"211"大学数学创新课改教材

常微分方程及Maple应用

王鸿业 编著

科学出版社

“211”大学数学创新课改教材

常微分方程及 Maple 应用

王鸿业　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者在多年教学讲义的基础上，参考国内外同类教材编写而成.书中以传统的经典内容为主，但也包括数值解、边值问题、分支与混沌，以及数学软件在常微分方程中的应用等非传统内容.

本书是常微分方程的基本理论与方法及数学软件的应用相结合的教材.它保持了当前通用教材中理论体系相对完整，方法与技巧灵活多样的特点，突出了从问题出发引导、发现解决问题的途径，进而导出重要的概念、理论与方法的过程.全书主要内容包括：绪论、一阶方程的初等积分法、一阶方程的一般理论、高阶微分方程、微分方程组、微分方程的定性理论、Maple在常微分方程中的应用.

本书可作为数学、应用数学、计算数学、信息与计算科学等专业的常微分方程课程的教材，也可作为理工科学生数学实验和数学建模课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程及Maple应用/王鸿业编著.—北京：科学出版社，2011.4
“211”大学数学创新课改教材
ISBN 978-7-03-030523-7

Ⅰ.①常… Ⅱ.①王… Ⅲ.①常微分方程-数值计算-应用软件，Maple-高等学校-教材 Ⅳ.①O241.81

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第039046号

责任编辑：曾 莉 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年4月第 一 版 开本：B5(720×1 000)
2011年4月第一次印刷 印张：21 1/4
印数：1—3 000 字数：415 000

定价：36.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《"211"大学数学创新课改教材》丛书编委会

前　言

当 David Hilbert 在哥廷根主持演讲的时候，他常对演讲者说的一句话是："我们想要的是蛋糕中的葡萄干儿."这里，我们所关心的自然是常微分方程课程这块"蛋糕"中的"葡萄干儿"是什么. 常微分方程已有三百年的历史，已经发展成为一个非常庞大的数学分支. 作为针对本科生以及对此有兴趣的读者所写的一本基础性教材，本书不可能涉及过多的论题，我们将把主要篇幅放在比较经典的基本理论与方法的介绍上. 尽管如此，我们还是兼顾到了学科的发展方向及国际上同类教材的选材趋势，以便有兴趣的读者扩展视野.

下面就编写过程中的一些考虑作几点说明.

一、对于重要的概念或问题，我们尽量用应用例子引出，各章的最后一节基本上都是以解决应用问题结束. 当然，正文中也穿插了不少经典的应用例子. 这样做的好处是读者不会对引入的相关数学概念或问题感到突兀，也不至于认为所学无用，从而激发出学习兴趣. 我们要告诉读者的是，常微分方程本应是带有浓重应用色彩的一门学问，学它的目的当然是要解决实际问题，绝不是仅学点基本理论或方法就万事大吉了. 限于篇幅，我们只能介绍一些有代表性的例子以抛砖引玉，对此有兴趣的读者可阅读专门的数学建模书籍.

二、编者力求做到"由浅入深、循序渐进"，这样便于自学. 例如，对于一阶微分方程初值问题的解的存在唯一性定理，我们先用一个简单的例子让读者了解一下 Picard 逐次逼近法的大意，然后把定理的证明分解成若干部分，使之环环相扣. 每一部分要解决什么问题都非常清楚，也容易解决. 有了这样的准备，当我们再碰到解对初值的连续依赖性以及矩阵形式的一阶微分方程组的初值问题的解的存在唯一性时，便可一句带过而没有理解上的困难. 力求"突出重点、详略得当"也是编者要尽力做到的. 对于传统内容，我们基本上都给出详细的论证，只有少数太长或太难的例外，但会指出相关的参考书籍. 而对于非传统内容，鉴于是为读者扩展视野而编写的，所以比较简略，如第 6 章的部分内容便是如此处理的.

三、读者很快就会发现能够精确求解的微分方程的类型是非常少的，这难免会令人失望. 然而我们要告诉大家的是，你不必为此而苦恼. 因为在实际问题中建立的数学模型本身就是近似的，没必要苛求精确解，大多数情况下能求出近似解或者弄清解的性态已经足够了. 这就是我们特别安排"数值解法"以及"定性理论"的原因. 另外，考虑到计算机技术已相当成熟，用数学软件来解决微分方程中的相关问题已引起越来越多的数学工作者的注意，我们特意编写了"数值解法"和"Maple 在常微分方程中的应用"等相关内容，以利于读者更深入地学习或研究. 这里特别

建议读者在学习各章时，要同步学习一下第 7 章的相关内容，这样对学习会有非常大的帮助. 例如，本书中的大部分作图都是用 Maple 完成的，你也可以用它做很多事情.

四、高阶线性方程和线性方程组完全可以采用矩阵与向量等工具作统一处理，这样在叙述上较为方便. 但编者认为高阶线性方程有其特殊性，有些结果是不能从线性方程组中约化出来的. 因此我们先介绍高阶线性方程的理论，再讲线性方程组的理论，这从方法论的角度来看是合理的，便于读者学习. 但我们也没有完全把两者割裂开来，例如，高阶线性方程解的存在唯一性等，就是化成一阶线性方程组后完成证明的. 另外，我们在第 5 章不断强调两者之间的联系，以弥补如此处理的不足.

五、除了少数几节外，我们在每节的后面都配备了习题，有些习题甚至是对正文中的理论与方法的补充. 我们在书末对计算题给出了参考答案，对较难的题目在题后都附加了提示. 希望读者能够通过做习题这个环节，来培养和提高分析问题和解决问题的能力.

六、把一门学问同它的历史割裂开来绝不是一种明智的选择，它会使知识变得呆板，使读者感到困惑. 我们在编写的过程中始终注意把有关知识与相关背景结合起来，融入相关的人物或事件，力求使这门学问有活力，使学习有动力.

七、有些内容是专为某些精力充沛的读者准备的，它们具有一定的难度，均以“ * ”标明. 对于一般读者，可以根据自己的需要和兴趣，部分或全部跳过这些内容而不会影响对本书主体内容的学习. 根据编者的教学经验，去掉带“ * ”的内容以及第 7 章后，主体部分可以在 72 学时内讲完.

在此要特别感谢国家级名师李梦如教授，他对本书的初稿和定稿都提出了许多建设性的意见，让编者分享其丰富的教学经验，这对完成本书的编写是非常重要的.

由于编者水平和经验所限，本书一定还有错漏或不完善的地方，恳请读者批评指正.

目　录

第 1 章　绪　　论

Not only the movements of the heavenly host must be determined by observation and elucidated by mathematics, but whatsoever else can be expressed by a number and defined by natural law.

—— d'Arcy Wentworth Thompson

在工程技术、自然科学以及社会科学中有许多重要问题，当我们将其转化为数学术语去描述时，都要求确定一个微分方程的解. 我们自然会问：什么是微分方程，它代表什么？微分方程从哪里来，它有什么用？面对一个微分方程，我们能做些什么，怎么去做？对这些问题的回答将涉及微分方程的理论、方法及其应用. 本书将围绕这些方面展开讨论.

在本章，我们首先对方程进行分类，这有利于以后各章节的内容安排. 其次，我们将对微分方程及其解进行定义并给出几何解释. 最后，我们将简要介绍微分方程发展史上的一些重要人物和该学科的几个发展阶段.

1.1　从放射性衰变谈起

我们先看一个例子，尽管非常简单却能展示微分方程在处理实际问题时的强力作用.

1.1.1　放射性衰变

试验表明，放射性同位素的衰变速度同现有量成正比. 假设 $N(t)$ 为时刻 t 时某种放射性同位素的原子数，则方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-kN \quad (k>0\text{ 为常数}) \tag{1.1.1}$$

就是这种衰变物质原子数的一个模型. 这里，等式右端取“－”号，是因为原子数量在减少从而变化率小于零的缘故. 这是一个含有未知函数及其一阶导数的方程，我们把它称为一阶常微分方程. 假定初始时刻 t_0 时的原子数为 N_0，我们称其为初始条件，可写成

$$N(t_0)=N_0. \tag{1.1.2}$$

方程(1.1.1)与初始条件(1.1.2)合起来称为一个初值问题.我们的目标,就是要寻找既满足方程(1.1.1),又满足初始条件(1.1.2)的某函数 $N(t)$. 这样的函数称为初值问题的解.

尽管我们要等到第 2 章才介绍这种方程的求解方法,但这里不难验证函数

$$N(t) = N_0 e^{-k(t-t_0)} \tag{1.1.3}$$

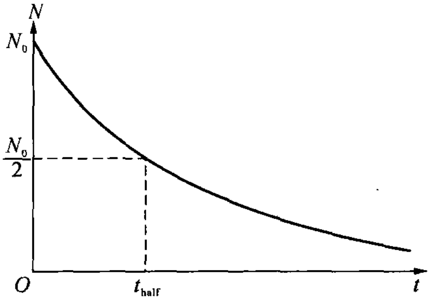

图 1.1

就是我们要找的答案.由此可以看出,放射性同位素的原子数将按指数衰减为零,如图 1.1 所示.

函数表达式(1.1.3)给出了放射性衰变的一般规律.显然,不同的衰变物质,其相应的常数 k 的值是不同的.为了确定 k 的值,我们引进**半衰期**的概念,它是某种特定的放射性同位素衰变到其原始量的一半时所用去的时间,记为 t_{half}. 半衰期的值通常可通过实验得到.我们假定 $t=0$ 时有 N_0 个放射性原子,则方程(1.1.1)的解为 $N(t)=N_0e^{-kt}$. 于是

$$N_0 e^{-kt_{half}} = \frac{1}{2}N_0 \Rightarrow k = \frac{1}{t_{half}}\ln 2.$$

由此可得某一衰变物质的衰变规律: $N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{half}}t}$.

需要指出的是,若将方程(1.1.1)中的 $-k$ 用 k 代替,则得指数增长模型.人口的增长、酵母的繁殖等都可用这种模型描述.

1.1.2 碳 14 同位素断代法

解的表达式(1.1.3)形成了用放射性碳的衰变来测定文物或化石年代的技术根据.该方法大约是在 1950 年由 Willard Libby① 设计的.其原理是:任何活着的生物都会不断地从空气中吸收碳,在其体内,放射性的碳 14 与稳定的碳 12 的同位素数量之比基本上保持常数.一旦生物死亡(如树被伐掉用作木料,或棉花被摘去用于纺织等),放射性碳 14 的原子数将按式(1.1.3)的规律进行衰变,而碳 12 保持不变.这样,通过检测当前生物体中碳 12 与碳 14 的原子数目,就可以确定出该生物体中原有的碳 14 的水平,从而求出碳 14 的当前原子数与原有水平之比.假定在时刻 $t=t_0$ 时生物停止了碳的吸收,碳 14 的原子数目为 N_0. 如果我们知道生物体

① Willard Libby(1908—1980),美国物理化学家,因碳 14 同位素断代技术的发明而获得 1960 年的 Nobel 化学奖,该方法载于其所著《放射性碳测定年代》一书(1955).

中现在 ($t = t_1$) 碳 14 的原子数与原有水平之比为 p，即 $N(t_1) = pN_0$. 利用解(1.1.3)的表达式，我们有 $pN_0 = N(t_1) = N_0 e^{-k(t_1 - t_0)}$. 由此可以确定出生物的死亡时间为

$$t_0 = t_1 + \frac{\ln p}{k}. \tag{1.1.4}$$

这就是所谓的**碳 14 同位素断代法**. 因为放射性碳 14 的半衰期大约是 5700 年，我们需要把式(1.1.1)中的 k 取为

$$k = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1.216 \times 10^{-4}.$$

碳 14 同位素断代法的一个成功应用，就是破解了著名的"都灵裹尸布①"之谜. 据圣经新约记载，耶稣复活后，墓穴中只留下一块裹尸布. 对于裹尸布的下落，经文再无交代，直到 1355 年，在法国小城 Lirey，突然有人宣称拥有这件圣物. 这是一件带有血渍样斑痕的亚麻布，16 世纪后一直被意大利的都灵作为镇市之宝放在约翰大教堂接受基督徒的顶礼膜拜. 然而，对于此前长达 14 个世纪的历史空白，不能不引起历史学家的兴趣，不少人对裹尸布的真实性产生了怀疑.

1988 年，由亚利桑那、牛津和苏黎世的科学家组成的三个独立小组分别对"都灵裹尸布"进行了年代测定. 他们发现裹尸布上的纤维中的碳 14 含量是原有水平的 92%②. 利用表达式(1.1.4)，推断"都灵裹尸布"应是

$$t_0 = 2003 + \frac{\ln 0.92}{0.000\,121\,6} \approx 1318(\text{年}),$$

即中世纪的产物，正与其初次面世的时间相吻合，从而否定了它是当年耶稣用过的裹尸布的传说.

习 题 1.1

1. 一质量为 m 的物体，从高度 s_0 处以初速度 v_0 铅直向上抛出. 设空气的阻力与速度成正比，试求物体的运动规律所满足的微分方程，并写出初始条件.

2. 一高温物体在 20℃的恒温介质中冷却. 设在冷却过程中降温速度与物体和其所在介质的温度差成正比. 已知物体的初始温度为 u_0，试求物体的温度 $u(t)$ 所满足的微分方程，并写出初始条件.

---

① 网页 www.shroud.com 很值得浏览.

② P. E. Damon et al, Radiocarbon dating of the Shroud of Turin, Nature 337(1989). 611 - 615.

3. 已知曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项，试求这曲线所满足的微分方程.

1.2 微分方程及其解的概念

1.2.1 微分方程及其分类

18 世纪初，当 Leibniz，Euler，Bernoulli 等人把一些力学问题转化为数学问题时，他们发现了一类新的方程. 这些方程不仅联系着自变量和未知函数，而且还含有未知函数的导数，这类方程就称为**微分方程**. 例如，下面的方程都是微分方程：

$$y' = 2x, \tag{1.2.1}$$

$$y' = 1 + y^2, \tag{1.2.2}$$

$$x + yy' = 0, \tag{1.2.3}$$

$$\ddot{\theta} + a^2\theta = 0 \quad (\text{“}\cdot\text{”表示 } \mathrm{d}/\mathrm{d}t, \text{常数 } a > 0), \tag{1.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1.2.5}$$

从这些例子可以看出，一个微分方程中的不同变量以及导数可以以不同的面目出现，因此，有必要对方程进行分类. 首先，我们以自变量个数的多少加以分类.

定义 1.2.1 凡是联系一个自变量 x，这个自变量的未知函数 $y = y(x)$ 及其直到 n 阶导数在内的函数方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 称为**常微分方程**，其中导数实际出现的最高阶数 n 称为常微分方程的**阶**.

方程(1.2.1)～(1.2.4)都是常微分方程，前三个都是一阶的，最后一个是二阶的.

定义 1.2.2 如果微分方程中的未知函数是多元的，因而出现的导数是偏导数，这样的方程称为**偏微分方程**，方程中偏导数实际出现的最高阶数称为偏微分方程的**阶**.

方程(1.2.5)是一个二阶偏微分方程.

下面，我们依据未知函数及其导数之间的关系对微分方程作进一步的分类.

定义 1.2.3 如果一个微分方程中对未知函数和它的各阶导数而言是一次的，这样的方程称为**线性**微分方程. 否则，称为**非线性**微分方程.

例如，方程(1.2.1)、(1.2.4)和(1.2.5)是线性方程，而方程(1.2.2)和(1.2.3)是非线性方程. n 阶线性常微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

其中 $a_0(x)$ 不恒等于零.

依据微分方程中未知量及其导数的系数的性质，线性微分方程又可分为**常系数线性微分方程**和**变系数线性微分方程**.

本书主要介绍常微分方程，因此，除非特别声明，今后所说微分方程均指常微分方程，有时简称方程.

1.2.2 方程的解

定义 1.2.4 考虑 n 阶常微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.2.6}$$

其中 F 是变量 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的一个 $n+2$ 元实函数.

(1) 设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y = \varphi(x)$ 及其相应的各阶导数代入方程(1.2.6)，得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

对一切 $x \in I$ 都成立，则 $y = \varphi(x)$ 称为微分方程(1.2.6)在区间 I 上的一个**显式解**.

(2) 关系式 $\psi(x, y) = 0$ 称为微分方程(1.2.6)的一个**隐式解**，如果由该关系式至少可以定义某区间 I 上的一个实函数 $y = \varphi(x)$，使得该函数在区间 I 上为方程(1.2.6)的一个显式解.

(3) 显式解和隐式解统称为方程的**解**.

例如，从定义 1.2.4 可以直接验证：

① $y = x^2 + 1$，$y = x^2 + c$ (c 为任意常数)都是方程(1.2.1)在区间$(-\infty, +\infty)$上的解.

② $y = \tan x$ 是方程(1.2.2)在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的一个解，而 $y = \tan(x-c)$ (c 为任意常数)是方程(1.2.2)在区间 $\left(c-\frac{\pi}{2}, c+\frac{\pi}{2}\right)$上的解.

③ $x^2 + y^2 = 1$ 是方程(1.2.3)在区间$[-1, 1]$上的一个解，而 $x^2 + y^2 = c$ (c 为大于零的任意常数)是方程(1.2.3)在区间$[-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$上的解.

④ 函数 $\theta = \cos at$，$\theta = \sin at$ 以及 $\theta = c_1\cos at + c_2\sin at$ (c_1，c_2 为任意常数)都是方程(1.2.4)在区间$(-\infty, +\infty)$上的解.

需要指出的是，$x^2 + y^2 + 1 = 0$ 却不是方程(1.2.3)的隐式解，尽管由关系式可形式上解出 $y = \pm\sqrt{-x^2-1}$，且满足方程(1.2.3)，但它们都不是实函数，因而不是方程(1.2.3)的显式解，故 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 也不是(1.2.3)的隐式解. 为方便起见，我们把这样的关系式称为微分方程的**形式解**. 以后，我们经常会求出方程的形式

解，如果需要，必须验证它是否是真的解.

从上面的讨论可以看出，微分方程的解可以包含一个或几个任意常数，也可以不包含任意常数. 为了加以区别，我们给出如下定义.

定义 1.2.5 若 n 阶微分方程(1.2.6)的解 $y=\varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 包含 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，则称它为**通解**；若方程(1.2.6)的解 $y=\varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**. 我们把用隐函数方式给出的通解，也称为方程(1.2.6)的**通积分**.

这里所说 n 个任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是独立的，直观来说是指 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不能合并而使其个数减少；具体而言是指存在点 $(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 的某一个邻域，使在其内 $\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}$ 关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的 Jacobi① 行列式

$$\frac{D[\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}]}{D[c_1, c_2, \cdots, c_n]}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}$ 分别是 φ 关于自变量 x 的相应阶导数. 例如，$\theta=c_1\cos at+c_2\sin at$ 是方程(1.2.4)的通解，此因

$$\frac{D[\theta, \dot{\theta}]}{D[c_1, c_2]}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\theta}{\partial c_2} \\ \dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial c_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos at & \sin at \\ -a\sin at & a\cos at \end{vmatrix}=a\neq 0.$$

一般来说，一个 n 阶微分方程的通解包含 n 个独立的任意常数(严格的证明可参看文献[1]第十章). 反之，设 $y=g(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是充分光滑的函数族，其中 x 是自变量，而 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个独立的参数(任意常数). 则存在一个形如(1.2.6)的 n 阶微分方程，使得它的通解恰好是上面给定的函数族 $y=g(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 它的证明方法与下述例子的讨论是类似的.

例 1.2.1 求双参数函数族

---

① C. G. J. Jacobi(1804—1851)，德国数学家. 他在数学方面的工作涉及微分方程、代数学、变分法、复变函数论和数学史的研究. 最主要的成就是和挪威数学家 Abel 相互独立地奠定了椭圆函数论的基础，引入并研究了 θ 函数和其他一些超越函数. 他对 Abel 函数也作了研究，还发现了超椭圆函数. 他对行列式理论作出了奠基性的工作，给出了函数行列式求导公式. 在偏微分方程的研究中，他引进了"Jacobi 行列式"，并应用在多重积分的变量变换和函数组的相关性研究中. Jacobi 在分析力学、动力学以及数学物理方面也有贡献.

$$y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x) \tag{1.2.7}$$

所满足的微分方程.

解 首先,将式(1.2.7)对 x 连续求导两次,得出

$$y'=c_1e^x(\cos x-\sin x)+c_2e^x(\sin x+\cos x), \tag{1.2.8}$$

$$y''=c_1e^x(-2\sin x)+c_2e^x(2\cos x). \tag{1.2.9}$$

从(1.2.7)与(1.2.8)两式可知 Jacobi 行列式

$$\frac{D[y,\ y']}{D[c_1,\ c_2]}=\begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ e^x(\cos x-\sin x) & e^x(\sin x+\cos x)\end{vmatrix}=e^{2x}\neq 0.$$

这说明式(1.2.7)中包含的两个任意常数 c_1 与 c_2 是独立的. 由此可从(1.2.7)与(1.2.8)两式解出 c_1 与 c_2(作为 x, y 和 y' 的函数),即

$$\begin{aligned} c_1&=e^{-x}[y(\sin x+\cos x)-y'\sin x], \\ c_2&=e^{-x}[y(\sin x-\cos x)+y'\cos x]. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

然后将式(1.2.10)代入式(1.2.9),就得到一个二阶常微分方程

$$y''-2y'+2y=0, \tag{1.2.11}$$

它就是函数族(1.2.7)所满足的微分方程,而且式(1.2.7)是微分方程(1.2.11)的通解.

习 题 1.2

1. 指出下列微分方程的阶数,并回答方程是否为线性的:

(1) $y'=4x^2-y$; (2) $y''+2yy'+x=0$;

(3) $xy''-5y'+3xy=\sin x$; (4) $y'+\cos y+2x=0$;

(5) $\sin(y'')+e^y=x$; (6) $(7x-6y)\mathrm{d}x-(x+y)\mathrm{d}y=0$.

2. 验证下列函数或二元方程是相应微分方程的解:

(1) $y=ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, $y'=p(x)y$ (c 为任意常数,$p(x)$为连续函数);

(2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$, $y''-4y=0$ (c_1, c_2 为任意常数);

(3) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y'+xy=2x$ (c 为任意常数);

(4) $y=e^x$, $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$;

(5) $y=c_1\sin x+c_2x$, $(1-x\cot x)y''-xy'+y=0$;

(6) $x^2-xy+y^2=c$, $(x-2y)y'=2x-y$.

3. 试验证 $xy^2=c_1x+c_2$ 是方程 $xy'^2+2yy'+xyy''=0$ 的通解,并求满足