天利考研

快速解题技巧与方法汇编

天利38套 考研

2012考研数学（经济类）

难题易丢分题汇编

王式安　尤承业
童　武　主编

- 命题组原成员详细归纳总结1987年以来真题中的难题、易丢分题精华
- 系统归纳、详细分析难题解题技法、深入浅出
- 直击考点、高屋建瓴、突破难点、赢得高分

西藏人民出版社

天利考研

快速解题技巧与方法汇编

2012考研数学（经济类）

难题易丢分题汇编

王式安　尤承业
刘德荫　童　武　主编

西藏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

快速解题技巧与方法汇编. 考研数学 / 天利考研命题研究组编.
— 拉萨:西藏人民出版社, 2011.3
ISBN 978 - 7 - 223 - 03066 - 3

Ⅰ. ①快… Ⅱ. ①天… Ⅲ. ①高等数学–研究生–入学考试–解题
Ⅳ. ①G643 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 016115 号

快速解题技巧与方法汇编
——2012 考研数学(经济类)难题易丢分题汇编

作　　者　天利考研命题研究组
责任编辑　李海平　翟自飞
装帧设计　李建霞
出　　版　西藏人民出版社
社　　址　拉萨市林廓北路 20 号
邮政编码　850000
北京发行部:100013　北京市东土城路 8 号林达大厦 A 座 13 层
电　　话:010 - 61420186(邮购)　64466473(批销)
打 击 盗 版:13801174584
印　　刷　北京彩虹伟业印刷有限公司印刷
经　　销　全国新华书店
开　　本　787 × 1092　1/16
字　　数　2960 千
印　　张　90
版　　次　2011 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号　ISBN 978 - 7 - 223 - 03066 - 3
定　　价　142.20 元(全 4 册)

前　　言

每年的考研数学真题中，都有一些较难的题目，而正确解答这些题是考生能否取得好成绩、进入名校的关键. 能够拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学资料是广大考研学子的热切期盼. 为了迎接研究生入学考试，考生应当认真分析研究、了解、消化并掌握历年真题，挖掘命题特点、趋势以及知识点之间的有机联系，总结考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝炼解题思路、方法以及技巧，明确复习方向. 这样，考生才能真正做到有的放矢、事半功倍，最终取得理想成绩.

为了让考生的数学成绩能再上一个台阶，编者根据教育部制订的最新考研数学考试大纲的要求和精神，深入研究近几年考研真题的特点及动态. 针对考研真题中较难的题目和题型，编写出以选拔性题目为重点的难题本(分理工类和经济类)，以供考生学习使用，逐步提升数学水平.

本书分两大部分：

第一部分　难题易丢分题精讲

编者从历年真题和辅导班内部资料中，精选出重点考查且不易解决的题目. 这些题目大多是考研中的解答题，分值较高. 分考点归纳习题，总结各类题型的解题思路和方法，并重点指出考生易错之处.

第二部分　精题汇编

每个章节后面配有大量的精选试题供考生练习，题目类型较全，且附有详细答案. 通过这些练习不仅有利于考生尽快掌握题目的解题技巧，同时还有利于加深读者对每章考点、重点和难点的理解，使考生的解题能力逐步提升.

本书的特点是：

1. **试题的综合性强**. 本书根据考试大纲，选取的大都是解答题，分值大的题目，涉及的知识点较多，属于取得高分的关键题.

2. **题型丰富**. 每一章节均按考点、题型归类，分析、归纳并总结各题型的解题技巧. 复习起来使用方便，使考生能够把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通.

3. **解答详尽**. 对命题思路，解题的重、难点进行深入细致的解析，有助于考生掌握解题规律，拓展分析思路，提炼解题技巧.

使用建议：

本书使用时机：第一轮复习后的提高阶段. 由于本书的题目综合性较高，考生在有了一定

的基本知识这个基础上再结合本书,复习效果较好,且易提高解题水平.

本书是考生在提高阶段复习的首选资料,也是考生向高分进军的必备宝典.俗话说“有志者事竟成”,只要考生切实掌握本书归纳的题型、方法和技巧,研读精心设置的典型例题,必定大受裨益,解题水平也能实现质的飞跃.

愿各位考生金榜题名,圆名校之梦!

编者　于清华园

天利考研系列丛书

书名	上市时间
考研英语历年真题精解汇编	2011 年 3 月
考研政治历年真题精解汇编	2011 年 3 月
考研数学历年真题精解汇编(数学一)	2011 年 4 月
考研数学历年真题精解汇编(数学二)	2011 年 4 月
考研数学历年真题精解汇编(数学三)	2011 年 4 月
2011 年考研真题精解(五科综合)	2011 年 3 月
考研数学错题本(理工类)	2011 年 5 月
考研数学错题本(经济类)	2011 年 5 月
考研英语错题本	2011 年 4 月
考研政治错题本	2011 年 4 月
考研数学快速解题技巧与方法汇编(理工类)	2011 年 4 月
考研数学快速解题技巧与方法汇编(经济类)	2011 年 4 月
考研数学难题、易丢分题汇编(理工类)	2011 年 4 月
考研数学难题、易丢分题汇编(经济类)	2011 年 4 月

丛书特色:

- ◆ 命题组成员亲自阐释快速解题思路,详解快速解题技法
- ◆ 试题解析详细、分析透彻、准确可靠
- ◆ 将基础、常考、易错和能举一反三的典型试题按照专题分类,有讲解,有错题提示

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数与极限

考点一　利用左、右极限求函数极限

【难题、易丢分题一】　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

【考点链接】　函数的左、右极限.

【详解】　由于$e^{\frac{1}{x}}$与$\dfrac{\sin x}{|x|}$在$x\to 0$时,极限不存在,故分别考虑左、右极限.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-4/x}+e^{-3/x}}{e^{-4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2+0}{1+0}-1=1$$

故原式 $=1$.

【难题透视】　本题易将$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$分成两个极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$和$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$进行求解,但我们会发现这两个极限都不存在,根据极限的性质,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,都不存在,$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$可能会存在,值得注意.

【难题、易丢分题二】　设$f(x)=\begin{cases}a\dfrac{\sin x-x}{x^3}, & x>0\\ \dfrac{1}{x}\left(2\sin x-\displaystyle\int_0^x\sin t^2dt\right), & x<0.\end{cases}$问$a$为何值时$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在.

【考点链接】　函数的左、右极限.

【详解】　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\dfrac{\sin x-x}{x^3}\right)\xlongequal{\frac{0}{0}型}\lim\limits_{x\to 0^+}a\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=-\dfrac{a}{6}$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=2-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x\sin t^2dt\right)'}{(x)'}=2-\lim_{x\to 0}\sin x^2=2.$$

若$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，则$\lim\limits_{x\to0^+}f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，即 $-\frac{a}{6}=2, a=-12$.

【难题透视】 本题应首先求函数的左、右极限，若函数$f(x)$在$x=0$处的极限存在，即其左、右极限相等.

考点二 极限的计算

【难题、易丢分题一】 求 $w=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

【考点链接】 用洛必达法则，无穷小替换求函数的极限.

【详解】 本题属于 $\infty-\infty$ 型，首先进行通分，则 $w=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}$

若直接用洛必达法则计算，比较复杂，但易知.

$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1$

即 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x(x\to0)$，又 $\ln(1+x)\sim x(x\to0)$，因此对分母先作等价无穷小因子替换后再用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

【难题透视】 本题的难点在计算上，但如果注意到$\ln(1+\sqrt{1+x^2})\sim x(x\to0)$，此题就易解多了.

【难题、易丢分题二】 求下列极限.

$$(\text{I})\ w=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})};\qquad(\text{II})\ w=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}.$$

【考点链接】 利用等价无穷小替换求函数的极限.

【详解】

(Ⅰ) 注意$x\to0$时，$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})\sim\frac{1}{2}x^2(1-\cos x)\sim\frac{1}{4}x^4$，$e^{x^4}-1\sim x^4$，$\Rightarrow w=$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4}{\frac{1}{4}x^4}=4.$$

(Ⅱ) 因为$\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1\sim\ln\left[\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1+1\right]=2x\ln\left[1+\frac{\cos x-1}{2})\right]\sim 2x\cdot$

$\frac{\cos x-1}{2}\sim x\cdot(-\frac{1}{2}x^2)=-\frac{1}{2}x^3(x\to0)$，$\ln(1+2x^3)\sim2x^3(x\to0)$，所以

$$W=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{1+\cos x}{2})^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{2x^3}=-\frac{1}{4}.$$

【难题透视】 本题的难点在无穷小替换上，这里需要有整体的意识，本题用到的等价无穷小有：$x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$.

【难题、易丢分题三】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$

【考点链接】 利用等价无穷小替换，洛必达法则求极限.

【详解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x^x(e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x^x)\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3}$

$$=-exp\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left[1+(\frac{\sin x}{x}-1)\right]}{x^2}$$

$$=-exp\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-(1/x^2)}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}$$

$$=-e^0\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{-(x^2/2)}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

【难题透视】 本题的难点在于对分子的处理. 不能将$(\sin x)^x$ 换成 x^x，只有乘除式中，等价无穷小才可以直接替换，对分子提取 x^x 是解答本题的关键.

【难题、易丢分题四】 求$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

【考点链接】 1^∞ 型极限.

【详解】解法 1 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}[1-(1-\cos\sqrt{x})]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=exp\lim_{x\to0^+}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\cdot4}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

解法 2 设 $y=\sqrt{x}$

则原式 $=\lim\limits_{y\to0^+}(\cos y)^{1/y^2}=exp\lim\limits_{y\to0^+}\frac{\ln(\cos y)}{y^2}=exp\lim\limits_{y\to0^+}\frac{-(\sin y/\cos y)}{2y}$

$$=exp\lim_{y\to0^+}\left(-\frac{\sin y}{y}\right)\cdot\frac{1}{2\cos y}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【难题透视】 本题的难点在于要看得出是 1^∞ 型极限. 本题计算较复杂，应多加注意.

【难题、易丢分题五】 求 $w=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【考点链接】 夹逼准则，定积分的定义

【详解】 记 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{1}{i}}$，注意 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}$ 是 $f(x)=\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 上的积分，由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，故可求出：

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

对 x_n 进行如下放大与缩小： $\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}\leqslant x_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}.$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{2}{\pi}$.

【难题透视】 本题的难点在于将 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}$ 转化成定积分，而本题的放缩法值得考生注意.

【难题、易丢分题六】 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

【考点链接】 单调有界定理

【详解】 由题意知，$0<x_1<3$，易知 $x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}$，则

$$0<x_2\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$$

假设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$，则 $x_k>0$ 且 $3-x_k>0$，从而

$$x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)},0<x_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

于是由归纳假设得出结论 $\{x_n\}$ 有上界且全为正数. 关于单调性，当 $n>1$ 时.

$$x_{k+1}-x_k=\sqrt{x_k(3-x_k)}-x_k=\frac{\left(\sqrt{x_k(3-x_k)}-x_k\right)\cdot\left(\sqrt{x_k(3-x_k)}+x_k\right)}{\sqrt{x_k(3-x_k)}+x_k}$$

$$=\frac{x_k(3-x_k)-x_k^2}{\sqrt{x_k(3-x_k)}+x_k}=\frac{x_k(3-2x_k)}{\sqrt{x_k(3-x_k)}+x_k},$$

由于已知 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$，所以 $x_{k+1}-x_k=\frac{x_k(3-2x_k)}{\sqrt{x_k(3-x_k)}+x_k}\geqslant 0$，

即 $\{x_n\}$ 单调递增. 综上，由数列单调有界收敛准则知 $\{x_n\}$ 收敛.

设极限为 A，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，在式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n-(3-x_n)}$ 两边令 $n\to\infty$，则 $A=\sqrt{A(3-A)}$，解之得 $A=\frac{3}{2}$（$A=0$ 舍去），所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

【难题透视】 本题的难点在于要看出$0 < x_k \leqslant \frac{3}{2}$,然后用数列归纳法证明,根据此点,单调性就易证明了.

考点三　无穷小量的比较

【难题、易丢分题】 把$x \to 0^+$时的无穷小$\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t, \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 \mathrm{d}t$排列起来.使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是(　　).

(A)α,β,γ　　(B)α,γ,β　　(C)β,α,γ　　(D)β,γ,α

【考点链接】 无穷小量的比较,洛必达法则

【详解】 应分别求出α,β,γ关于x的阶数,由于:

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\alpha}{x} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0_+} \frac{\cos x^2}{1} = 1,$$

$\Rightarrow \alpha$是x的一阶无穷小,由

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\beta}{x^k} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0_+} \frac{\tan\sqrt{x^2} \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \frac{2}{k} \lim_{x \to 0_+} \frac{\tan x}{x \cdot x^{k-3}} \xlongequal{\text{取 } k=3} \frac{2}{3},$$

$\Rightarrow \beta$是x的3阶无穷小,由

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\gamma}{x^k} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0_+} \frac{\sin(\sqrt{x})^3 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{kx^{k-1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0_+} \frac{\sin(\sqrt{x})^3}{k(\sqrt{x})^3 x^{k-2}} \xlongequal{\text{取 } k=2} = \frac{1}{4},$$

$\Rightarrow \gamma$是x的2阶无穷小.

因此,应选(B).

【难题透视】 事实上,本题还可以采用两两比较它们的阶的方法,因

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x \times 2x}{\cos x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\gamma}{\beta} = \infty, \lim_{x \to 0^+} \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

故β比γ高阶,γ比α高阶.

考点四　函数的连续性及间断点的判断

【难题、易丢分题一】 设函数　$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1; \\ x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 2; \\ 12x - 16, & x > 2. \end{cases}$

(1) 写出$f(x)$的反函数$g(x)$的表达式;

(2)$g(x)$是否有间断点、不可导点?若有,指出这些点.

【考点链接】 函数的连续性、间断点判断

【详解】 由题设,$f(x)$ 为分段函数,因此应在不同的区间段上分别求相应的反函数,

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1;\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8;\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8\end{cases}$$

$g(x)$ 的两个分段点为 $-1,8$,分别讨论它们的性质,当 $x=-1$,$g(-1)=-1$,且 $g(-1^{+})=-1$,$g(-1^{-})=-1$,因此 $g(x)$ 在 $x=-1$ 处连续;当 $x=8$,$g(8)=2$,且 $g(8^{+})=2$,$g(8^{-})=2$,因此 $g(x)$ 在 $x=8$ 处也连续,除此之外,$g(x)$ 在所有点上都是连续的,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无间断点,关于可导性,当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;当 $x\in(-1,8)$ 时,$g'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,其中 $x=0$ 时 $g(x)$ 不可导;当 $x>8$ 时,$g'(x)=\dfrac{1}{12}$. 又

$$g_-'(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+1}{x+1}\xlongequal{x+1=t}\lim_{t\to0^-}\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{t}{2}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^-}\frac{-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{t}{2}\right)}{t}=\frac{1}{4},$$

$$g^{+\prime}(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3},$$

因而 $x=-1$ 点处 $g(x)$ 不可导,

$$g_-'(8)=\lim_{x\to8^-}\frac{3\sqrt{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to8^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12},$$

$$g_+'(8)=\lim_{x\to8^+}\frac{\dfrac{x+16}{12}-2}{x-8}=\lim_{x\to8^+}\frac{x-8}{12(x-8)}=\frac{1}{12}$$

即 $x=8$ 点处 $g(x)$ 可导.

综上 $g(x)$ 的不可导点为 $x=0$ 和 $x=-1$.

【难题透视】 本题考查了函数在某点的连续性和可导性,是类基础型题,但计算有些复杂. 望考生多加注意.

【难题、易丢分题二】 求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}$ 的间断点,并判定间断点的类型.

【考点链接】 函数的间断间类型

【详解】 由于 $\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}=e^{\frac{x[\ln(\tan t)-\ln(\tan x)]}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}=e^{\frac{x\ln\left(1+\frac{\tan t-\tan x}{\tan x}\right)}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}$,

故 $$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}=\lim_{t\to x}e^{\frac{x\ln\left(1+\frac{\tan t-\tan x}{\tan x}\right)}{\ln(1+\tan t-\tan x)}}=\lim_{t\to x}e^{\frac{x\frac{\tan t-\tan x}{\tan x}}{\tan t-\tan x}}=e^{\frac{x}{\tan x}}.$$

所以$f(x)$的间断点为$x=k\pi, x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

由于
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}e^{\frac{x}{\tan x}}=e,\ \lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}e^{\frac{x}{\tan x}}=1$$

$$\lim_{x\to(k\pi)^+}f(x)=\lim_{x\to(k\pi)^+}e^{\frac{x}{\tan x}}=+\infty(k>0),\ \lim_{x\to(k\pi)^-}f(x)=\lim_{x\to(k\pi)^-}e^{\frac{x}{\tan x}}=+\infty(k<0),$$

所以点$x=0, x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类间断点;$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第二类间断点.

【难题透视】 本题易忽略单独讨论间断点$x=0$的情形,对于极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)^{g(x)}$,一般会用$\lim\limits_{x\to0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}g(x)\ln f(x)}$进行求解.

【难题、易丢分题三】 设函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$$

问a为何值时,$f(x)$在$x=0$处连续;a为何值时,$x=0$是$f(x)$的可去间断点?

【考点连接】 间断点类型、函数的连续性

【详解】
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\xlongequal{\text{等价无穷小因子替换}}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{a\arcsin^3x}{x-\arcsin x}\xlongequal{t=\arcsin x}\lim_{t\to0^-}\frac{at^3}{\sin t-t}=\lim_{t\to0^-}\frac{3at^2}{\cos t-1}=-6a$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{(洛必达)}}4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}\xlongequal{\text{(洛必达)}}4\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2a^2+4,$$

令$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,有$-6a=2a^2+4$,得$a=-1,-2$.

当$a=-1$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$,即$f(x)$在$x=0$处连续;

当$a=-2$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$,因而$x=0$是$f(x)$的可去间断点.

【难题透视】 本题的难点在求$f(x)$在$x=0$处的左、右极限上.

事实上,对$f(x)$在$x=0$处的左极限,还可以这么做.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\xlongequal{t=\arcsin x}\lim_{x\to0^-}\frac{a\sin^3t}{\sin t-t}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3a\sin^2t\times\cos t}{\cos t-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{3a\sin^2t}{\cos t-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{6a\sin t\times\cos t}{-\sin t}=-6a.$$

难题、易丢分题汇编

1.1 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}(a_i>0,i=1,\cdots,n)$.

1.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-\dfrac{2}{\pi}x\arctan x}{x+e^x}$.

1.4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]x$.

1.5 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.6 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

1.7 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

1.8 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\sqrt{\cos x})}$.

1.9 求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

1.10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.11 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

1.12 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\dfrac{x}{e^x-1}\right)$.

1.13 求下列极限

(Ⅰ)$w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$; (Ⅱ)$w=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$;

(Ⅲ)$w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

1.14 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

1.15 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$________.

1.16 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

1.17 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}]$;

1.18 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

1.19 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]$.

1.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]=$ ________.

1.21 求极限$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.22 设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,求$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

1.23 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x}{2}\sin x}{\sqrt[6]{1+x^4}-1}$.

1.24 设$f'(x)$连续,$f(0)=0$,$f'(0)\neq0$,求$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(\sqrt{t})\,dt}{x^2\int_0^x f(t)\,dt}$.

1.25 设函数$f(x)$连续,且$f(0)\neq0$,求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

1.26 求 $w=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1.27 设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

1.28 求解下列各题:

(1) 求正常数a,b,使

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,dt=1.$$

(2) 已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$. 求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

1.29 已知$\lim\limits_{x\to0}\left\{\left[\sqrt{1+\frac{h(x)}{\sin x}}-1\right]/[x(e^x-1)]\right\}=A$,求$c$和$k$,使$h(x)\sim cx^k$,其中$A\neq0$为常数.

1.30 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

1.31 试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+0(x^3)$，其中 $0(x^3)$ 是 $x\to 0$ 时比 x^3 高价的无穷小量.

1.32（Ⅰ）设 $f(x)$，$g(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，又 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$，求证：无穷小 $\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt\sim\int_0^{\varphi(x)}g(t)\,dt\ (x\to a)$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)=0$，$f'(a)=A\neq 0$，求证：$f(x)\sim A(x-a)(x\to a)$.

（Ⅲ）设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=6$，求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\int_0^{x^3}f(t)\,dt\Big/\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^3\right\}$.

1.33 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\theta(x)$ 具有二阶连续，导函数且 $\theta(0)=1$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续；

(2) 求 $f'(x)$；

(3) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

1.34 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\quad(n=2,3,\cdots)$，试证：$\{a_n\}$ 收敛.

1.35 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$.

1.36 确定 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$.

1.37 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$,

（Ⅰ）若 $f(x)$ 处处连续，求 a,b 值；

（Ⅱ）若 (a,b) 不是求出的值时，$f(x)$ 有何间断点，并指出它的类型.