



新世纪高等学校教材



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学与应用数学基础课系列教材

(第3版)

# 数学分析

(第1册)

北京师范大学数学科学学院 主编

郑学安 卞荣雨 刘继志 等 编著



$$d\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)dx$$



北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

SHUXUE FENXI

**新世纪高等学校教材**

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学与应用数学基础课系列教材

(第3版)

# 数 学 分 析

(第1册)

S H U X U E      F E N X I



北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

---

**图书在版编目(CIP) 数据**

数学分析.第1册 / 郑学安, 邝荣雨, 刘继志编著. — 修订本. — 北京: 北京师范大学出版社, 2010.10

新世纪高等学校教材

ISBN 978-7-303-11144-2

I. ①数… II. ①郑… ②邝… ③刘… III. ①数学分析—高等学校—教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 126667 号

---

营销中心电话 010-58802181 58808006  
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>  
电子邮箱 beishida168@126.com

---

出版发行: 北京师范大学出版社 [www.bnup.com.cn](http://www.bnup.com.cn)

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印刷: 北京中印联印务有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 170 mm × 230 mm

印张: 20

字数: 320 千字

版次: 2010 年 10 月第 3 版

印次: 2010 年 10 月第 1 次印刷

定价: 30.00 元

---

策划编辑: 岳昌庆

责任编辑: 岳昌庆

美术编辑: 毛 佳

装帧设计: 毛 佳

责任校对: 李 茵

责任印制: 李 啸

**版权所有 侵权必究**

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

# 内容提要

这套数学分析教材分三册. 第一册是一元函数的极限、连续、微分、积分的概念、基本性质及其应用, 包括二重积分与三重积分的计算. 第二册的内容是一元函数的极限、连续、微分、积分的理论及其应用, 包括级数、函数项级数、广义积分与含参变量积分的理论及其应用. 第三册是多元函数的极限、连续、微分、积分的理论及其应用.

这套数学分析教材可作为高等院校数学系本科数学分析课程的教材或教学参考书.

未经同意, 不得编写出版本教材思考题与练习题的解答.

# 北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年,其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部,1983年成立数学与数学教育研究所,2004年成立数学科学学院。学院现有教师75人,其中教授32人,副教授25人;有博士学位的教师占91%。特别地,有中国科学院院士2人,第三世界科学院院士1人,部长江学者奖励计划特聘教授5人和讲座教授1人,国家杰出青年科学基金获得者4人,入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人,入选教育部跨/新世纪人才培养计划8人。

学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权,1986年获应用数学博士学位授予权。1988年基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科。1990年建立了我校第一个博士后流动站。1996年,数学学科成为国家“211工程”重点建设的学科。1997年成为国家基础科学人才培养基金基地。1998年获数学一级学科博士学位授予权。2001年概率论方向被评为数学界第1个国家自然科学基金创新群体,并获得3期9年资助。2005年进入“985工程”科技创新基础设施建设平台。2007年数学被认定为一级学科国家重点学科。2009年国家教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌,分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队,调和分析与流形的几何方向获国家教育部创新团队。学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、课程与教学论(数学)、科学技术史(数学)、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点。学院下设数学系、统计与金融数学系,有数学与应用数学、统计学2个本科专业和《数学通报》杂志编辑部。(李仲来执笔)

2010-03-18

# 第3版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系。2004年成立北京师范大学数学科学学院。经过95年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

作为国家重点大学的北京师范大学数学科学学院,培养人才和编写教材是两项非常重要的工作。教材的编写是学院的基本建设之一。学院要抓好教材建设;教师要研究教学方法。在教材方面,学院推出一批自己的高水平教材,做到各科都有,约60部。

写教材要慢一点,质量要好一点,教材修订连续化,教材出版系列化,是编写教材要注意的几项基本原则。学院希望教材要不断地继续修改和完善,对已经出版两版的教材,我们准备继续再版。在2005年5月,经由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行协商,由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责),准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的第2版数学教材进行修订后出版第3版。

教材的建设是长期的、艰苦的任务,每一位教师在教学上要自主地开发教学资源,创造性地编写和使用教材。学院建议:在安排教学时,应考虑同一教师在3~5年里能够稳定地上同一门课,并参与到教材的编写或修订工作中去。在学院从事教学的大多数教师,应该在一生的教学生涯中至少以自己为主,编写或修订一种教材作为己任,并注意适时地修

订或更新教材。我们还希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善。

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考。(李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院  
2010-03-16

# 第3版作者的话

这次修订有以下几个创见.

第一,首次定义了赋范极限,它与一元函数极限有相同的性质,它又将各种函数极限的定义,定积分、重积分、曲线积分与曲面积分的定义,曲线弧长与曲面面积的定义,统一为一个定义,这使得学生更容易掌握定积分等较复杂的概念.第二,重新叙述了极限的直观定义,给出了从极限直观定义到极限的数学定义间的直接转化过程,使得学生更容易接受、理解和运用极限的定义.第三,强调了无穷小量理论在极限理论中的核心地位,特别是给出了 Cauchy 准则与一致连续的简洁的、便于理解或运用的无穷小量等价定义.第四,首次提出了微分中值定理与局部单射定理,使得多元微分学有了基本完整的定理体系,使得学生更容易掌握多元微积分中几个重大定理的证明.第五,首次用函数语言给出了曲线、曲面、高维曲面的准确而严格的定义.第六,给出了曲面面积的严格定义,结束了长期以来曲面面积无严格的数学定义的现状.第七,用张量给出了多元泰勒公式简明易懂的表达式,由于张量是一类十分简单的多元函数,学生很容易初步掌握它.第八,首次完整地叙述了康托的集合定义,用这个康托的集合定义,很容易指出罗素悖论和其他集合论悖论的逻辑错误所在.

感谢北京师范大学数学科学学院领导对本书修订工作的支持.感谢北京师范大学出版社对本书修订与出版的支持.参加本次修订的人员有:郑学安、邝荣雨、刘继志.

北京师范大学数学科学学院

郑学安

2010-04-30



## 第2版作者的话

参加本次修订的人员有:邝荣雨,薛宗慈,陈平尚,李有兰.本次修订,时间仓促,只好先抓紧时间,进行大大小小的各种勘误,然后,在时间允许下,在不改变原书结构、体系的情况下,对原书内容作了一些修订、增补.例如,在函数一节中,对中学函数的公式法给出了较确切的含义,对函数之间的各种关系提高到函数空间中给予了定义等,在极限一节中,将原书的“再谈极限”中的内容,一部分放到“极限概念”中,一部分放到“极限性质”中,再适当删去关于“函数的阶”的内容,这就使得整节内容更精炼、更简捷;对书中某些定理与例题的证法与解法做了一些删繁就简的变动.如带拉格朗日余项的泰勒公式的证明等;在级数、广义积分与极限计算中,突出并强调阶的估计法的运用等.另外,对个别练习题与例题作了一些变动,适当增加了一些现在社会与经济方面的练习题.并对全书的思考题进行了一次仔细的审阅,适当增加了一些思考题,相信它们对提高读者的钻研能力会有较大的帮助.任何对本书的错误与不妥之处的批评指正都是对本书的最大支持!

非常感谢北京师范大学数学科学学院郑学安教授,王昆扬教授,他们将使用原书时所发现的错误与不妥之处提供给编者,我们已在修订中加以采纳.非常感谢北京师范大学数学科学学院的领导对本次修订工作的鼓励与支持!非常感谢北京师范大学出版社的支持!

本书第二版编者  
北京师范大学数学科学学院  
2005年8月

# 第1版作者的话

本讲义分四册出版,第一册是一元与多元微积分初步;第二册是一元微积分理论与方法;第三册是多元微积分理论与计算.这三册内容可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书.最后一册为专册,它包含若干专题,供教学选用或课外参考.

编写本书最主要的想法是尝试把现行数学分析课程的内容分两阶段进行讲授,以期达到下述目的:

1. 使学生的学习由易到难,首先侧重概念、计算,进而侧重理论、方法.例如第一册侧重极限、连续等概念和微分、积分的计算;第二册侧重实数域、级数、微积分理论和综合运用微积分方法.

2. 便于相对集中内容与时间,强化训练,按不同要求提高学生单项和综合解题能力.例如把微分学、积分学分为两段讲授,前段(第一册)着重训练学生的计算能力和初步解应用题的能力;后段(第二册)综合运用微积分的理论、方法着重训练学生的论证和估值能力.

通过教学实践我们认为以上安排是可行的,我们还要继续完善它.

本书的内容安排次序,教材处理以及某些定理所采用的证明方法与目前国内通用的数学分析教材不尽相同.例如一元微分学部分的前段(第一册)就不讲微分中值定理,直接利用连续函数性质证明函数单调性判别法,并利用它解决导数的应用问题,到后段(第二册)才出现中值定理及其在理论、估值等各方面的应用.

本书配有较多的练习题,它们有一定的广度和深度.做一定数量并且具有一定难度的习题,是数学分析能力培养的重要一环.本书除练习题外还增设了思考题,其中不少题是教学经验的积累,它们对于深入理解某些概念和定理可能会有好处.

本书在内容、例题与习题的安排和选取上都有一定的“弹性”,以便适应读者的不同需要,对此我们在相应的地方都作了说明,请读者自己选择.

编写本书,做了些尝试,深感难度很大,自觉力不从心,错误和缺点必然存在,切望得到批评指正.

编写本书,参考了很多兄弟院校的教材和习题,受益匪浅,谨致谢意.

本书的前身是北京师范大学数学系1982级、1986级学生使用的讲义,卞荣雨、薛宗慈在这两届学生中试用过该讲义.赵慈庚老师、董延闯老师曾提出了许多有指导性的修改意见,并亲自参与了部分章节的修改.孙永生老师经常鼓励和支持编者大胆进行试验.陈公宁及参与试用过程的许多同志对原讲义提出了许多宝贵意见.分析教研室不少同志都参与过对原讲义的讨论并提出了很多中肯的意见和看法.在此我们谨向关心、帮助我们的老师和同事们表示感谢.

编 者  
北京师范大学数学系  
1988年3月

# 目 录

## 第 1 章 函数与极限 /1

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 1.1 函 数 .....            | 1  |
| 1.1.1 实数域 .....          | 2  |
| I. 常用实数集合 .....          | 2  |
| II. 常用逻辑符号 .....         | 3  |
| III. 实数集合的拓扑性质 .....     | 4  |
| IV. 确界原理 .....           | 5  |
| 1.1.2 函数、复合函数与反函数 .....  | 6  |
| I. 函数概念 .....            | 6  |
| II. 复合函数概念 .....         | 8  |
| III. 反函数概念 .....         | 10 |
| 1.1.3 函数的初等性质 .....      | 12 |
| 1.1.4 基本初等函数的定义与性质 ..... | 16 |
| 1.1.5 逻辑非命题 .....        | 18 |
| 思考题 .....                | 19 |
| 练习题 .....                | 20 |
| 函数小结 .....               | 22 |
| 1.2 极 限 .....            | 23 |
| 1.2.1 极限概念 .....         | 25 |
| I. 数列极限 .....            | 25 |
| II. 函数极限 .....           | 30 |
| III. 无穷小量与无穷大量 .....     | 38 |
| 思考题 .....                | 45 |

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 练习题 .....                                                                  | 47 |
| 1.2.2 极限性质 .....                                                           | 49 |
| 思考题 .....                                                                  | 56 |
| 练习题 .....                                                                  | 57 |
| 1.2.3 两个重要极限 .....                                                         | 59 |
| I. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .....                     | 59 |
| II. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ..... | 62 |
| 练习题 .....                                                                  | 66 |
| 综合练习题 .....                                                                | 68 |
| 极限小结 .....                                                                 | 69 |
| 1.2.4 极限的统一定义* .....                                                       | 70 |
| I. 相对极限 .....                                                              | 70 |
| II. 赋范极限 .....                                                             | 70 |
| 1.2.5 集合论基础 .....                                                          | 71 |
| I. 集合的定义 .....                                                             | 71 |
| II. 集合的初等性质与运算 .....                                                       | 72 |
| III. ZF 公理系统 .....                                                         | 75 |
| IV. 基数 .....                                                               | 75 |
| 1.3 连    续 .....                                                           | 76 |
| 1.3.1 连续与间断 .....                                                          | 76 |
| 思考题 .....                                                                  | 82 |
| 练习题 .....                                                                  | 83 |
| 1.3.2 连续函数的性质 .....                                                        | 84 |
| 思考题 .....                                                                  | 88 |
| 练习题 .....                                                                  | 89 |
| 连续小结 .....                                                                 | 90 |
| 复习参考题 .....                                                                | 91 |

## 第2章 一元微积分 /94

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 2.1 导 数 .....        | 97  |
| 2.1.1 导数与微分概念 .....  | 97  |
| I. 导数,高阶导数 .....     | 97  |
| II. 微分 .....         | 105 |
| III. 高阶微分 .....      | 107 |
| 思考题 .....            | 108 |
| 练习题 .....            | 109 |
| 2.1.2 微分法则 .....     | 111 |
| 思考题 .....            | 125 |
| 练习题 .....            | 126 |
| 2.1.3 导数的应用 .....    | 129 |
| I. 函数的极值与最值 .....    | 129 |
| II. 函数的单调性 .....     | 131 |
| III. 极值判别法 .....     | 133 |
| IV. 洛必达法则 .....      | 138 |
| V. 函数作图 .....        | 139 |
| 思考题 .....            | 143 |
| 练习题 .....            | 144 |
| 导数小结 .....           | 146 |
| 2.2 不定积分 .....       | 147 |
| 2.2.1 不定积分概念 .....   | 147 |
| 思考题 .....            | 150 |
| 练习题 .....            | 150 |
| 2.2.2 基本积分方法 .....   | 151 |
| I. 基本积分表与简单积分法 ..... | 151 |
| 练习题 .....            | 154 |
| II. 换元积分法 .....      | 155 |
| 练习题 .....            | 160 |
| III. 分部积分法 .....     | 162 |
| 思考题 .....            | 166 |
| 练习题 .....            | 167 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 2.2.3 几个初等函数类的积分方法 ..... | 168 |
| I. 有理函数积分法 .....         | 168 |
| II. 三角函数有理式积分法 .....     | 172 |
| III. 某些根式的有理式积分法 .....   | 175 |
| 练习题 .....                | 179 |
| 综合练习题 .....              | 180 |
| 不定积分小结 .....             | 181 |
| 2.3 黎曼积分 .....           | 183 |
| 2.3.1 定积分概念与性质 .....     | 183 |
| 思考题 .....                | 193 |
| 练习题 .....                | 194 |
| 2.3.2 微积分基本定理 .....      | 196 |
| 思考题 .....                | 202 |
| 练习题 .....                | 203 |
| 2.3.3 定积分的计算方法 .....     | 204 |
| 思考题 .....                | 211 |
| 练习题 .....                | 211 |
| 2.3.4 定积分的应用 .....       | 213 |
| I. 定积分在几何上的应用 .....      | 213 |
| II. 定积分在其他方面的应用 .....    | 215 |
| 思考题 .....                | 221 |
| 练习题 .....                | 222 |
| 2.3.5 广义积分及计算 .....      | 223 |
| 思考题 .....                | 231 |
| 练习题 .....                | 231 |
| 2.3.6 定积分的数值计算 .....     | 232 |
| I. 梯形公式 .....            | 233 |
| II. 抛物线公式 .....          | 234 |
| 练习题 .....                | 237 |
| 黎曼积分小结 .....             | 238 |
| 复习参考题 .....              | 239 |

|                    |             |
|--------------------|-------------|
| <b>第3章 多元微积分初步</b> | <b>/242</b> |
| 3.1 偏 导 数          | 243         |
| 3.1.1 多元数值函数       | 243         |
| 3.1.2 可微性与偏导数      | 248         |
| 3.1.3 复合函数微分法      | 254         |
| 练习题                | 259         |
| 3.2 重 积 分          | 262         |
| 3.2.1 二重积分         | 262         |
| 3.2.2 三重积分         | 272         |
| 3.2.3 重积分的应用       | 278         |
| I. 质量与重心           | 278         |
| II. 转动惯量           | 280         |
| III. 引力            | 281         |
| 练习题                | 282         |
| 多元微积分小结            | 283         |
| <b>部分习题答案或简单提示</b> | <b>284</b>  |
| <b>索 引</b>         | <b>301</b>  |



# 第1章 函数与极限

## 1.1 函 数

17 世纪是生产、技术、科学大发展的光辉年代. 天文学对行星、地球轨道的研究; 航海业对经纬度的研究; 弹道学对抛射体的研究; 机械制造对螺线、旋轮线、摆线的研究等都促使数学必须研究运动. 当时, 人们把曲线理解为运动的几何形象, 把变量之间的关系——函数理解为运动的数量形式. 深通自然科学和数学的法国哲学家笛卡儿 (Descartes, 1596—1650) 从经纬制出发引入了坐标系, 创立了用代数方法研究几何的崭新学科——解析几何, 它美妙而和谐地把运动、曲线、函数融合在一起, 给 17 世纪以来数学的巨大进展奠定了基础. 恩格斯对笛卡儿的革新思想给予了很高的评价, 他说: “数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数, 运动进入了数学; 有了变数, 辩证法进入了数学……”

在 17, 18 两个世纪的漫长岁月中, 函数概念几乎占据了当时所有科学研究工作的中心位置, 运动与曲线赋予函数的新鲜活力使它结下了累累果实, 然而, 透过披在它身上生动、直觉的外衣去认识它的本质在历史上却经过了一个相当艰苦的历程.

1673 年, 莱布尼茨 (Leibniz, 1646—1716) 在一篇手稿中第一次用“函数”一词表示任何一个随着曲线上点的变动而变动的量, 例如切线、法线、次切线的长度及纵坐标等, 同时他又引进了“常量”“变量”和“参变量”等概念.

被拉普拉斯 (Laplace, 1749—1827) 誉为 18 世纪后半叶全体数学家共同导师的欧拉 (Euler, 1707—1783) 对函数概念的描述也不能超越历史. 他在 1748 年《无穷小分析引论》(这是世界上第一部以函数为基础的微积分教科书) 一书中写道: “变量的函数是一个解析表达式, 它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的”. 同时他又说函数就是“在  $xOy$  平面上徒手画出来的曲线所表示的  $y$  与  $x$  之间的关系”. 到了 1775 年, 他在《微分学》中又写道: “如果某些变量以这样一种方式依赖于另一些变量, 即当后面这些变量变化时, 前面的变量便随之变化, 则称前面的变量为后面变量的函数”. 欧拉用生动、直观然而却是狭隘的语言描述的函数概念对后世的影响是深远的, 尤其是他在 1734 年引进的函数记号  $f(x)$  一直沿用至今.