21世纪高职高专规划教材

公共基础课系列

应用数学

孙素清 主编 熊丽华 王仁成 副主编

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材·公共基础课系列

应用数学

孙素清 主编
熊丽华 王仁成 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据高职高专教育的教学特点，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，注重培养学生的基本运算能力、逻辑思维能力、严谨的科学态度和运用所学知识解决实际问题的能力.

全书共分 9 章，分别为：函数与极限；导数与微分；导数的应用；定积分与不定积分及其应用；微分方程；多元函数的微积分及其应用；无穷级数；拉普拉斯变换；行列式　矩阵　线性方程组. 本书将数学软件包 Mathematica 结合教学内容编入教材，每一章单独一节编入一个数学实验，旨在开阔学生视野，提高学生运用计算机解决数学及实际应用问题的能力.

本书可作为高中起点高职高专各专业数学课程的教材或参考书，也可作为成人教育或自学考试的学习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/孙素清主编．—北京：清华大学出版社，2010.7
(21 世纪高职高专规划教材. 公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-22944-5

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①孙…　Ⅲ. ①应用数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 101679 号

责任编辑：张龙卿(sdzlq123@163.com)
责任校对：袁　芳
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　　**印　　张**：19.5　　**字　　数**：447 千字
版　　次：2010 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2010 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：29.50 元

产品编号：037399-01

前言

FOREWORD

数学课程是高职高专各专业必修的公共基础课程，它具有科学工具的作用和科学思维能力培养的功能. 高等职业教育是高等教育的一个分支，是有别于学术型人才培养的另一种类型的教育，它所培养的实用型人才，同样应着力体现出“发展”二字，应为学生后续发展留出空间. 这也是高等职业教育的吸引力和生命力之所在. 教育部 2010 年度工作会议强调：更加积极主动地抓紧抓实提高质量这个核心任务，要在改革教学内容和教学方法上下工夫. 我们在充分考虑高职高专教育教学特点的基础上，结合编者多年的实际教学经验，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，注重培养学生的逻辑思维能力、严谨的科学态度和运用所学知识解决实际问题的能力，精心组织编写了这本教材. 本教材具有以下特点.

(1) 注重数学自身的应用性原则. 按照“实际—理论—实际应用”的发展过程引入基本概念和基本理论，强化学生的应用意识. 加强实际问题数学化技能的训练.

(2) 适度关注数学自身的系统性与完整性原则. 本书理论叙述较为系统，在教学理念上不过分强调严密论证，而更多的是让学生体会数学的思想方法. 同时增加了直观说明和更多的实体，适度减少了较为复杂的计算.

(3) 注重数学实验和建模意识培养的原则. 每一章都精心设置了数学实验的内容. 这也是我校高等数学课程教改试点的成功经验，通过计算机在数学课堂上的使用，使数学中的数量关系与空间形式有机结合，可以给学生一种奇妙而全新的感觉，充分体现了数学不仅是科学文化知识，而且是一种逻辑思维模式，更是一种工具和素养. 增加学生学习数学的兴趣和热情，培养学生的开拓精神和创新意识.

(4) 兼顾了学生在中学已具备的数学基础. 在巩固和加强已有知识的基础上，开展新知识的学习，既保证了知识的系统性，又尽量减少知识的重复性.

(5) 对相关的知识进行了有机的整合. 如将定积分与不定积分合并为一章，先从实际问题出发引出定积分的概念，再根据定积分计算的需要引入原函数与不定积分概念.

(6) 本书内容覆盖了高职高专各专业对数学课程的需求. 对相对较难的内容在相应的章节前加注“*”. 考虑相关专业的学习需要，本书增加了“拉氏变换”和“行列式　矩阵”等内容. 本书内容按 120 学时编写，基本教学学时以 90 学时为宜，最低应不少于 56 学时. 各学校可根据不同专业需要选学相关内容.

本书由大连职业技术学院孙素清任主编（第一章、第六章（除第六节外）、第八章、第九章，以及数学实验一、二、三、四），并负责全书的策划、审稿和定稿；大连工业大学职业技术学院熊丽华（第三章）、王仁成（第五章）任副主编；大连装备制造职业技术学院李永刚（第

二章)、杨鑫(第七章)、宋正阳(数学实验五、六、七、八、九),大连汽车职业技术学院李凌(第四章)以及大连工业大学职业技术学院宋国平(第六章第六节)参加了本书的编写.本书在编写过程中还得到辽宁建筑职业技术学院唐宋宪教授及大连职业技术学院电气与电子工程技术系教师的帮助,在此一并表示感谢.

限于编者水平,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

编　者
2010 年 4 月

目 录

CONTENTS

第一章

函数与极限

极限的概念是微积分学最重要的基本概念之一. 本章将在初等数学的基础上,复习函数有关知识,系统学习极限理论,讨论函数的连续性;最后是 Mathematica 数学软件简介及利用 Mathematica 作函数的图像和求函数的极限.

第一节 初等函数

学习目标

1. 巩固函数概念及其特性,了解分段函数、复合函数的概念,掌握复合函数的分解.
2. 熟练掌握基本初等函数的图像及其性质,理解初等函数的概念.
3. 会建立简单的实际问题的函数关系式.

一、函数概念及特性

1. 函数的定义

定义 1 设 x、y 为两个变量,如果变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时,按照某种对应规律,变量 y 都有唯一确定的数值与其对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y = f(x) \quad (x \in D).$$

变量 x 称为**自变量**,函数 y 称为因变量,自变量 x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**. 当 x 取遍 D 中的一切实数值时,与它对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

2. 函数的特性

(1) 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-l,l)$ 内有定义,如果对于任意 $x\in(-l,l)$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于任意 $x\in(-l,l)$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**;如果函数 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数,则称函数 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称;奇函数的图像关于原点对称.

例 1 判断函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=f(x)$,所以 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 为偶函数.

(2) 函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果对于区间 (a,b) 内的任意两点

x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加（递增）函数**，区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的**单调增加（递增）区间**；如果当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少（递减）函数**，区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的**单调减少（递减）区间**.

例如，$y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；$y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，而在 $(-\infty,0)$ 内单调减少.

(3) 函数的周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 L，对于定义域内的一切 x，恒有 $f(x+L)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，满足这个等式的最小正数 L 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(4) 函数的有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在正数 M，对于区间 (a,b) 内的一切 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有界**；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**无界**.

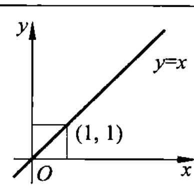
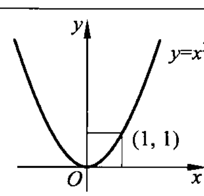
例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 因为不论 x 取何值，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界，而在 $[0.1,1]$ 上有界.

二、基本初等函数

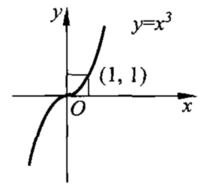
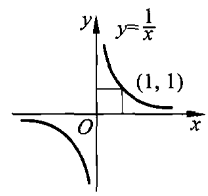
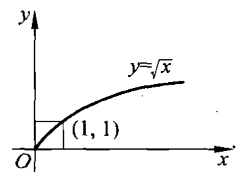
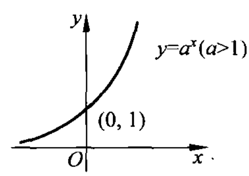
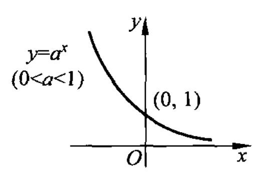
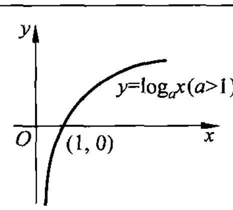
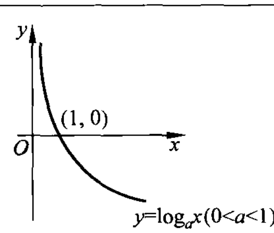
把幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数），指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

现把基本初等函数的定义域、值域、图像及特性列于表 1-1，以便于掌握.

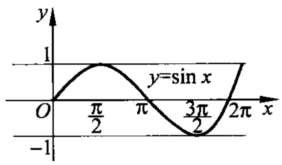
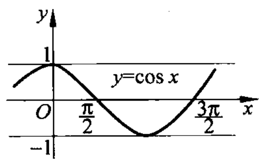
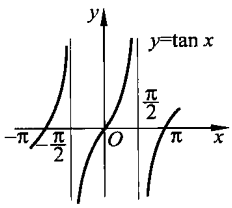
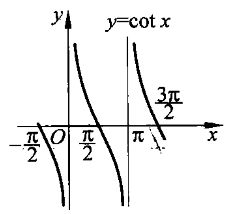
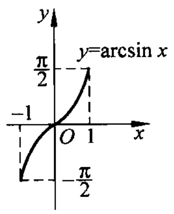
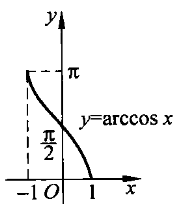
表 1-1

函数		定义域和值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		偶函数，在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

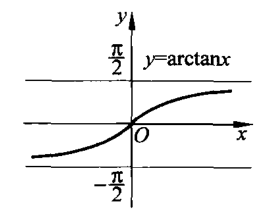
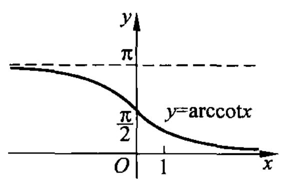
续表

<table>
<tr><th colspan="2">函　　数</th><th>定义域和值域</th><th>图　　像</th><th>特　　性</th></tr>
<tr><td rowspan="3">幂函数</td><td>$y=x^3$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数，在$(-\infty,+\infty)$内单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$</td><td>$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数，在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$内都单调减少</td></tr>
<tr><td>$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$</td><td>$x\in(0,+\infty)$
$y\in(0,+\infty)$</td><td></td><td>单调增加</td></tr>
<tr><td rowspan="2">指数函数</td><td>$y=a^x(a>1)$</td><td rowspan="2">$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,+\infty)$</td><td></td><td>单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=a^x(0<a<1)$</td><td></td><td>单调减少</td></tr>
<tr><td rowspan="2">对数函数</td><td>$y=\log_a x(a>1)$</td><td rowspan="2">$x\in(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=\log_a x(0<a<1)$</td><td></td><td>单调减少</td></tr>
</table>

续表

函数		定义域和值域	图像	特性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y=\cos x$			偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi-\pi,2k\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

续表

函数		定义域和值域	图像	特性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

三、复合函数

很多实际问题中的函数关系式是比较复杂的.两个变量间的函数关系,往往是借助一个或几个变量建立起来的.

例如,设质量为 m 的物体,以初速度 v_0 垂直上抛,求它的动能 E 与时间 t 之间的函数关系.

由物理学知道,动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$,即动能 E 是物体运动速度 v 的函数,而速度 v 又是时间 t 的函数,如果不考虑空气阻力,物体的运动速度 $v=v_0-gt$,其中 g 为重力加速度,于是得到动能 E 与时间 t 之间的函数关系式:

$$E=\frac{1}{2}m\,(v_0-gt)^2.$$

可见,物体的动能 E 与时间 t 之间的函数关系式是借助于物体的速度 v 而建立起来的,即由 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 及 $v=v_0-gt$ 复合而成.

又如函数 $y=\sin 2x$,y 是借助于 $u=2x$ 而成为 x 的函数的,即由 $y=\sin u$ 及 $u=2x$ 复合而成.

定义 6　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $u=\varphi(x)$ 的值域的部分或全部在 $y=f(u)$ 的定义域之内,则通过 u 的关系,y 也是 x 的函数,称 y 是 x 的**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量**.

例如,复合函数 $y=\lg(x+1)$ 是由 $y=\lg u$ 及 $u=x+1$ 复合而成的,其中 $y=\lg u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,中间变量 $u=x+1$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$,其一部分在 $y=f(u)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内.复合函数 $y=\lg(x+1)$ 的定义域应为 $(-1,+\infty)$.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成.例如,$y=\lg u$,$u=\sin v$,$v=\frac{x}{2}$,则复合