

21世纪高职高专规划教材

公共基础课系列

应用数学

孙素清 主编 熊丽华 王仁成 副主编

清华大学出版社



21 世纪高职高专规划教材·公共基础课系列

应用数学

孙素清 主编

熊丽华 王仁成 副主编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书根据高职高专教育的教学特点,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,注重培养学生的基本运算能力、逻辑思维能力、严谨的科学态度和运用所学知识解决实际问题的能力。

全书共分9章,分别为:函数与极限;导数与微分;导数的应用;定积分与不定积分及其应用;微分方程;多元函数的微积分及其应用;无穷级数;拉普拉斯变换;行列式 矩阵 线性方程组。本书将数学软件包 Mathematica 结合教学内容编入教材,每一章单独一节编入一个数学实验,旨在开阔学生视野,提高学生运用计算机解决数学及实际应用问题的能力。

本书可作为高中起点高职高专各专业数学课程的教材或参考书,也可作为成人教育或自学考试的学习参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/孙素清主编. —北京:清华大学出版社, 2010.7

(21世纪高职高专规划教材·公共基础课系列)

ISBN 978-7-302-22944-5

I. ①应… II. ①孙… III. ①应用数学—高等学校:技术学校—教材 IV. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 101679 号

责任编辑:张龙卿(sdzlq123@163.com)

责任校对:袁 芳

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×260

印 张:19.5

字 数:447 千字

版 次:2010 年 7 月第 1 版

印 次:2010 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:29.50 元

产品编号:037399-01

前言

FOREWORD

数学课程是高职高专各专业必修的公共基础课程,它具有科学工具的作用和科学思维能力培养的功能.高等职业教育是高等教育的一个分支,是有别于学术型人才培养的另一种类型的教育,它所培养的实用型人才,同样应着力体现出“发展”二字,应为学生后续发展留出空间.这也是高等职业教育的吸引力和生命力之所在.教育部 2010 年度工作会议强调:更加积极主动地抓紧抓实提高质量这个核心任务,要在改革教学内容和教学方法上下工夫.我们在充分考虑高职高专教育教学特点的基础上,结合编者多年的实际教学经验,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,注重培养学生的逻辑思维能力、严谨的科学态度和运用所学知识解决实际问题的能力,精心组织编写了这本教材.本教材具有以下特点.

(1) 注重数学自身的应用性原则.按照“实际—理论—实际应用”的发展过程引入基本概念和基本理论,强化学生的应用意识,加强实际问题数学化技能的训练.

(2) 适度关注数学自身的系统性与完整性原则.本书理论叙述较为系统,在教学理念上不过分强调严密论证,而更多的是让学生体会数学的思想方法.同时增加了直观说明和更多的实体,适度减少了较为复杂的计算.

(3) 注重数学实验和建模意识培养的原则.每一章都精心设置了数学实验的内容.这也是我校高等数学课程教改试点的成功经验,通过计算机在数学课堂上的使用,使数学中的数量关系与空间形式有机结合,可以给学生一种奇妙而全新的感觉,充分体现了数学不仅是科学文化知识,而且是一种逻辑思维模式,更是一种工具和素养.增加学生学习数学的兴趣和热情,培养学生的开拓精神和创新意识.

(4) 兼顾了学生在中学已具备的数学基础.在巩固和加强已有知识的基础上,开展新知识的学习,既保证了知识的系统性,又尽量减少知识的重复性.

(5) 对相关的知识进行了有机的整合.如将定积分与不定积分合并为一章,先从实际问题出发引出定积分的概念,再根据定积分计算的需要引入原函数与不定积分概念.

(6) 本书内容覆盖了高职高专各专业对数学课程的需求.对相对较难的内容在相应的章节前加注“*”.考虑相关专业的学习需要,本书增加了“拉氏变换”和“行列式 矩阵”等内容.本书内容按 120 学时编写,基本教学学时以 90 学时为宜,最低应不少于 56 学时.各学校可根据不同专业需要选学相关内容.

本书由大连职业技术学院孙素清任主编(第一章、第六章(除第六节外)、第八章、第九章,以及数学实验一、二、三、四),并负责全书的策划、审稿和定稿;大连工业大学职业技术学院熊丽华(第三章)、王仁成(第五章)任副主编;大连装备制造职业技术学院李永刚(第

二章)、杨鑫(第七章)、宋正阳(数学实验五、六、七、八、九),大连汽车职业技术学院李凌(第四章)以及大连工业大学职业技术学院宋国平(第六章第六节)参加了本书的编写.本书在编写过程中还得到辽宁建筑职业技术学院唐宋宪教授及大连职业技术学院电气与电子工程技术系教师的帮助,在此一并表示感谢.

限于编者水平,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

编 者

2010年4月

目 录

CONTENTS

第一章 函数与极限	1
第一节 初等函数	1
一、函数概念及特性	1
二、基本初等函数	2
三、复合函数	5
四、初等函数	6
五、常见的经济函数	6
六、建立函数关系举例	8
习题 1-1	9
第二节 极限的概念	10
一、数列 $x_n = f(n)$ 的极限	10
二、函数的极限	11
三、极限的性质	14
习题 1-2	14
第三节 无穷小量与无穷大量	14
一、无穷小	15
二、无穷大	16
三、无穷小的比较	16
习题 1-3	17
第四节 极限的运算	17
一、极限的四则运算法则	18
二、两个重要极限	20
三、利用等价无穷小求极限	21
习题 1-4	22
第五节 函数的连续性	23
一、函数连续的概念	23
二、函数的间断点	26
三、闭区间上连续函数的性质	27
习题 1-5	28
实验一	28

复习题一	32
第二章 导数与微分	35
第一节 导数的概念	35
一、引例	35
二、导数的定义	36
三、求导数举例	37
四、导数的几何意义	39
五、可导与连续的关系	40
习题 2-1	40
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则及高阶导数	41
一、函数的和、差、积、商的求导法则	41
二、反函数求导法则	43
三、高阶导数	44
习题 2-2	45
第三节 复合函数的求导法则	46
一、复合函数的导数	46
二、隐函数的导数	48
三、基本初等函数的导数公式及求导法则	50
习题 2-3	50
第四节 函数的微分	52
一、微分的概念	52
二、微分的几何意义	53
三、微分的基本公式与运算法则	53
四、微分在近似计算中的应用	54
习题 2-4	55
实验二	56
复习题二	59
第三章 导数的应用	61
第一节 中值定理及洛必达法则	61
一、中值定理	61
二、洛必达法则	63
习题 3-1	65
第二节 函数的单调性与极值	65
一、函数的单调性	66
二、函数的极值	67
习题 3-2	69

第三节 函数的最大值与最小值	70
一、闭区间上连续函数的最值	70
二、实际问题的最值	71
习题 3-3	74
第四节 曲线的凹凸性、拐点及渐近线	74
一、曲线的凹凸性	75
二、拐点的定义和求法	76
三、函数图像的描绘	77
习题 3-4	79
第五节 弧微分与曲率	80
一、弧微分	80
二、曲率	81
习题 3-5	82
实验三	83
复习题三	85
第四章 定积分与不定积分及其应用	87
第一节 定积分的概念与性质	87
一、引例	87
二、定积分的定义	89
三、定积分的几何意义	90
四、定积分的性质	91
习题 4-1	92
第二节 微积分基本公式	93
一、原函数的概念	93
二、积分上限函数	93
三、微积分基本公式	95
习题 4-2	96
第三节 不定积分的概念与性质	96
一、不定积分的定义	96
二、不定积分的几何意义	97
三、不定积分公式	98
四、不定积分的运算性质	99
习题 4-3	100
第四节 换元积分法	101
一、第一类换元法	101
二、第二类换元法	105

习题 4-4	108
第五节 分部积分法	109
一、不定积分的分部积分法	110
二、定积分的分部积分法	112
习题 4-5	112
* 第六节 广义积分	112
一、无穷区间上的广义积分	112
二、无界函数的广义积分	114
习题 4-6	115
第七节 定积分的应用	115
一、定积分的微元法	115
二、定积分在几何上的应用	116
三、定积分在经济上的应用	119
四、定积分在物理上的应用	120
习题 4-7	122
实验四	123
复习题四	126
第五章 微分方程	130
第一节 微分方程的基本概念	130
习题 5-1	132
第二节 一阶微分方程	133
一、可分离变量的微分方程	133
二、一阶线性微分方程	135
习题 5-2	138
第三节 二阶线性常系数齐次微分方程	138
一、二阶线性常系数齐次微分方程解的性质	138
二、二阶线性常系数齐次微分方程的解法	139
习题 5-3	141
第四节 二阶线性常系数非齐次微分方程	141
一、二阶线性常系数非齐次微分方程解的结构	142
二、二阶线性常系数非齐次微分方程的解法	142
习题 5-4	145
第五节 微分方程应用举例	145
习题 5-5	147
实验五	148
复习题五	150

第六章 多元函数的微积分及其应用	152
第一节 空间解析几何简介	152
一、空间直角坐标系	152
二、曲面、曲线及其方程	153
习题 6-1	159
第二节 多元函数及其极限与连续	160
一、多元函数的概念	160
二、二元函数的极限与连续	161
习题 6-2	163
第三节 偏导数与全微分	163
一、偏导数	164
二、全微分	166
习题 6-3	168
第四节 多元复合函数的微分法	168
一、复合函数的微分法	169
二、隐函数的微分法	170
习题 6-4	171
第五节 二元函数的极值及其应用	172
一、多元函数的极值	172
二、条件极值	174
习题 6-5	175
第六节 二重积分的概念、计算及其应用	176
一、问题的引入	176
二、二重积分的定义	177
三、二重积分的性质	178
四、二重积分的计算及应用	179
习题 6-6	184
实验六	185
复习题六	187
第七章 无穷级数	190
第一节 无穷级数的概念与性质	190
一、无穷级数的基本概念	190
二、无穷级数的基本性质	192
习题 7-1	194
第二节 常数项级数的审敛法	194
一、正项级数的审敛性	194

二、交错级数审敛法	197
三、任意项级数的敛散性	197
习题 7-2	198
第三节 幂级数	199
一、幂级数的概念	199
二、幂级数的收敛半径和收敛区间	199
三、幂级数的运算性质	202
习题 7-3	203
第四节 函数展开成幂级数	203
一、泰勒级数	204
二、函数的幂级数展开	204
三、幂级数应用举例	206
习题 7-4	207
第五节 傅里叶级数	207
一、三角级数与三角级数系的正交性	207
二、周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数	208
三、正弦级数与余弦级数	210
四、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数	211
习题 7-5	213
实验七	213
复习题七	215
第八章 拉普拉斯变换	218
第一节 拉氏变换的概念与性质	218
一、拉氏变换的定义	218
二、拉氏变换的性质	221
习题 8-1	224
第二节 拉氏逆变换及其应用	225
一、拉氏逆变换	225
二、拉氏变换应用举例	227
习题 8-2	230
实验八	230
复习题八	232
第九章 行列式 矩阵 线性方程组	234
第一节 行列式及其性质	234
一、二阶行列式	234
二、三阶行列式	235

三、行列式的性质	237
四、 n 阶行列式	239
习题 9-1	241
第二节 矩阵的概念及运算	243
一、矩阵的概念	243
二、矩阵的运算	244
习题 9-2	247
第三节 逆矩阵 矩阵的秩	248
一、矩阵的初等变换	248
二、逆矩阵	248
三、矩阵的秩	250
习题 9-3	253
第四节 高斯消元法 一般线性方程组的解	254
一、高斯消元法	255
二、非齐次线性方程组	257
三、齐次线性方程组	259
四、线性方程组解的结构	261
习题 9-4	261
第五节 线性方程组应用举例	262
一、在投入及产出分析中的应用	262
二、在电路计算中的应用	263
习题 9-5	265
实验九	265
复习题九	269
各章习题参考答案	273

第一章

函数与极限

极限的概念是微积分学最重要的基本概念之一. 本章将在初等数学的基础上, 复习函数有关知识, 系统学习极限理论, 讨论函数的连续性; 最后是 Mathematica 数学软件简介及利用 Mathematica 作函数的图像和求函数的极限.

第一节 初等函数

学习目标

1. 巩固函数概念及其特性, 了解分段函数、复合函数的概念, 掌握复合函数的分解.
2. 熟练掌握基本初等函数的图像及其性质, 理解初等函数的概念.
3. 会建立简单的实际问题的函数关系式.

一、函数概念及特性

1. 函数的定义

定义 1 设 x, y 为两个变量, 如果变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时, 按照某种对应规律, 变量 y 都有唯一确定的数值与其对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x) \quad (x \in D).$$

变量 x 称为自变量, 函数 y 称为因变量, 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域. 当 x 取遍 D 中的一切实数值时, 与它对应的函数值的集合 M 称为函数的值域.

2. 函数的特性

(1) 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-l, l)$ 内有定义, 如果对于任意 $x \in (-l, l)$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任意 $x \in (-l, l)$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数; 如果函数 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数, 则称函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称; 奇函数的图像关于原点对称.

例 1 判断函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^x + e^{-x} = f(x)$, 所以 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 为偶函数.

(2) 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于区间 (a, b) 内的任意两点

x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加(递增)函数, 区间 (a, b) 称为 $f(x)$ 的单调增加(递增)区间; 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少(递减)函数, 区间 (a, b) 称为 $f(x)$ 的单调减少(递减)区间.

例如, $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加; $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 而在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少.

(3) 函数的周期性

定义 4 设函数 $y = f(x)$, 如果存在正的常数 L , 对于定义域内的一切 x , 恒有 $f(x+L) = f(x)$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 满足这个等式的最小正数 L 称为函数 $f(x)$ 的周期.

例如, 函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(4) 函数的有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在正数 M , 对于区间 (a, b) 内的一切 x , 恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内无界.

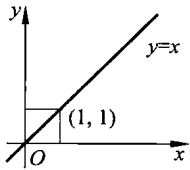
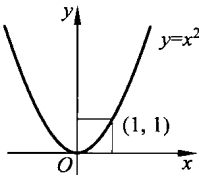
例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. 因为不论 x 取何值, 都有 $|\sin x| \leq 1$. 又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上无界, 而在 $[0.1, 1]$ 上有界.

二、基本初等函数

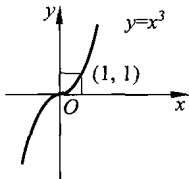
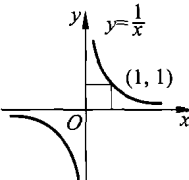
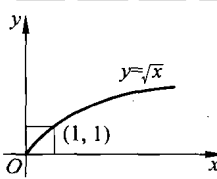
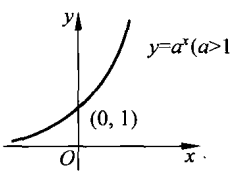
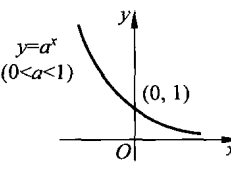
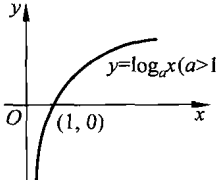
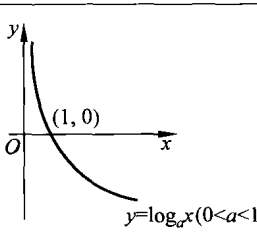
把幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数), 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

现把基本初等函数的定义域、值域、图像及特性列于表 1-1, 以便于掌握.

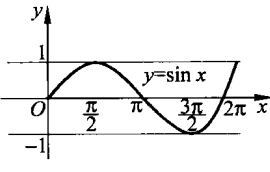
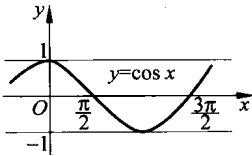
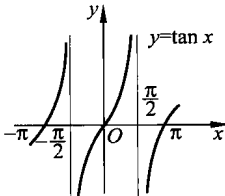
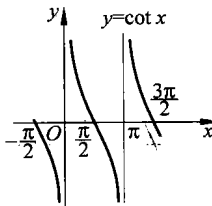
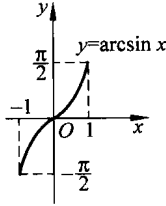
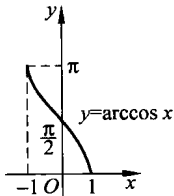
表 1-1

函 数	定义域和值域	图 像	特 性
幂 函 数 $y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 单调增加
$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加

续表

函 数	定义域和值域	图 像	特 性
幂 函 数	$y=x^3$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,在 $(-\infty,+\infty)$ 内 单调增加
	$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数,在 $(-\infty,0), (0,+\infty)$ 内都单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ $x\in(0,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
指 数 函 数	$y=a^x (a>1)$ $x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x (0<a<1)$		单调减少
对 数 函 数	$y=\log_a x (a>1)$ $x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x (0<a<1)$		单调减少

续表

函 数	定义域和值域	图 像	特 性
三角函数	$y = \sin x$		奇函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 内单调减少
	$y = \cos x$		偶函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少, 在 $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$ 内单调增加
	$y = \tan x$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加
	$y = \cot x$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y = \arcsin x$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \arccos x$		单调减少, 有界

续表

函 数	定义域和值域	图 像	特 性
反三角函数 $y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数, 单调增加, 有界
$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

三、复合函数

很多实际问题中的函数关系式是比较复杂的. 两个变量间的函数关系, 往往是借助一个或几个变量建立起来的.

例如, 设质量为 m 的物体, 以初速度 v_0 垂直上抛, 求它的动能 E 与时间 t 之间的函数关系.

由物理学知道, 动能 $E = \frac{1}{2}mv^2$, 即动能 E 是物体运动速度 v 的函数, 而速度 v 又是时间 t 的函数, 如果不考虑空气阻力, 物体的运动速度 $v = v_0 - gt$, 其中 g 为重力加速度, 于是得到动能 E 与时间 t 之间的函数关系式:

$$E = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2.$$

可见, 物体的动能 E 与时间 t 之间的函数关系式是借助于物体的速度 v 而建立起来的, 即由 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 及 $v = v_0 - gt$ 复合而成.

又如函数 $y = \sin 2x$, y 是借助于 $u = 2x$ 而成为 x 的函数的, 即由 $y = \sin u$ 及 $u = 2x$ 复合而成.

定义 6 如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 且 $u = \varphi(x)$ 的值域的部分或全部在 $y = f(u)$ 的定义域之内, 则通过 u 的关系, y 也是 x 的函数, 称 y 是 x 的**复合函数**, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为**中间变量**.

例如, 复合函数 $y = \lg(x+1)$ 是由 $y = \lg u$ 及 $u = x+1$ 复合而成的, 其中 $y = \lg u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 中间变量 $u = x+1$ 的值域为 $(-\infty, +\infty)$, 其一部分在 $y = f(u)$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 内. 复合函数 $y = \lg(x+1)$ 的定义域应为 $(-1, +\infty)$.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如, $y = \lg u, u = \sin v, v = \frac{x}{2}$, 则复合