历年考研数学真题分类解析

第二版

（理工类）

李林 编著

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

历年考研数学真题分类解析 第二版

李 林 编著

（理工类）

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题分类解析. 理工类/李林编著. —2版. 大连:大连理工大学出版社,2010.3
ISBN 978-7-5611-4958-4

Ⅰ.历… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第116713号

大连理工大学出版社出版
大连市软件园路80号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:17.75 字数:410千字
2009年7月第1版 2010年3月第2版
2010年3月第2次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:王 辉
封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-4958-4 定价:30.00元

前　言

《历年考研数学真题分类解析》(第 2 版)是为报考硕士研究生数学考试编写的辅导书。真题是由教育部考试中心组织命制的,具有权威性、科学性和规范性。在考研的所有练习题中,真题是最有价值的。全面透彻地研究历年的试题,是广大考生复习备考中必不可少的关键环节,有助于掌握考试动态,赢得高分。

按照现行考研数学大纲,考试分理工类(包括数学一、数学二)和经管类(数学三),《历年考研数学真题分类解析》分理工类和经管类,对 1997—2010 年真题进行分类解析,按照大纲的章节顺序编写:

(1)每题先指出"考点",然后是"解析",分析该题的思路与方法,最后进行"点评",总结该题的关键所在以及一般性的结论。

(2)每题标明了年份与题别,如 2010 年数一・二(8)表示 2010 年数学一,第二大题的第 8 小题。

(3)考研大纲在 2008 年进行了修订,将原来的数学三、数学四合并为数学三。有些真题也会出现不严谨的情况,在"点评"中做出了说明,以帮助考生全面了解真题。

本书是考研数学系列丛书之一,已出版的《大学数学辅导》为考研第一阶段复习用书,可使考生全面、系统地掌握大纲所要求的基本概念、基本定理、基本方法。《历年考研数学真题分类解析》和《考研数学冲刺》为考生第二阶段训练用书,用以检查第一阶段的复习效果,提高应试水平。

在丛书的编写过程中,得到了大连理工大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,不当和疏漏之处在所难免,望广大专家和读者批评指正。

编著者

2010 年 3 月

目　录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第1章 函数、极限与连续性

一、选择题

1.(2010 数一·一(1)) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$( )。

A. 1　　B. e　　C. e^{a-b}　　D. e^{b-a}

考点 已知极限,确定参数。

解析

$$原式=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2-bx^2+abx}{x^2-ax+bx-ab}}=e^{a-b}$$

故C正确。

点评 属于常考题型。

2.(2010 数二·一(1)) 函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点个数为( )。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

考点 函数间断点。

解析 $f(x)$有间断点:$x=0,\pm1$。又

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to0^+}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1.\ \lim_{x\to0^-}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

故$x=0$是第一类间断点。

$$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以$x=1$是$f(x)$的可去间断点。

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$$

所以$x=-1$是$f(x)$的无穷间断点。故B正确。

点评 属于基本题。

3.(2009 数一、数二·一(1)) 当$x\to0$时,$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,则( )。

A. $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　B. $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　　C. $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　D. $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

考点　无穷小的比较。

解析　依题意

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2(-bx)}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=\frac{-a^3}{6b}=1$$

故

$$a^3=-6b$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，所以 $1-a\cos ax\to 0(x\to 0)$，故 $a=1,b=-\frac{1}{6}$。A 正确。

点评　已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，确定参数 a 与 b 的值是常考题型。但此题需由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 的存在性得到 $a=1$。

4.(2007 数一、数二·一(1))　当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 是等价无穷小量的是(　　)。

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

考点　等价无穷小。

解析　当 $x\to 0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x})$，$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$。B 正确。

5.(2004 数一、数二·二(7))　把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　)。

A. α,β,γ　　B. α,γ,β　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

考点　无穷小的比较，洛比达法则，积分变限函数求导。

解析　α、β、γ 直接比较很麻烦，考虑以 x^k 来比较。

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{x^k}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}}$$

欲使上式极限存在且不为 0，应有 $k=1$，即 α 与 x 是同阶无穷小。

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{x^k}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan x}{kx^{k-2}}$$

欲使上式极限存在且不为 0，应有 $k=3$，即 β 与 x^3 同阶无穷小。

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}{x^k}\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-\frac{1}{2}}\sin x^{\frac{3}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2kx^{k-1}}$$

欲使上式极限存在且不为 0，应有 $k=2$，即 γ 与 x^2 是同阶无穷小。故排列次序是 α、γ、β。B 正确。

点评　此解法通过确定 α、β、γ 是 x^k 的同阶无穷小，从而得到排列顺序。

6.（2003 数一、数二 · 二(2)）　设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）。

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot c_n$ 不存在　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot c_n$ 不存在

考点　数列极限定义，极限运算性质。

解析　讨论抽象数列极限与性质，可采用排除法（即举反例）或利用定义和性质推理。对于 A，取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，显然 $a_1=1$，$b_1=0$，$a_1>b_1$，并不是对一切 n 有 $a_n<b_n$，故 A 不正确；对于 B，取 $b_n=\dfrac{n-1}{n}$，$c_n=n-2$，有 $b_1=0>c_1=-1$，故 B 不正确；对于 C，取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$c_n=n-2$，有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot c_n=1$，故 C 不正确，只有 D 正确.

点评　由已知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot c_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n\cdot c_n}{b_n}=\dfrac{a}{1}=a$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot c_n$ 不存在。

7.（2008 数二 · 一(4)）　设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有（　　）。

A. 一个可去间断点，一个跳跃间断点　　B. 一个可去间断点，一个无穷间断点

C. 两个跳跃间断点　　D. 两个无穷跳跃间断点

考点　函数间断点。

解析　由已知，$x=0$，$x=1$ 为 $f(x)$的间断点

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x\cdot\sin x}{1-x}=\lim_{x\to0^+}x\ln x$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(-x)\sin x}{1-x}=\lim_{x\to0^-}x\ln(-x)=0$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\sin1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\sin x=-\sin1$$

故 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点，A 正确。

8.（2007 数二 · 一(5)）　曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

考点　曲线的渐近线。

解析　由

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$$

知 $x=0$ 是垂直渐近线。

由

$$\lim_{x\to -\infty}y=\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$$

知 $y=0$ 是水平渐近线。

由

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}(y-x)=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=0$$

知 $y=x$ 为斜渐近线,故 D 正确。

9.(2007 数二·一(2))　函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　　)。

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

考点　函数间断点。

解析　由已知,$x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点。又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1\times 1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1\times(-1)=-1$$

知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点,故 A 正确。

10.(2005 数二·二(12))　设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则(　　)。

A. $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

考点　求函数的间断点并判别其类型。

解析　依题设,$x=1,x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点。又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$,$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$,知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点。$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$,知 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,故 D 正确。

点评　判别函数的间断点是常考内容。

11.(2002 数二·二(3))　设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足

初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（　　）。

A. 不存在　　B. 等于 1　　C. 等于 2　　D. 等于 3

考点　洛比达法则。

解析　由已知，$y(x)$ 是方程满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解。故

$$y''(0)=e^{3x}\big|_{x=0}-py'(0)-qy(0)=1$$

且 $y''(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{1}=2$$

故 C 正确。

点评　此题也可利用泰勒公式将 $y(x)$ 表示出来。

由 $y(0)=y'(0)=0$，$y''(0)=1$，有

$$y(x)=0+0+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}}=2$$

12.（2001 数二 · 二(2)）　设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

考点　无穷小的比较。

解析　由已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0$$

又当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，$\sin x^n\sim x^n$，于是两个极限分别可写为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2\cdot x^{n+1}}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=0$$

故 $n+1<4$ 且 $n+1>2$，即 $n=2$，B 正确。

点评　考生应熟悉常用的等价无穷小。

13.（2001 数二 · 二(1)）　设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]$ 等于（　　）。

A. 0　　B. 1

C. $\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

考点　复合函数。

解析　用代入法。$f[f(x)]=\begin{cases}1 & |f(x)|\leqslant 1\\ 0 & |f(x)|>1\end{cases}$，由已知 $|f(x)|\leqslant 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$，

故 $f[f(x)]=1$。B 正确。

点评　此题属于基本题。

14.（2000 数二 · 二(4)）　若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　　）。

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

考点　函数极限，极限与无穷小的关系。

解析

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x+\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}+0=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36$$

故 C 正确。

点评　本题的解法用到恒等变形，也可由极限与无穷小的关系：

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\alpha\quad(\alpha\to 0，当\ x\to 0)$$

从而

$$f(x)=\frac{\alpha x^3-\sin 6x}{x}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+\frac{\alpha x^3-\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+\alpha x^3-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\alpha=36$$

15.（2000 数二 · 二(1)）　设函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　　）。

A. $a<0,b<0$　　B. $a>0,b>0$

C. $a\leqslant 0,b>0$　　D. $a\geqslant 0,b<0$

考点　已知极限，确定参数。

解析　由已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，当 $a<0,b\neq 0$ 时，$f(x)$ 有间断点 $x=\frac{1}{b}\ln(-a)$，故排除 A。

当 $a\neq -1,b=0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{a+1}=\infty$，与已知矛盾。

当 $a=-1,b=0$ 时，$f(x)$ 无定义，由此可知 $b\neq 0$，

当 $b<0$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{a+e^{bx}}=0$。

综上讨论知，$a\geqslant 0,b<0$，故 D 正确。

点评　此题应用了排除法。

16.（1999 数二 · 二(4)）　"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛的（　　）。

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

考点　数列极限的定义。

解析　将已知条件与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义对照。

事实上，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，记 $\varepsilon_1=\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，记 $N=N_1+1$，当 $n\geqslant N=N_1+1>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon_1=\varepsilon\leqslant 2\varepsilon$，故必要性成立。

再证充分性。对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，令 $0<\varepsilon<\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon_1}{2}\right\}$，存在正整数 N，取 $N_1=N$，当 $n>N=N_1$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$，即充分性得证。故 C 正确。

点评　本题的关键是理解定义中 $\varepsilon_1>0$ 的任意性与 N_1 的存在性。

17.（1999 数二 · 二(2)）　设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　）。

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶但不等价的无穷小　　D. 等价无穷小

考点　无穷小的比较，重要极限。

解析　由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin t}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{5}{\mathrm{e}}$$

知 C 正确。

点评　本题涉及无穷小的比较，积分上限函数求导，洛比达法则，重要极限多个知识点。

18.（1998 数二 · 二(1)）　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　　）。

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　B. 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

考点　极限运算，数列的极限。

解析　由

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_ny_n\cdot\frac{1}{x_n}=0\cdot 0=0$$

知 D 正确。

点评　(1) 由 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小知，$x_n\neq 0$。

(2) 本题也可举反例进行排除：

A 的反例：$x_n=n$，$y_n=\frac{1}{n^2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$，但 y_n 不发散。

B 的反例：x_n 取 $0,1,0,2,\cdots,0,n,\cdots$

y_n 取 $1,0,2,0,\cdots,n,0,\cdots$

则 $x_ny_n=0$。故$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 x_n 与 y_n 均无界。

C 的反例：x_n 取 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ y_n 取 1，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但 y_n 不是无穷小。

故只有 D 正确。

19.(1997 数二·二(5)) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]$ 为(　　)。

A. $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

考点　复合函数。

解析　采用举例排除法。当 $x=1$ 时，$f(1)=-1$，$g[f(1)]=2-(-1)=3$。故排除 A 和 C。当 $x=-1$ 时，$f(-1)=1$，$g[f(-1)]=3$，排除 B。故 D 正确。

点评　这类选择题常采用举例排除法。

20.(1997 数二·二(1)) 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

考点　无穷小的比较。

解析

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^n}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{nx^{n-1}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\frac{x^2}{x^{n-1}}\end{aligned}$$

故当 $n-1=2$ 时，上述极限为$\frac{1}{n}$。从而 C 正确。

点评　此题属于基本题。

二、填空题

1.(2006 数一·一(1)) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______。

考点　$\frac{0}{0}$型极限的计算。

解析　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$。

点评　当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$。

2.（2006 数二 · 一(1)）　曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$的水平渐近线方程为________。

考点　求水平渐近线。

解析

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}}=\frac{1}{5}$$

故水平渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{5}$。

3.（2005 数二 · 一(2)）　曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$的斜渐近线方程为________。

考点　斜渐近线方程。

解析

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{3}{2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}[(1+x^{-1})^{\frac{3}{2}}-1]}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{3}{2}x^{-1}=\frac{3}{2}$$

故斜渐近线方程为

$$y=x+\frac{3}{2}$$

点评　这里利用了　$(1+x^{-1})^{\frac{3}{2}}-1\sim\dfrac{3}{2}x^{-1}\quad(x\to+\infty)$

4.（2003 数一 · 一(1)）　$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______。

考点　1^{∞}型极限。

解析

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}\cdot\ln\cos x}$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\cdot\ln(\cos x-1+1)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

故

$$\text{原式}=e^{-\frac{1}{2}}$$

点评　利用 $u^v=e^{v\ln u}$，求 1^{∞}型极限是常用方法。

5.（2000 数二 · 一(4)）　曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线方程为________。

考点　斜渐近线方程。

解析
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right]$$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\left(\frac{2e^t-2}{t}-e^t\right)=2-1=1$$

当 $x\to-\infty$时,有同样结果。故曲线的斜渐近线方程为 $y=2x+1$。

6.(1999 数一·一(1)) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$______。

考点 $\infty-\infty$型极限。

解析
$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{3x^2\cos^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{3x^2\cos^2x}=\frac{1}{3}$$

点评 $\infty-\infty$型极限一般先通分或提取公因式,化为$\frac{0}{0}$型或$\infty\cdot0$型。

7.(1998 数一、数二·一(1)) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______。

考点 $\frac{0}{0}$型极限。

解析
$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{4x\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}$$

点评 此题也可用泰勒公式。

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

故
$$原式=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}$$

8.(1998 数二·一(5)) 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)(x>0)$的渐近线方程为______。

考点 渐近线方程。

解析 由$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=+\infty$知,曲线没有水平渐近线。又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right]$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln e\left(1+\frac{t}{e}\right)-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}=\frac{1}{e}$$

故斜渐近线方程为

$$y=x+\frac{1}{e}$$

点评　由已知 $x>0$，所以只计算 $x\to+\infty$时的极限。

9.（1997 数一·一(1)）　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______。

考点　$\frac{0}{0}$型极限。

解析　直接用洛比达法则，求导不方便，先用等价无穷小替换化简。

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{(1+\cos x)\cdot x}+\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}$$

$$=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$$

点评　此题也可直接用等价无穷小替换：

$$3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}\sim3x$$

$$(1+\cos x)\ln(1+x)\sim2x\quad(x\to0)$$

则

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

10.（2006 数二·一(2)）　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x\sin t^2\,dt & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______。

考点　积分变限函数的极限，连续性。

解析　由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2\,dt}{x^3}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}=a$ 知，$a=\dfrac{1}{3}$。

11.（2005 数二·一(5)）　当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$______。

考点　由等价无穷小确定表达式中的参数。

解析　由

$$\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-1}{kx^2}-\frac{\sqrt{1+\cos x-1}-1}{kx^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-1}{kx^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x-1}-1}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{kx^2}$$

$$=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}=\frac{3}{4k}=1$$

得 $k=\frac{3}{4}$。

点评　此题为利用等价无穷小替换,先作恒等变形。

12.(2004 数二·一(1))　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______。

考点　求函数的间断点。

解析　当 $x=0$ 时,$f(0)=0$。当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{n\left(x^2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{x}$,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点。

点评　求由极限表示的函数的间断点,是常考题型。

13.(2003 数二·一(1))　若 $x\to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$______。

考点　等价无穷小。

解析　由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{a}{4}=1$,得 $a=-4$。

14.(2002 数二·一(1))　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______。

考点　连续性。

解析

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ae^{2x}=a,\quad f(0)=a$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow f(0+)=f(0-)=f(0)$,得 $a=-2$。

点评　已知连续性、确定参数是常考题型。

15.(2001 数二·一(1))　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$______。

考点　函数极限。