = 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 512$ (层)，
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{9\text{个}2}$

.....

第13次对折后有 $2^{13} = 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 8192$ (层)，
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{13\text{个}2}$

.....

$$\begin{aligned} \text{第 27 次对折后有 } 2^{27} &= \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{9 \text{ 个 } 2} \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{9 \text{ 个 } 2} \\ &\times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{9 \text{ 个 } 2} = 512 \times 512 \times 512 = 134\,217\,728 (\text{层}). \end{aligned}$$

可见对折 27 次后,纸的层数已超过 1 亿层,就是说其厚度已超过珠峰高度了。

通过本题的计算,使我们联想到上一题,如果拨珠方法改为:第一次拨 1,以后各次都是加上盘面上的数,即第二次见盘面上为 1,就再加上 1,第三次见盘面上为 2,就再加上 2,得 4,也就是 2^2 ,第四次再加 2^2 ,得 2^3 ,.....总之,第 n 次拨珠时,加的数是 2^{n-2} ,而其结果为 2^{n-1} ,由此可见,拨了 28 次后,盘面上的数已达到 2^{27} ,即 1 亿以上了。因为 $2^{40} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{27 \text{ 个 } 2} \times \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{13 \text{ 个 } 2} = 2^{27} \times 2^{13} = 134\,217\,728 \times 8\,192 = 1\,099\,511\,627\,776$,所以在拨了 41 次后,最左面一档就有一个珠了。

两种不同的方法拨珠,前者是按自然数列(是等差数列的一种)的方式增长的,即:

$$1, 2, 3, \dots$$

后者是按等比数列方式增长的,即:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots$$

增长速度就大不相同。一般来说,当等比数列的公比(从第二项起,每一项与前一项的比,本题中公比是 2)大于 1 时,增长速度远比自然数列迅速,自然界中不乏按等比数列规律增长的例子,它们的发展是惊人的。



3. 是否相等

有两道判断题,

其一: 一条汽船往返于甲、乙两地, 如果船的速度一定,

(1) 又如果甲、乙间的河流是静水; (2) 甲、乙间的河流有流速, 那末在第(1)种情况下往返一次所用的时间, 和在第(2)种情况下往返一次所用的时间是否相等? 如果不相等, 哪种情况所用的时间较少?

其二: 某商品去年曾提价 20%, 今年降价 20%, 那末降价后的价格与提价前的价格是否相等? 如果不相等, 原价和现价哪一个较为便宜?

解: 回答本题可能出现三种不同情况。

第一种：两个小题均回答是相等的，当然这个结论是错误的，但是他们还各有理由，认为如果河流有流速，那末顺流航行时将助汽船一臂之力，而在逆流航行时，流速则阻止汽船前进，由于这种“助力”和“阻力”大小相等，方向相反，可以抵消，所以往返一次所用时间应与静水中往返一次的时间相等；对于后一小题，由于提价和降价都是 20%，所以也是可以抵消的。

第二种：考虑到原题中缺少具体数字，对思考问题时带来困难，于是补出些具体数字，再实际计算一下，看结果如何。

设汽船速度每小时 15 公里，水流速度每小时 3 公里，甲、乙两地相距 180 公里，那末往返一次需要的时间为：

$$180 \div (15 + 3) + 180 \div (15 - 3) = 25(\text{小时})；$$

如果在静水中往返一次需要的时间为：

$$180 \div 15 \times 2 = 24(\text{小时})。$$

可见两者是不相等的，静水中往返一次所需时间较少。

又设某商品原价为 100 元，那末提价 20% 后价格为

$$100 \times (1 + 20\%) = 120(\text{元})。$$

在此基础上降价 20%，降价后价格为：

$$120 \times (1 - 20\%) = 96(\text{元})。$$

所以降价后价格与提价前价格是不相等的，现价比原价便宜。

第三种：如果回答问题的同学抽象思维能力较强，那末应该这样回答：

设汽船速度每小时 a 公里，水流速度每小时 b 公里，甲、乙两地相距 l 公里，那末往返一次所需时间为：

$$\frac{l}{a+b} + \frac{l}{a-b} = \frac{2al}{a^2-b^2}.$$

如果在静水中往返一次需要的时间为

$$l + a \times 2 = \frac{2l}{a}.$$

为了比较, $\frac{2l}{a}$ 化为 $\frac{2al}{a^2}$, 由此可以看出, 两个分式分子相同 (都是 $2al$), 而分母 $0 < (a^2 - b^2) < a^2$, 所以 $\frac{2al}{a^2 - b^2} > \frac{2al}{a^2}$, 还可以看出, 如果水流速度增大, $a^2 - b^2$ 减小, 所以时间 $\frac{2al}{a^2 - b^2}$ 将增多。

设某商品原价为 m 元, 那末提价 20%, 再降低 20% 后价格为:

$$\begin{aligned} m \times (1 + 20\%) \times (1 - 20\%) &= m \times 1.2 \times 0.8 \\ &= 0.96m = m \times 96\%. \end{aligned}$$

可见, 不管原价多少, 先提价 20%, 再降低 20%, 那末现价总是原价的 96%。由于乘法满足交换律, 因此:

$$m \times (1 + 20\%) \times (1 - 20\%) = m \times (1 - 20\%) \times (1 + 20\%)$$



说明先降价 20%，再提价 20%，那末现价也是原价的 96%。

4. 买蟹骗局

一人提了一篓又肥又大的螃蟹到一条小街上出售，开价每斤(500 克)50 元。不一会儿，先后过来两个青年，由此一场合谋的骗局开始了。两青年中的一人自言自语：“这些蟹倒不错，不过，我就喜欢吃蟹肚，蟹脚、蟹钳吃起来真讨厌，真不想吃。”另一青年马上插话，说：“如果蟹脚、蟹钳便宜些作价卖给我，下下酒倒蛮好的。”于是他们煞有介事地商量决定蟹肚 35 元一斤，蟹脚、蟹钳 15 元一斤。转而对卖蟹人说，这些蟹我们包了，你帮我们分一分，再称给我们，反正 35 元加 15 元仍然是 50 元，我们又不占你便宜。卖蟹人一时没有反应过来，没有觉察其中有诈，就按他们的意思做了。结果分得蟹肚 3 斤，蟹脚、蟹钳 1 斤，两青年分别付了 105 元和 15 元，他们分别拿着蟹肚、蟹脚和蟹钳走了。事后，卖蟹人一数钞票共 120 元，这与他来小街前预计的数字相差甚远，发现问题，再想去追回买蟹人，但已来不及了，只能连呼上当。想一想，这个问题错在哪里？应该怎样付钱才合理？

解：这是一个不难解决的问题，按“优质优价”的原则，蟹肚质量明显优于整只蟹的质量，所以蟹肚价格应高于整只蟹的价格，就是说蟹肚价格应高于 50 元，现在定在 35 元是不合理的，为了较为容易地说明问题，不妨设想蟹肚、蟹脚和蟹钳各买 1 斤，货款的和是 50 元，但重量的和却是 2 斤，这不就说明两者都低于原价是不合理吗？

合理的方法是先称出蟹的总重量(4 斤)后，计算得货价是 $50 \times 4 = 200$ (元)，卖蟹人应要买蟹人付 200 元，至于蟹肚、蟹脚和蟹钳的具体价格可以由买蟹人自己去协商议定。



5. 填数字(1)

把五个数 2、3、4、6、8 填入图 1-2 各方格中，使横行和竖行中三个数的和相等。如果改为 1、3、5、6、7 又应怎样填写呢？若再改成 1、2、3、6、7 又将怎样？

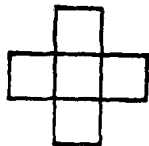


图 1-2

解：五个数填入“+”字中，其中有一个位置比较特殊，就是中心位置。中间方格上的数两次参加求和，所以确定这个数，就可随之确定横行和竖行的和分别是多少。

先看第一小题，因为 $2+3+4+6+8=23$ ，按要求横行和竖行的和相等，所以只能选定 3 为中间数，才能保证 $23+3=26$ 是一个偶数，于是确定横行和竖行的和是 $26 \div 2 = 13$ 。解见图 1-3。

第二小题中， $1+3+5+6+7=22$ 为偶数，中间数必须为偶数，现五个数中，仅有 6 是偶数，中间填入 6 后，横行和竖行的和均为 $(22+6) \div 2 = 14$ ，解见图 1-4。