LGB 理工类本科生

21世纪高等学校数学系列教材

泛函分析

侯友良 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

理工类本科生

21世纪高等学校数学系列教材

泛函分析

侯友良 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/侯友良编著. —武汉:武汉大学出版社,2011.1
21 世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-08306-6

Ⅰ.泛… Ⅱ.侯… Ⅲ.泛函分析—高等学校—教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 206786 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:通山金地印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:13.75　字数:289 千字　插页:1
版次:2011 年 1 月第 1 版　　2011 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-08306-6/O·435　　定价:20.00 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

21世纪高等学校数学系列教材

编　委　会

主　　任　羿旭明　武汉大学数学与统计学院，副院长，教授

副 主 任　何　穗　华中师范大学数学与统计学院，副院长，教授

蹇　明　华中科技大学数学学院，副院长，教授

曾祥金　武汉理工大学理学院，数学系主任，教授、博导

李玉华　云南师范大学数学学院，副院长，教授

杨文茂　仰恩大学(福建泉州)，教授

编　　委　(按姓氏笔画为序)

王绍恒　重庆三峡学院数学与计算机学院，教研室主任，副教授

叶牡才　中国地质大学(武汉)数理学院，教授

叶子祥　武汉科技学院东湖校区，副教授

刘　俊　曲靖师范学院数学系，系主任，教授

全惠云　湖南师范大学数学与计算机学院，系主任，教授

何　斌　红河师范学院数学系，副院长，教授

李学峰　仰恩大学(福建泉州)，副教授

李逢高　湖北工业大学理学院，副教授

杨柱元　云南民族大学数学与计算机学院，院长，教授

杨汉春　云南大学数学与统计学院，数学系主任，教授

杨泽恒　大理学院数学系，系主任，教授

张金玲　襄樊学院，讲师

张惠丽　昆明学院数学系，系副主任，副教授

陈圣滔　长江大学数学系，教授

邹庭荣　华中农业大学理学院，教授

吴又胜　咸宁学院数学系，系副主任，副教授

肖建海　孝感学院数学系，系主任

沈远彤　中国地质大学(武汉)数理学院,教授
欧贵兵　武汉科技学院理学院,副教授
赵喜林　武汉科技大学理学院,副教授
徐荣聪　福州大学数学与计算机学院,副院长
高遵海　武汉工业学院数理系,副教授
梁　林　楚雄师范学院数学系,系主任,副教授
梅汇海　湖北第二师范学院数学系,副主任
熊新斌　华中科技大学数学学院,副教授
蔡光程　昆明理工大学理学院数学系,系主任,教授
蔡炯辉　玉溪师范学院数学系,系副主任,副教授
执行编委　李汉保　武汉大学出版社,副编审
黄金文　武汉大学出版社,副编审

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

内容简介

本书系统地介绍了泛函分析的基础知识．全书共分五章：第 1 章，距离空间与赋范空间；第 2 章，有界线性算子；第 3 章，Hilbert 空间；第 4 章，有界线性算子的谱；第 5 章，拓扑线性空间．

本书在选材上注重少而精，强调基础性．在结构安排上，由浅入深，循序渐进，系统性和逻辑性强．在叙述表达上，力求严谨简洁，清晰易读，能够简化的证明，在保持书稿结构严谨的前提下尽量予以简化，便于教学和学生自习．

本书配备了较多的习题，以备选用．本书的末尾对大部分习题给出了提示或解答要点，供读者参考．本书的第 5 章介绍了拓扑线性空间的基本概念，这一章的内容不是本科生教材必须包含的内容，可以作为有兴趣的读者参考．

本书可以作为综合性大学，理工科大学和高等师范院校的数学各专业或其他学科部分专业本科生的教材或参考书，也可以供研究生、相关教师以及数学爱好者参考．

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，

习题，本书的末尾对部分习题给出了提示或解答要点，供读者参考。本书的第5章介绍了拓扑线性空间的基本概念，这一章的内容不是本科生教材必须包含的内容，可以作为有兴趣的读者的阅读参考。

本书在编写过程中，参考了国内外一部分同类教材。在此，对这些文献的作者表示感谢！

作　者

2010年10月

前　言

泛函分析是现代数学的一个较新的重要分支。泛函分析综合应用分析的、代数的和几何的观点和方法，研究无限维空间和这些空间上的线性算子。这些空间通常是由满足某些条件的函数或数列构成，并且在其上赋予了具有内在联系的代数和拓扑结构。例如，区间$[a,b]$上的连续函数空间$C[a,b]$和p次方可积函数空间$L^p[a,b]$就是这样的空间。类似这样的空间在数学的各个分支会经常遇到。泛函分析的一部分内容是空间的一般理论、包括空间的基本性质、空间的结构与分类等。泛函分析的主要内容是线性算子的理论，例如线性算子的有界性、线性算子的谱理论等。

泛函分析的一个特点是高度的概括性。在泛函分析中，将一些具有共性的空间抽象为一类空间，研究这类空间以及这类空间上的线性算子的一般性质。例如，在机械求积公式的收敛性和 Fourier 级数的发散性等问题中，都牵涉一个本质上相同的问题，就是算子序列的一致有界性。关于这类问题在泛函分析中有一个重要定理，就是一致有界原理(即共鸣定理)。这个定理是在抽象 Banach 空间上关于算子族一致有界性的一般结论。由于泛函分析的高度概括性，使其具有的另一个特点就是应用的广泛性，在一般空间上的研究结论，可以应用到各个具体空间的情形。本书给出了泛函分析应用的一些例子，但由于篇幅的限制，在这方面不可能充分展开。泛函分析的概念与方法已经渗透到数学的各个分支，如微分方程、积分方程、概率论、抽象调和分析、计算数学等，并且在物理学和许多工程技术中得到广泛应用。

泛函分析的理论是在无限维空间上展开的，无限维空间与有限维空间特别是欧氏空间在有些方面是类似的，因此泛函分析的有些概念来源于与欧氏空间相关概念的类比。在学习泛函分析的时候，注意与欧氏空间的情形进行比较和对照，当然有利于对泛函分析内容的理解。但更重要的是无限维空间与有限维空间有本质的不同，前者远比后者更复杂多样，因而无限维空间上的分析理论远比有限维空间上的更复杂、更丰富。正因为此，使得泛函分析成为与经典分析不同的独立分支。

如上所述，泛函分析的概念与方法已经渗透到数学的各个分支，因此掌握泛函分析的基础知识，对于数学各专业的学生而言是十分必要的。作为本科生的教材，本书介绍泛函分析的基础理论。在内容结构安排和叙述上尽力做到简洁清晰，增强可读性。注意引导性的论述，以帮助读者对概念和定理的理解。本书配备了较多的

注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力，武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章 距离空间与赋范空间

在数学分析和实变函数中我们熟知的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 具有丰富的结构. 一方面，在 $\mathbf{R}^n$ 上定义了任意两点之间的距离. 由此导出 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑结构，可以在 $\mathbf{R}^n$ 上讨论极限与连续等. 另一方面，$\mathbf{R}^n$ 具有代数结构. $\mathbf{R}^n$ 是一个线性空间，并且对其中的每一个向量赋予了一个范数(模). 泛函分析中研究的距离空间和赋范线性空间，通常是由一些满足某些条件的函数或数列构成，这些空间分别在上面提到的两个方面类似于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

本章将对距离空间和赋范线性空间进行一般讨论，介绍一些常用的空间，并且讨论这些空间的基本性质.

§1.1 距离空间的基本概念

1.1.1 距离空间的定义与例

今后总是分别用 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 表示实数域和复数域. 实数域和复数域统称为标量域，用 $\mathbf{K}$ 表示. 即符号 $\mathbf{K}$ 可能表示 $\mathbf{R}$，也可能表示 $\mathbf{C}$.

在数学分析和实变函数课程中，我们已经熟知，对 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，可以定义 x 与 y 的距离

$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.1}$$

这样定义的 $\mathbf{R}^n$ 上的距离具有以下性质：

(1) 非负性：$d(x,y) \geqslant 0$，$d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(2) 对称性：$d(x,y) = d(y,x)$.

(3) 三角不等式：$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

如果考察 $\mathbf{R}^n$ 中关于邻域、开集、闭集、极限和函数的连续性等概念，就会发现这些概念只依赖于 $\mathbf{R}^n$ 上的距离，一些相关结论的证明只用到了距离的上述性质(1)~(3). 这个事实启发我们，若在一个给定的集 X 上，以某种方式定义了满足上述性质(1)~(3)的距离，则可以与在 $\mathbf{R}^n$ 上一样建立类似的理论. 另一方面，在数学的一些领域中也常常需要用到这方面的理论. 正是由于这种理论和应用上的需要，就产生了距离空间的理论.

定义 1.1.1 设 X 是一非空集. 若对任意 $x, y \in X$，都有一个实数 $d(x,y)$ 与之

对应，满足：

(1) 非负性：$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2) 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$；

(3) 三角不等式：$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，

则称函数 d 是 X 上的距离，称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 的距离. 称 X 按照距离 d 为距离空间(或度量空间)，记为 (X, d).

在不会引起混淆的情况下，(X, d) 可以简写为 X.

例 1 欧氏空间 $\mathbf{K}^n$. 上面已提到欧氏空间 $\mathbf{R}^n$. 这里将 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 一并考虑. 设

$$\mathbf{K}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{K}\}.$$

对任意 $x,y\in\mathbf{K}^n$，按照式(1.1.1)定义 $d(x,y)$，则 d 满足定义 1.1.1 的条件，因而 d 是 $\mathbf{K}^n$ 上的距离，$\mathbf{K}^n$ 按照这个距离成为距离空间. 当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，相应的 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 分别称为实 n 维欧氏空间和复 n 维欧氏空间. 对任意 $x,y\in\mathbf{K}^n$，若令

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\quad d_2(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

容易验证 d_1 和 d_2 也是 $\mathbf{K}^n$ 上的距离. 注意$(\mathbf{K}^n, d)$，$(\mathbf{K}^n, d_1)$ 和$(\mathbf{K}^n, d_2)$ 这三个空间上的距离是不同的，因此它们是不同的距离空间. 由式(1.1.1) 定义的距离称为 $\mathbf{K}^n$ 上的欧氏距离. 今后若无特别申明，将 $\mathbf{K}^n$ 视为距离空间时，其距离总是指欧氏距离.

设 E 是 $\mathbf{K}^n$ 的非空子集，则 $\mathbf{K}^n$ 上的距离也是 E 上的距离，因此 E 按照这个距离也成为距离空间. 称之为 $\mathbf{K}^n$ 的子空间. 例如，区间 $[a,b]$，$[0, \infty)$ 都是 $\mathbf{R}^1$ 的子空间.

一般地，设 E 是距离空间 (X, d) 的非空子集. 则 d 也是 E 上的距离，因此 E 按照距离 d 成为距离空间，称 (E, d) 为 (X, d) 的子空间.

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$. 设 $C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上的(实值或复值) 连续函数的全体. 对任意 $x=x(t)$，$y=y(t)\in C[a,b]$，令

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

容易验证 d 是 $C[a,b]$ 上的距离，按照这个距离 $C[a,b]$ 成为距离空间.

例 3 数列空间 s. 设 s 是(实或复) 数列 $x=(x_i)$ 的全体. 对任意 $x=(x_i)$，$y=(y_i)\in s$，令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}.$$

显然 d 满足距离定义的(1) 和(2). 由于函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}(t\geqslant 0)$ 是单调增加的，因此对于任意 $a,b\in\mathbf{K}$，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \tag{1.1.2}$$

对任意 $x,y,z\in s$，利用式(1.1.2) 得到

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)$$
$$=d(x,z)+d(z,y).$$

即 d 满足三角不等式. 因此 d 是 s 上的距离，s 成为距离空间.

对于像 s 这样的空间中每一个元 $x=(x_i)$ 都是一个数列. 与欧氏空间 $\mathbf{K}^n$ 中的元 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对照，称 x_i 为 x 的第 i 个坐标.

例 4　可测函数空间 $M(E)$. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集，$mE<\infty$，$M(E)$ 是 E 上可测函数的全体. 将 $M(E)$ 中两个几乎处处相等的函数视为同一元. 对任意 $x=x(t)$，$y=y(t)\in M(E)$，令

$$d(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t.$$

显然 $d(x,y)\geqslant 0$. 由积分的性质知道 $d(x,y)=0$ 当且仅当在 E 上 $x(t)=y(t)$ a.e. 按照 $M(E)$ 中两个元相等的规定，这表明 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$. 显然 d 满足对称性. 利用不等式(1.1.2)容易证明 d 满足三角不等式. 因此 d 是 $M(E)$ 上的距离，按这个距离 $M(E)$ 成为距离空间.

例 5　离散距离空间. 设 X 是任一非空集. 令

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}\quad x,y\in X.$$

则 d 是 X 上的距离. 称 (X,d) 为离散距离空间.

例 5 表明对于任一非空集 X，总可以在 X 上定义某种距离使之成为距离空间. 而例 1 表明我们还可以用不同的方式在 X 上定义距离. 但随意定义的距离不见得有什么实际意义. 在泛函分析中常用的空间一般是由满足某些条件的函数或数列构成的. 在这些空间上定义的距离常常是为了描述和研究序列的某种收敛性. 本节后面的例 6 和例 7 就是这方面的例子.

在§1.2 中将要讨论的赋范空间也是一种距离空间，那里我们将会看到更多的例子.

设 X 是一距离空间. 利用 X 上的距离可以定义集与集的距离. 设 A,B 是 X 的非空子集. 定义 A 与 B 的距离为

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}.$$

特别地，若 $x\in X$，称 $d(x,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$ 为 x 与 A 的距离.

设 A 是距离空间 X 的非空子集. 若存在 $x_0\in X$ 和 $M>0$，使得对任意 $x\in A$ 有 $d(x,x_0)\leqslant M$，则称 A 是有界集.

1.1.2　序列的极限

若 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的一列元，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列(或点列). 在距离空间中，由于定义了元与元之间的距离，因此可以像在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上一样，定义序列

的极限.

定义 1.1.2 设$\{x_n\}$是距离空间 X 中的序列，$x\in X$. 若

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

则称$\{x_n\}$(按距离) 收敛于x，称x为$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，或$x_n\to x\ (n\to\infty)$.

例 6 $C[a,b]$中的序列$\{x_n\}$按距离收敛于x等价于函数列$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数 $x(t)$.

证明 由 $C[a,b]$ 中距离的定义，

$$d(x_n,x)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|.$$

因此 $d(x_n,x)\to 0$ 当且仅当$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|\to 0$. 这相当于$\{x_n(t)\}$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$. ■

例 7 在可测函数空间 $M(E)$ 中，序列$\{x_n\}$按距离收敛于 x 等价于函数列$\{x_n(t)\}$ 依测度收敛于函数 $x(t)$.

证明 令 $f_n(t)=\dfrac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}(n\geqslant 1)$. 若$\{x_n(t)\}$ 依测度收敛于 $x(t)$，则当 $n\to\infty$ 时

$$0\leqslant mE(f_n\geqslant\varepsilon)\leqslant mE(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)\to 0.$$

故$\{f_n\}$依测度收敛于 0. 注意到 $0\leqslant f_n(t)\leqslant 1$，利用有界收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}t=0.$$

反过来，设 $d(x_n,x)\to 0$. 对任给的 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，我们有

$$mE(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)=mE\left(f_n\geqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\leqslant\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int_E f_n\mathrm{d}t=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}d(x_n,x)\to 0.$$

因此 $x_n(t)$ 依测度收敛于 $x(t)$. ■

容易证明，在数列空间 s 中按距离收敛等价于按坐标收敛. 这就是说，如果

$$x^{(n)}=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\cdots),\ x=(x_1,x_2,\cdots),$$

则 $d(x^{(n)},\ x)\to 0$ 的充要条件是对每个 $i=1,\ 2,\cdots$，有 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty)$. 这个结果的证明留作习题.

上面的例子表明，不同空间中的序列在不同意义下的收敛，通过定义适当的距离，可以归结为距离空间中序列的按距离收敛. 这样，对一般距离空间中关于序列收敛的讨论，所得结果可以应用到各个具体的距离空间. 这是泛函分析的高度概括性带来的应用的广泛性的一个例子.

称距离空间 X 中的序列$\{x_n\}$是有界的，若存在 $x_0\in X$ 使得 $d(x_n,x_0)\leqslant M(n\geqslant 1)$.

定理 1.1.1 在距离空间中，有：

(1) 收敛序列的极限是唯一的.

(2) 收敛序列是有界的.

(3) 若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$的任一子列也收敛于同一极限.

证明　(1) 若 $x_n \to x, x_n \to y$. 则

$$0 \leqslant d(x,y) \leqslant d(x_n,x) + d(x_n,y) \to 0(n \to \infty).$$

故 $d(x,y) = 0$，从而 $x = y$. (2) 和(3) 的证明留给读者. ■

定理 1.1.2　距离函数 $d(x,y)$ 是两个变元的连续函数. 即当 $x_n \to x, y_n \to y$ 时，$d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

证明　对任意 $x,y,z \in X$，由三角不等式得到

$$d(x,y) - d(z,y) \leqslant d(x,z).$$

同样

$$d(z,y) - d(x,y) \leqslant d(z,x) = d(x,z).$$

因此 $|d(x,y) - d(z,y)| \leqslant d(x,z)$. 于是当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} |d(x_n,y_n) - d(x,y)| &\leqslant |d(x_n,y_n) - d(x,y_n)| + |d(x,y_n) - d(x,y)| \\ &\leqslant d(x_n,x) + d(y_n,y) \to 0. \end{aligned}$$

从而 $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$. ■

本节引入了距离空间，并且定义了距离空间中序列的极限. 在本章以后各节，将结合一些经典空间的例子，继续关于距离空间的讨论.

§1.2　赋范空间的基本概念

我们熟知的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 不仅具有距离结构，而且具有代数结构. $\mathbf{R}^n$ 是一个线性空间，并且赋予了每个向量一个范数(即向量的模). 本节将引入赋范空间. 赋范空间是对其中每个向量赋予了范数的线性空间，而且由范数导出的拓扑结构与代数结构具有自然的联系. 与距离空间相比较，赋范空间在结构上更接近于 $\mathbf{R}^n$.

1.2.1　线性空间

先回顾一下线性代数中关于线性空间的定义及相关概念.

定义 1.2.1　设 X 是一非空集，$\mathbf{K}$ 是标量域. 若

Ⅰ 在 X 上定义了加法运算，即对任意 $x,y \in X$，对应 X 中一个元，记为 $x+y$，称为 x 与 y 的和，满足：

(1) $x + y = y + x$;

(2) $(x+y)+z = x+(y+z)$;

(3) 在 X 中存在唯一的元 0(称之为零元)，使得对任意 $x \in X$，成立 $x + 0 = x$;

(4) 对任意 $x \in X$，存在唯一的 $x' \in X$ 使得 $x + x' = 0$. 称 x' 为 x 的负元，记为 $-x$.

Ⅱ 在 X 上定义了数乘运算，即对任意 $x \in X$ 和 $\alpha \in \mathbf{K}$，对应 X 中一个元，记为 αx，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com