陶臣铨　毛澍芬　　编著

数学思维游戏

上海科技教育出版社

前　言

《数学思维游戏》是引导学生进入数学学科殿堂的前奏，又是一种极好的启迪思维的工具。作为学生家长谁不想自己的孩子更聪明一些，那末《数学思维游戏》无疑是极好的课外阅读资料了。

我们近年来有机会亲自涉足对青少年的数学启蒙工作，在积累资料过程中有不少体会，很乐意把它奉献给社会，于是本书得以应运而生。

在《数学思维游戏》中，趣味性是一种手段，知识的传授和能力的培养才是我们的目的，其中思维习惯、思维能力和解题方法的培养尤为重要。青少年对趣味数学一般兴趣很高，但往往只是追求结果，至于如何运用正确的解题方法，如何使用有效的思维方法不甚注意，特别是解题后再考虑有否其他方法，或题目能否推广，或改变条件后将产生什么结果，更不大会去考虑，而这些正是我们编写的内容。

《数学思维游戏》首先培养学生积极思维习惯，要求能弄清题意、分析条件，然后引导学生寻找解题的途径，每走一步要弄明白它的目的性，多问几个为什么。思维往往不是一帆风顺的，要培养读者严谨的学风，有钻劲、有韧劲，有一种百折不回的精神。为使学生尝到积极思维的无穷乐趣，解决问题后的喜悦，学习要循序渐进。当然具体思维方法的培养也在要求之列，要使学生善于思考，驾驭方法。最后在原有基础上

还应有进一步地提高，技能要上升为技巧，解题能不拘一格，另辟蹊径。

本书是依照上述精神编写的，当然作为一本书有一定的体系，我们以上述对思维的五点要求为经，以入门题、趣味题、游戏题、推理题、综合题为纬分成五章。根据上述精神，每题解答不是单纯给出结论，而力求在怎样想、怎样做、有否别法、能否推广方面下工夫。虽然看起来似乎有些累赘，但有利于培养学生的思维能力，有利于自学，也可供初次接触本内容的教师和家长在教学或辅导时参考。

本书以小学高年级、初中低年级学生为主要对象。为了使内容更丰富、充实、生动、有趣，尽量做到图文并茂、通俗易懂，但限于水平，缺点和错误仍是难免的，还希同行专家和广大读者多加指正。

陶臣铨　毛澍芬

1993年2月于上海师范大学

目　录

第一章　凡事要多问为什么？提倡积极思维——入门题

1．万载一珠

算盘是我国传统的计算工具，常用的算盘有十三档，使用时每一档表示一个数位，如果最右面一档表示个位，那末与记数法相同，它左面是十位，再往左依次是百位、千位、万位、……，最左面一档是万亿位，这些都是大家熟知的。

一天，数学老师王老师向同学提出一个问题：如果我们仿照数数那样，在算盘上从1开始，不间断地逐次加1，那末需要拨多少时间，才能在最左面一档上拨上一个珠（图1-1）。

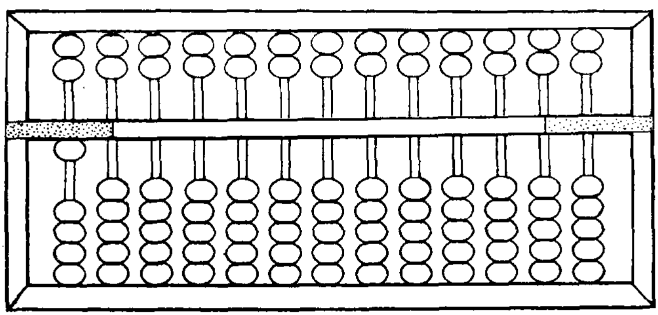

图 1-1

同学们觉察到要完成上述过程，需要的时间是不会太少的，所以有人说要一天，有人说要二、三天。王老师说，对于

一个科学问题应该有科学态度，不能随意瞎猜，要动手动脑，要具体计算一下。那末该如何计算呢？

解：王老师启发说，要求出需要多少时间，需要先知道两点：

1 整个过程共拨珠多少次？

2. 每拨一珠需多少时间？

王老师还对拨珠次数作了具体解释：

在珠算中，加1的口诀共有三条，即“一上一”、“一下五去四”、“一去九进一”。我们规定每使用一条口诀就说是拨珠一次。现在要计算拨珠时间，所以对可能耗用时间的步骤都要加以考虑，其中在使用口诀“一去九进一”时，涉及在相邻两档上拨珠，在较低档次上去掉九，在较高档次上需要加上一，所以在较高档次上又需使用上述三条口诀中的某一条。如果从0开始，逐次加1到10时，共需拨珠11次，逐次加到100时，共拨珠111次(个位上拨100次，十位上拨10次，百位上拨1次)，现在逐次加到一万亿(1 000 000 000 000)，需拨珠1 111 111 111 111次。

王老师又说，每拨一珠需多少时间显然因人而异，他要大家按要求先拨到1000，记下时间，再除以1111(为什么?)，就可得到拨一个珠的时间。从同学们实际操作中得到的数据，我们不妨假定每秒钟拨3次。于是可以计算如下：

因为每秒钟拨珠3次，所以一年可拨珠

$$3\times60\times60\times24\times365=94\,608\,000(\text{次})。$$

因为拨到最左面一档有一个珠需拨珠1 111 111 111 111次，所以需时间为：

$$1\,111\,111\,111\,111\div94\,608\,000\approx11744.3\ (\text{年})。$$

可见要完成上述过程，即使日以继夜、无休止地拨也需要

拔1万多年，真是“万载一珠”。通过本题的计算，还告诉我们，凡事必须要细细想一想，切忌信口开河，没有根据地凭臆测从事。

最后，再请你算一算(利用本题已算得的一些数据)，快速电子计算机现在每秒运算已达亿次以上，如果就假定为1亿次，而如果用人工计算，每次运算假定需3秒钟(当然是不够的)，那末电子计算机计算一秒钟相当于人工计算多少时间？

2. 聚纸成峰

被称为“世界屋脊”的喜马拉雅山的主峰——珠穆朗玛峰海拔8848米，是世界第一高峰，薄薄的一张纸的厚度只有0.01厘米，但是通过把纸对折、对折、再对折，不过几十次，其厚度居然超过珠峰，你相信吗？你不妨实地计算一下，倒底需要对折几次才能纸峰超珠峰。

解：每张纸的厚度是0.01厘米，100张纸迭在一起厚度是1厘米，10000层纸的厚度是1米，1亿层纸的厚度是1万米，所以我们问对折几次后，纸的厚度达到(或超过)珠峰高度，就是问对折几次后，纸的层数达到(或超过)1亿层。

第1次对折后有2层，就是2^1(层)，

第2次对折后有4层，就是2^2(层)，

第3次对折后有8层，就是2^3(层)，

……

第9次对折后有$2^9=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{9个2}=512$(层)，

……

第13次对折后有$2^{13}=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{13个2}=8192$(层)，

……

第 27 次对折后有 $2^{27}=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{9\text{个}2}\times\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{9\text{个}2}\times\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{9\text{个}2}=512\times512\times512=134\,217\,728$(层)。

可见对折 27 次后，纸的层数已超过 1 亿层，就是说其厚度已超过珠峰高度了。

通过本题的计算，使我们联想到上一题，如果拨珠方法改为：第一次拨 1，以后各次都是加上盘面上的数，即第二次见盘面上为 1，就再加上 1，第三次见盘面上为 2，就再加上 2，得 4，也就是 2^2，第四次再加 2^2，得 2^3，……总之，第 n 次拨珠时，加的数是 2^{n-2}，而其结果为 2^{n-1}，由此可见，拨了 28 次后，盘面上的数已达到 2^{27}，即 1 亿以上了。因为 $2^{40}=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{27\text{个}2}\times\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{13\text{个}2}=2^{27}\times2^{13}=134\,217\,728\times8\,192=1\,099\,511\,627\,776$，所以在拨了 41 次后，最左面一档就有一个珠了。

两种不同的方法拨珠，前者是按自然数列(是等差数列的一种)的方式增长的，即：

1，2，3，……

后者是按等比数列方式增长的，即：

2^1、2^2、2^3、……

增长速度就大不相同。一般来说，当等比数列的公比(从第二项起，每一项与前一项的比，本题中公比是 2)大于 1 时，增长速度远比自然数列迅速，自然界中不乏按等比数列规律增长的例子，它们的发展是惊人的。

3．是否相等

有两道判断题：

其一：一条汽船往返于甲、乙两地，如果船的速度一定，(1) 又如果甲、乙间的河流是静水；(2) 甲、乙间的河流有流速，那末在第(1)种情况下往返一次所用的时间，和在第(2)种情况下往返一次所用的时间是否相等？如果不相等，哪种情况所用的时间较少？

其二：某商品去年曾提价20%，今年降价20%，那末降价后的价格与提价前的价格是否相等？如果不相等，原价和现价哪一个较为便宜？

解：回答本题可能出现三种不同情况。

第一种：两个小题均回答是相等的，当然这个结论是错误的，但是他们还各有理由，认为如果河流有流速，那末顺流航行时将助汽船一臂之力，而在逆流航行时，流速则阻止汽船前进，由于这种“助力”和“阻力”大小相等，方向相反，可以抵消，所以往返一次所用时间应与静水中往返一次的时间相等；对于后一小题，由于提价和降价都是20%，所以也是可以抵消的。

第二种：考虑到原题中缺少具体数字，对思考问题时带来困难，于是补出些具体数字，再实际计算一下，看结果如何。

设汽船速度每小时15公里，水流速度每小时3公里，甲、乙两地相距180公里，那末往返一次需要的时间为：

$$180 \div (15+3) + 180 \div (15-3) = 25(\text{小时});$$

如果在静水中往返一次需要的时间为：

$$180 \div 15 \times 2 = 24(\text{小时}).$$

可见两者是不相等的，静水中往返一次所需时间较少。

又设某商品原价为100元，那末提价20%后价格为

$$100 \times (1+20\%) = 120(\text{元}).$$

在此基础上降价20%，降价后价格为：

$$120 \times (1-20\%) = 96(\text{元}).$$

所以降价后价格与提价前价格是不相等的，现价比原价便宜。

第三种：如果回答问题的同学抽象思维能力较强，那末应该这样回答：

设汽船速度每小时a公里，水流速度每小时b公里，甲、乙两地相距l公里，那末往返一次所需时间为：

$$\frac{l}{a+b}+\frac{l}{a-b}=\frac{2al}{a^2-b^2}.$$

如果在静水中往返一次需要的时间为

$$l + a\times 2=\frac{2l}{a}.$$

为了比较，$\frac{2l}{a}$ 化为 $\frac{2al}{a^2}$，由此可以看出，两个分式

分子相同（都是 $2al$），而分母 $0<(a^2-b^2)<a^2$，所以 $\frac{2al}{a^2-b^2}$

$\frac{2al}{a^2}$，还可以看出，如果水流速度增大，a^2-b^2 减小，所以

间 $\frac{2al}{a^3-b^2}$ 将增多。

设某商品原价为 m 元，那末提价 20%，再降低 20% 后

格为：

$$m\times(1+20\%)\times(1-20\%)=m\times 1.2\times 0.8$$
$$=0.96m=m\times 96\%.$$

可见，不管原价多少，先提价 20%，再降低 20%，那末

价总是原价的 96%。由于乘法满足交换律，因此：

$$m\times(1+20\%)\times(1-20\%)=m\times(1-20\%)\times(1+20\%)$$

说明先降价 20%，再提价 20%，那末现价也是原价的96%。

4. 买蟹骗局

一人提了一篓又肥又大的螃蟹到一条小街上出售，开价每斤(500 克)50 元。不一会儿，先后过来两个青年，由此一场合谋的骗局开始了。两青年中的一人自言自语："这些蟹倒不错，不过，我就喜欢吃蟹肚，蟹脚、蟹钳吃起来真讨厌，真不想吃。"另一青年马上插话，说："如果蟹脚、蟹钳便宜些作价卖给我，下下酒倒蛮好的。"于是他们煞有介事地商量决定蟹肚 35 元一斤，蟹脚、蟹钳 15 元一斤。转而对卖蟹人说，这些蟹我们包了，你帮我们分一分，再称给我们，反正 35 元加 15 元仍然是 50 元，我们又不占你便宜。卖蟹人一时没有反应过来，没有觉察其中有诈，就按他们的意思做了。结果分得蟹肚 3 斤，蟹脚、蟹钳 1 斤，两青年分别付了 105 元和 15 元，他们分别拿着蟹肚、蟹脚和蟹钳走了。事后，卖蟹人一数钞票共 120 元，这与他来小街前预计的数字相差甚远，发现有问题，再想去追回买蟹人，但已来不及了，只能连呼上当。想一想，这个问题错在哪里?应该怎样付钱才合理?

解：这是一个不难解决的问题，按"优质优价"的原则，蟹肚质量明显优于整只蟹的质量，所以蟹肚价格应高于整只蟹的价格，就是说蟹肚价格应高于 50 元，现在定在 35 元是不合理的，为了较为容易地说明问题，不妨设想蟹肚、蟹脚和蟹钳各买 1 斤，货款的和是 50 元，但重量的和却是 2 斤，这不就说明两者都低于原价是不合理吗?

合理的方法是先称出蟹的总重量(4 斤)后，计算得货价是 $50\times4=200$(元)，卖蟹人应要买蟹人付 200 元，至于蟹肚、蟹脚和蟹钳的具体价格可以由买蟹人自己去协商议定。

5. 填数字(1)

把五个数 2、3、4、6、8 填入图 1-2 各方格中，使横行和竖行中三个数的和相等。如果改为 1、3、5、6、7 又应怎样填写呢?若再改成 1、2、3、6、7 又将怎样?

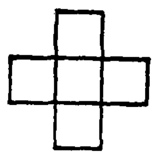

图 1-2

解：五个数填入"+"字中，其中有一个位置比较特殊，就是中心位置。中间方格上的数两次参加求和，所以确定这个数，就可随之确定横行和竖行的和分别是多少。

先看第一小题，因为 $2+3+4+6+8=23$，按要求横行和竖行的和相等，所以只能选定 3 为中间数，才能保证 $23+3=26$ 是一个偶数，于是确定横行和竖行的和是 $26\div2=13$。解见图 1-3。

第二小题中，$1+3+5+6+7=22$ 为偶数，中间数必须为偶数，现五个数中，仅有 6 是偶数，中间填入 6 后，横行和竖行的和均为 $(22+6)\div2=14$，解见图 1-4。