大学数学复习指导丛书

名校 名师 名作

第2版

高等数学复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 主 编
武海燕 李冬红 副主编

清华大学出版社

大学数学复习指导丛书

名校 名师 名作

第2版

高等数学复习指导

——思路 方法与技巧

陈文灯 主编
武海燕 李冬红 副主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书共分 15 章，旨在帮助读者全面、系统地复习高等数学的内容，深入理解基本概念和基本理论。同时，通过分析和学习解题方法及解题技巧，以及大量的课后练习，帮助读者达到举一反三、触类旁通。

本书中每章均介绍了一些读者想掌握、易掌握但尚未掌握的方法和技巧，例如：一些类型的极限的求法；有关微积分中值定理命题的证明；定积分、重积分的有关命题的证明；不等式的证明；无穷级数求和的方法；常微分方程中积分因子的求法等。

本书适用于理工科专业本科生扩大课堂的信息量，扎实掌握相关知识点和解题技巧，同时也是一本全面而又系统精炼的考研辅导用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学复习指导——思路、方法与技巧/陈文灯主编. —2 版. —北京：清华大学出版社，2011.3
（大学数学复习指导丛书）

ISBN 978-7-302-24186-7

I. ①高…　II. ①陈…　III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料　IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 243142 号

责任编辑：陈仕云
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：文森时代
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：42.5　**字　数**：982 千字
版　次：2011 年 3 月第 2 版　　**印　次**：2011 年 3 月第 1 次印刷
印　数：1～5000
定　价：54.00 元

产品编号：037009-01

丛书序

本丛书共三个分册：《高等数学复习指导——思路、方法与技巧》、《概率论与数理统计复习指导——思路、方法与技巧》、《线性代数复习指导——思路、方法与技巧》，自 2003 年出版以来，一直受到广大读者的欢迎，到目前已多次重印。在这几年的教学和考研培训中，我们又总结了一些新的解题方法与思维定势，同时我们也收到了一些读者修订本书的建议。

本丛书是在 2003 年第一版的基础上修订而成，本次修订的内容主要体现在以下几方面：

（1）增加了几个思维定势。虽然思维定势对应试者确有一学就会，一试就灵之功效，但对于启迪思维就不一定能起到很好的作用，延伸初学者的知识链更不可能依靠思维定势。只有培养学生的发散性思维，才能使他们的思维活跃起来，从而对他们学好数学，并应用数学思维去学好其他课程才有裨益。

（2）增加了大量新题型。这部分题型的增加不仅使本书的布局更合理内容更丰满充实，同时也旨在帮助读者通过练习掌握更多的题型和解题思路。

（3）删减和调整更新了大量例题。就说明问题而言，第一版中有些例题在不同章节中出现，我们的原意在于探索一题多解，不能说是重复性例题。本次修订中，我们根据部分读者提出的建议，对这部分例题进行了删除和调整。同时，对一些比较难掌握的解题方法与技巧，为示范作用增加了大量全新的例题。

本丛书旨在帮助读者全面、系统地复习相关知识点，深入理解基本概念和基本理论，学习和掌握解题方法及解题技巧。丛书主要特色有：

（1）根据国内经典版数学教材调整和完善内容框架，体系成熟完整。

（2）对重要的概念、定理、公式进行剖析，有利于增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误。

（3）每章从基本概念、基本理论和基本方法的介绍入手，同时以大量题型为例，进行错解分析和难题解题技巧分析。

（4）以题型为纲深入分析探究，总结出解题方法与技巧，使读者胸有成竹，有“法”可依，有“路”可循。

（5）用“举题型讲方法”的格式代替“讲方法套题型”的方法，使读者做题时思路畅通、有的放矢。

（6）广泛采用表格，使读者对要点一目了然，记忆深刻。

陈文灯

2010 年 11 月

第 2 版前言

高等数学是理工科高等院校最重要的基础理论课之一。本课程注重使学生系统地获得微积分、级数及常微分方程的基础理论知识和常用的运算方法，培养学生具有比较熟练的分析问题和解决问题的能力，为学习后续课程奠定必要的数学基础。

本书对高等数学中普遍存在的疑难问题指出了解题思路、方法和规律，注重对解题的思路、方法进行分析和介绍，旨在指导读者掌握各种解题技巧和规律，从而做到快速、轻松解题。

本书自 2003 年出版以来，深受读者喜爱。根据读者所提的建议以及作者近几年来教学经验的积累，我们在 2003 年第 1 版的基础上，对本书进行了修订。在本次修订中，我们补充了大量新的例题和解题思路与方法，以帮助学生熟悉更多的题型，同时，通过大量课后练习，更好地检测和提高学习效果。

与第 1 版相比较，本书的变化主要体现在：

（1）增加“函数方程”的解题思路与例题。

（2）增加“高等数学中的 12 个最新思维定势”。

（3）对一些例题的解题方法作了改进和补充，如“有关连续函数在闭区间上命题的证明”等。

（4）增加大量新例题及解题技巧，同时对某些例题的解法进行补充。

（5）增加大量最近几年的考研真题及解题方法。

参加本书修订工作的有陈文灯、武海燕、李冬红老师。

本书主要适用于高等院校在校本科生，同时对于电大，夜大学生以及专科学生也有较大参考价值，尤其对参加研究生备考的学生在短时间内提升数学成绩非常有帮助。

书中不当及错漏之处，恳请广大读者和数学同仁批评指正。

编者

2010 年 11 月

目　录

第 1 章　函　　数

1.1　基本概念

1.1.1　函数的定义

设有两个变量 x 和 y，x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则 f 都有一个确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x).$$

并称 x 为自变量，y 为因变量，变域 D 为函数的定义域，而称因变量的变域为函数的值域.

函数概念的两个要素：定义域和对应关系.

两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数，否则，它们表示两个不同的函数.

例 1.1　在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1)$y=x^0$ 与 $y=1$；　　(2)$y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3)$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$；　　(4)$y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$与 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$.

[解]　(1)$y=x^0$ 的定义域为 $x\neq0$；$y=1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，故该组的两个函数不等价.

(2)$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x\geqslant0$；$y=\sqrt{x^2}$的定义域为全数轴，故该组的两个函数也不等价.

(3)所给两个函数的定义域均为 $x\neq0$，且对应关系也相同，故该组的两个函数等价.

(4)$y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$的定义域为　$\begin{cases}x-3\geqslant0\\x-2>0\end{cases}$　即 $x\geqslant3$，

而 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$的定义域为　$\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}\geqslant0\\x-2\neq0\end{cases}$　即 $x\geqslant3$ 或 $x<2$，

故该组的两个函数不等价.

例 1.2　在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1)$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$　$(x\neq1)$；

(2)$y=\log_2(x-1)+\log_2(x-2)$与 $y=\log_2(x-1)(x-2)$；

(3)$y=\sin x$ 与 $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$；

(4)$y=x$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$.

读者经思考后可做出明确回答.

评注 函数的表示只与定义域和对应关系有关,而与用什么字母表示无关,这个性质很重要(参看 1.4 节有关内容).

1.1.2 函数的定义域与值域

1. 函数的定义域

根据实际问题建立的函数的定义域,就是具有实际意义的实自变量值的集合;由解析式子表示的函数的定义域,就是使运算有意义的实自变量值的集合.

2. 函数定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域:

$y=\dfrac{1}{x}$,定义域为 $x\neq 0$; $y=\sqrt[2n]{x}$,定义域为 $x\geqslant 0$;

$y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$,定义域为 $x>0$; $y=\sin x$ 或 $\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$;

$y=\tan x$,定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$; $y=\cot x$,定义域为 $x\neq k\pi,k\in Z$;

$y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$,定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

例 1.3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$; (2) $y=\sqrt{\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}}$;

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\lg(16-x^2)$; (4) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$.

[解]

(1) $\begin{cases}16-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 及 $2<x<4$.

(2) $\begin{cases}\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}\geqslant 0\\ |x|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1.$

(3) $\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ 16-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\pi\\ -4<x<4\end{cases}\quad(n=0,\pm 1,\cdots)$

$\Rightarrow\ -4<x\leqslant-\pi$ 及 $0\leqslant x\leqslant\pi$.

(4) $\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0\\ \lg(2x-1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$.

3. 函数值域的求法

配方法,这是一种主要方法,比较常用;判别式法;通过求反函数的定义域借以达到求原

函数的值域；利用微积分法；利用三角函数的性质.

例 1.4　求下列函数的值域：

(1)$y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+17$；　　(2)$y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$；

(3)$y=2-\sqrt{3x^2-10x+9}$；　　(4)$y=\dfrac{x+1}{x+2}$；

(5)$y=3-2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$；　　(6)$y=\arcsin\dfrac{2}{x-3}$；

(7)$y=\dfrac{\sin x-3}{\sin x+3}$；　　(8)$y=2^x-2^{2x}+1$.

[解]　(1)应用配方法，则

$$\begin{aligned} y&=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+17\\ &=(x^2-5x+5-1)(x^2-5x+5+1)+17\\ &=(x^2-5x+5)^2+16 \end{aligned}$$

故　$y\in[16,+\infty)$.

(2)应用配方法或判别式法，将原式改写为

$$2yx^2-4yx+3y-5=0$$

而 $$\Delta=(-4y)^2-8y(3y-5)\geqslant 0$$

故 $$y(y-5)\leqslant 0,\text{即 } 0\leqslant y\leqslant 5$$

显然 $y\neq 0$，可知　$y\in(0,5]$.

(3)应用配方法，则

$$y=2-\sqrt{3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}$$

故 $$y\in\left(-\infty,2-\frac{\sqrt{6}}{3}\right].$$

(4)应用反函数法，当 $x\neq -2$ 时，由原式可知

$$xy+2y=x+1,\text{即 } x=\frac{1-2y}{y-1},\quad y\neq 1$$

由此得 $$y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

(5)应用反函数法，由原式可知　$x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3-y}{2}+\dfrac{\pi}{12}$

其定义域为 $$\left|\frac{3-y}{2}\right|\leqslant 1\quad\text{或}\quad |y-3|\leqslant 2$$

故 $$y\in[1,5].$$

(6)应用反函数法，由原式可知　$x=3+\dfrac{2}{\sin y}$

其定义域为 $$y\neq n\pi,\quad n\in Z$$

又因 $$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故 $$y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

(7)利用三角函数的性质,则原式$=1-\dfrac{6}{\sin x+3}$

由于 $$-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\quad 2\leqslant\sin x+3\leqslant 4$$

于是 $$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{\sin x+3}\leqslant\frac{1}{2}$$

故 $$1-\frac{6}{2}\leqslant y\leqslant 1-\frac{6}{4},\quad 即\quad y\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right].$$

(8)原式$=\dfrac{5}{4}-\left(2^x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

故 $$y\in\left(-\infty,\frac{5}{4}\right].$$

例 1.5 已知 $f(x)=\dfrac{4x-a}{x^2+1}$,a 为实常数.

(1)当 $f(x)$的极大值为 1 时,问 a 的值如何?

(2)当 a 取(1)所确定的值时,求 $f(x)$的值域.

[解] (1)$f'(x)=-\dfrac{4x^2-2ax-4}{(x^2+1)^2}$

令 $f'(x)=0$,得 $$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+16}}{4}$$

故 $$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+16}}{4},\quad x_2=\frac{a-\sqrt{a^2+16}}{4}.$$

又 $$f''(x)=\frac{2(4x^3-3ax^2-12x+a)}{(x^2+1)^3},$$

经计算得 $$f''(x_1)<0,\quad f''(x_2)>0$$

故 $$f(x_1)=\frac{4x_1-a}{x_1^2+1}.$$

为极大值,由此可得 $$\frac{4x_1-a}{x_1^2+1}=1,\quad 即\quad 4x_1-a=x_1^2+1$$

将 $x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2+16}}{4}$代入,可知 $a=3$.

(2)当 $a=3$ 时,$f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$

将 $a=3$ 代入 x_1,x_2 的表达式,可知当 $x=2$ 时,$f(x)$有极大值 1;当 $x=-1/2$ 时,$f(x)$有极小值-4.

又因 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0$$

故 $f(2)=1$,$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$ 分别是 $f(x)$的最大值和最小值,因此 $f(x)\in[-4,1]$.

例 1.6 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$,求其值域.

[解] 因为$|\sin t|$是以 π 为周期的连续函数,所以 $f(x)$可能也是以 π 为周期的函数.

事实上　$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=u+\pi} \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(\pi+u)|\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x)$$

因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，故只需讨论在 $[0,\pi]$ 上的情况，如图 1-1 所示.

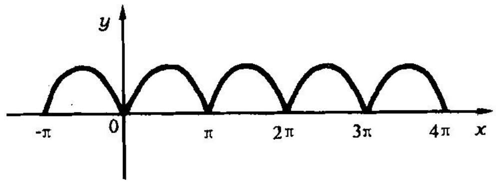


图 1-1

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t \xlongequal{由图像知} 2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2-\sqrt{2},$$

$$f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1,$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t \xlongequal{由图像知} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1.$$

由此可知，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $2-\sqrt{2}$

故　$$f(x)\in[2-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

1.1.3　反函数的定义

设给定一个函数 $y=f(x)$，其值域为 R，如果对于一个 $y\in R$，由方程 $y=f(x)$ 可唯一确定一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记作
$$x=\varphi(y),$$
称为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上，$y=f(x)$ 的反函数通常记作
$$y=f^{-1}(x)\quad 或\quad y=\varphi(x).$$

评注

(1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合；而 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数. 例如 $y=x^2$ 没有反函数；但当 $x\geqslant0$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$.

反函数的求法步骤：

第一步:把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出;

第二步:把从第一步得到的表达式中的 x 与 y 对换,所得结果就是要求的 $y=f(x)$ 的反函数.

例 1.7 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$; (2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$; (3) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$.

[解] (1)当 $x\neq0$ 时,将原式变形为

$$y(10^{2x}-1)=10^{2x}+1+(10^{2x}-1) \quad 即 \quad (y-2)10^{2x}=y$$

解得
$$x=\frac{1}{2}\lg\frac{y}{y-2},$$

故反函数为
$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{x-2}.$$

(2)当 $x\neq-1$ 时,将原式变形为

$$\frac{y-1}{2}=\sin\frac{x-1}{x+1} \quad 即 \quad \frac{x-1}{x+1}=\arcsin\frac{y-1}{2}$$

解得
$$x=\frac{\arcsin\dfrac{y-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}},$$

故反函数为
$$y=\frac{\arcsin\dfrac{x-1}{2}+1}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}.$$

(3)当 $x\geqslant-\dfrac{1}{4}$ 时,将原式变形为

$$y(1+\sqrt{1+4x})=1-\sqrt{1+4x} \quad 即 \quad \sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y}$$

解得
$$x=-\frac{y}{(1+y)^2},$$

故反函数为
$$y=-\frac{x}{(1+x)^2}.$$

1.1.4 分段函数的定义

在定义域内,如果对应于不同的区间,函数有着不同的表达形式,则称这样的函数为分段函数.一般来讲,分段函数不是初等函数,但也有例外,例如

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$$

既可看作分段函数,又可看作初等函数.

常见的几个分段函数:

(1) y 是 x 的最大整数部分,记为 $y=[x]$;

(2)符号函数　$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$

两个函数的图形如图 1-2、图 1-3 所示.

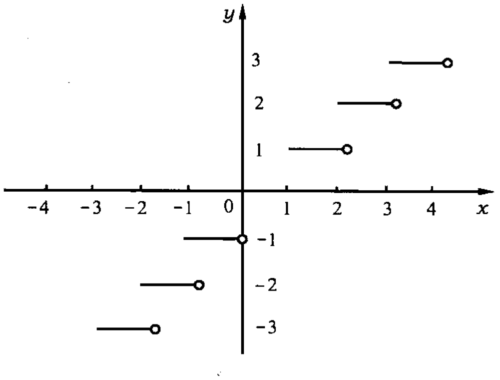


图 1-2

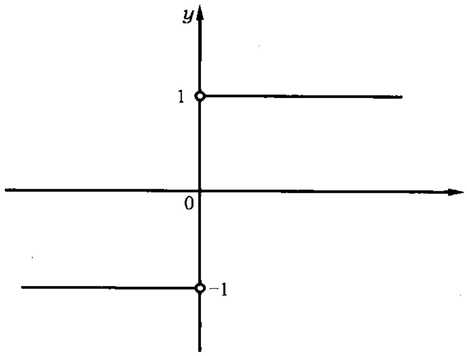


图 1-3

(3)狄里克莱(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$$

①该函数虽难以画出，但有如下特征：它是偶函数. 事实上，当 x 为有理数时，$-x$ 也是有理数，故 x 和 $-x$ 所对应的函数值都为 1，两者相等，即 $f(x)=f(-x)$；而当 x 为无理数时，$-x$ 也是无理数，且 $f(x)=0=f(-x)$，故该函数为偶函数.

②任何正有理数 l 皆为其周期. 事实上，当 x 为有理数时，$x+l$ 也是有理数，故 $f(x)=1=f(x+l)$；当 x 为无理数时，$x+l$ 也是无理数，故 $f(x)=0=f(x+l)$. 可见 l 为 $f(x)$ 的周期.

例 1.8　求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$.

[解]　(1)由 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(1+x^2), & x<0\end{cases}$

解得
$$x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1\\ 0, & y=0\\ -\sqrt{-(y+1)}, & y<-1\end{cases},$$

故反函数为
$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-(x+1)}, & x<-1\end{cases}.$$

(2)由 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$

解得
$$x=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0\\ -\sqrt{y}, & 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases},$$

故反函数为
$$y=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ -\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}.$$

1.1.5 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$,其定义域为 U,而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X,值域为 D. 如果 $D\subseteq U$,则对于 X 内的每一个 x 值经过中间变量 u,相应地得到唯一确定的一个 y 值,则称变量 y 通过中间变量 u 而成为 x 的复合函数. 记作
$$y=f[\varphi(x)].$$

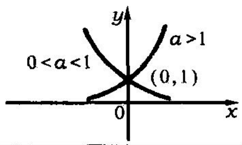
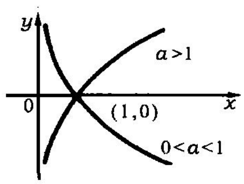
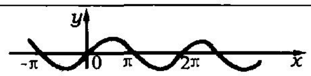
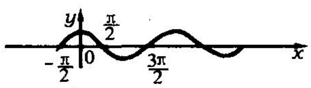
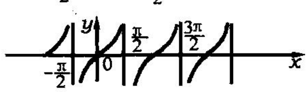
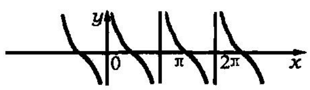
评注 中间变量 u 作为函数时的值域 D 应包含在它作为自变量时的定义域 U 内,这一条件是必不可少的.

例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$,就不能构成复合函数 $y=\arcsin(x^2+2)$,这是因为 $D=\{u\mid 2\leqslant u<+\infty\}$ 不包含于 $U=\{u\mid -1\leqslant u\leqslant 1\}$ 之中.

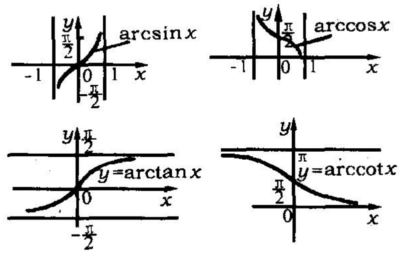
1.1.6 五个基本初等函数

如表 1-1 所示.

表 1-1

函数名称	定义域	值　域	图　像	基本关系式
幂函数 $y=x^\mu$	随 μ 的不同而不同	随 μ 的不同而不同		
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$		
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$		
三角函数				
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		$\sin(\arcsin x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		$\cos(\arccos x)=x$ $(\lvert x\rvert\leqslant 1)$
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $n\in Z$	$(-\infty,+\infty)$		$\tan(\arctan x)=x$ $x\in R$
$y=\cot x$	$x\neq n\pi$ $n\in Z$	$(-\infty,+\infty)$		$\cot(\operatorname{arccot} x)=x$ $x\in R$

续表

函数名称	定义域	值　域	图　像	基本关系式
反三角函数				
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		$\arcsin(\sin x)=x$ $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$		$\arccos(\cos x)=x$ $x\in[0,\pi]$
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		$\arctan(\tan x)=x$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$		$\operatorname{arccot}(\cot x)=x$ $x\in(0,\pi)$
三个恒等式	$a^{\log_a x}=x$，	$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，	$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$	

1.2　函数的基本性质

1.2.1　函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在 X 上有定义，如果$\exists M>0$，使得对于一切 $x\in X$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 上有界，否则称 $f(x)$无界. 例如 $y=\sin x,\cos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$ 均为有界函数. 事实上，

$$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad |\operatorname{arccot} x|\leqslant\pi,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

评注　函数 $f(x)$的有界与无界是相对于某个区间而言的. 例如 $y=f(x)=1/x$ 相对于区间$(0,1)$是无界的，而相对于区间$[0.001,2]$却是有界的.

1.2.2　函数的单调性

设函数 $y=f(x)$在区间 X 上有定义，如果对于$\forall x_1,x_2\in X$，不妨设 $x_1<x_2$，恒有$f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$在 X 上是单调增加的（或单调减少的）；若恒有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$或（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$在 X 上是单调不减的（或单调不增的）.

1.2.3　函数的奇偶性

设函数 $f(x)$在 X 上有定义，如果对于$\forall x\in X$，恒有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于$\forall x\in X$，恒有 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数 $f(x)$的图像关于 y 轴对称；奇函数 $f(x)$的图像关于坐标原点对称.

评注

(1)判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义.

(2)记住关系式 $f(x)+f(-x)=0$，是判别 $f(x)$为奇函数的一种有效方法.