经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

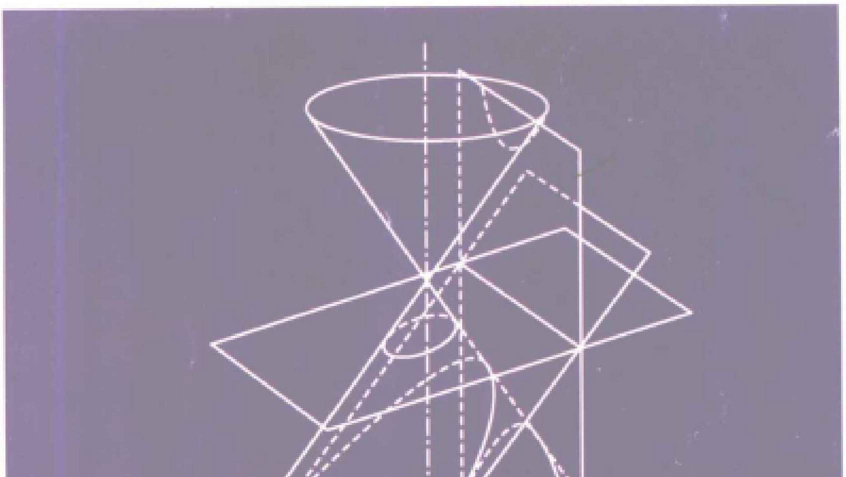
Mathematics

普通高中课程标准

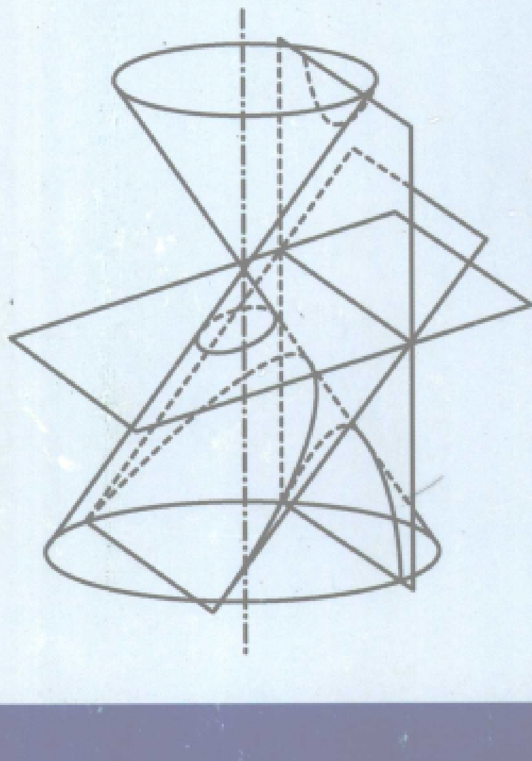
实验教科书

数学

选修 2–1（理科）



湖南教育出版社



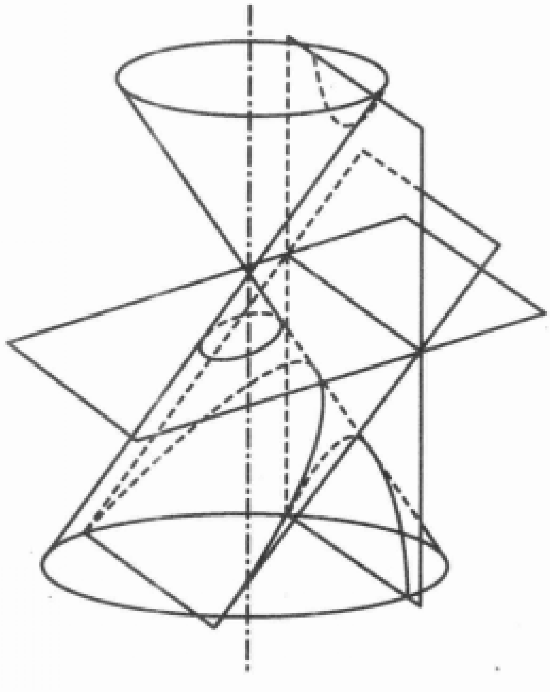
ISBN 7-5355-4614-5

Mathematics

普通高中课程标准
实验教科书

数学

选修 2－1（理科）



普通高中课程标准实验教科书
数　　学
选修 2—1（理科）
责任编辑：孟实华　邹伟华　甘　哲
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷
890×1240　16 开　印张：9.75　字数：250000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7—5355—4614—5/G·4609
定　价：11.15 元
本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换。

轻车熟路，得心应手

本册教材中，将学习常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间中的向量与立体几何.

正确地理解和使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质，这对于从事各项工作、进行社会交流都是必不可少的. 数学是逻辑性很强的一门科学，准确地理解和使用逻辑用语，对于正确理解和表达数学内容，更是一种起码的基本功. 本册教材中将帮助你练好这种基本功，学习一些常用的逻辑用语，体会它们在表述和论证中的作用，帮助你正确地理解和使用它们.

从小学到初中再到高中，每个阶段的数学课你都在不断地阅读、理解和使用逻辑用语，本册教材中的常用逻辑用语只是对你熟悉的内容的一次总结和提高.

在必修阶段我们已经学习了处理几何问题的两个有力的工具：向量和坐标. 我们利用解析几何的方法（也就是坐标的方法）研究了平面上的直线和圆，尝试了利用向量的方法来处理平面图形. 在本册教材中我们将进一步发挥这两个工具的作用，利用解析几何的方法处理圆锥曲线，以向量为工具处理空间图形.

还是解析几何，还是点与坐标的对应、几何性质与代数等式的对应、曲线与方程的对应. 同样的思路和方法，以前研究了直线与圆，现在研究圆锥曲线.

圆锥曲线与圆密切相关，它可以由平面截圆锥得到，可以由圆经过中心投影得到．大千世界，天上地下，圆锥曲线无处不在．它是天体运动的轨道，日月星辰无不遵循．它的良好的光学性质也有广泛的应用．利用解析几何方法研究曲线，不论是直线、圆还是圆锥曲线，基本思路都是要善于利用坐标的语言建立代数模型来描述几何性质，利用代数运算解决问题，再翻译为几何语言．

还是向量，还是有方向有大小的量，还是加法、数乘、数量积．同样的工具，以前处理了平面图形，现在处理空间图形．除了坐标中的两个数变成了三个数，一切都是轻车熟路，可以得心应手．大概是由于用普通的推理处理空间图形比处理平面图形困难得多，而用向量处理空间图形与处理平面图形的难度却差别不大，因此向量在处理空间图形中显示出比处理平面图形更大的威力．利用向量解决几何问题，不论是在空间中还是平面上，基本的思路都是要善于建立向量模型描述几何性质，利用向量的代数运算解决问题，再翻译为几何的语言．

祝愿同学们一步步登高，更上一层楼．

作　者

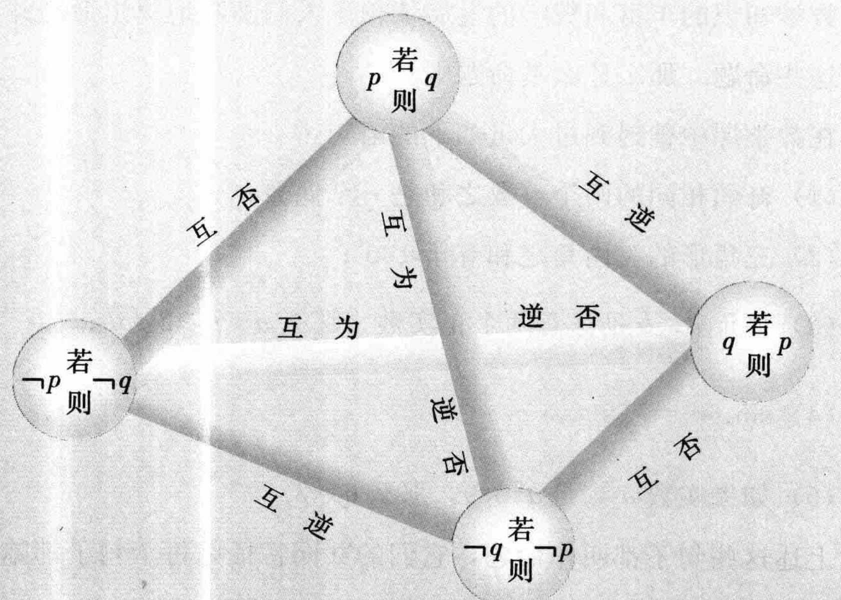
2004 年 12 月

目录

第1章

常用逻辑用语

逻辑规矩有方圆，
当且仅当令如山.
或者婉言容选择，
充分游刃天地宽.



人与人之间交流的语言，基本上分为两类：一类是感性语言，一类是理性语言．感性语言是对视、听、闻、触摸等获取的信息所作的表达，理性语言则是对大脑中的思维活动所作的表达．逻辑用语就是一种理性语言，是表达理性思维的载体．

学习常用逻辑用语，掌握常用逻辑用语的用法，就可以利用这些逻辑用语准确、简洁地表述数学内容和数学思想．同时，在各种交流活动中，也可以利用这些逻辑用语严密地表述对各种问题的思考结果．

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题的概念和例子

数学知识的丰富和数学的发展依赖于人们不断地提出命题并力图证明这些命题．那么什么是命题呢？

在数学课中曾遇到过大量如下的语句：

(1) 奇偶相同的两个整数之和是一个偶数；

(2) 三角形的三内角之和等于 $180°$；

(3) 如果 a，b 是任意两个正实数，那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；

(4) $\sin 60°=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(5) 如果实数 a 满足 $a^2=9$，那么 $a=3$．

上述这些句子都叫作命题，它们的共同特征是每个句子都陈述了能够判断其成立或不成立的一件事情．

可以判断成立或不成立的语句叫作**命题**（proposition），成立的命题叫作**真命题**（true proposition），不成立的命题叫作**假命题**（false proposition）．例如，上述命题 (1)、(2)、(3) 是三个真命题，而命题 (4)、(5) 是两个假命题．

例 已知 a，b 是两个实数，试证：

(1) 命题“如果 a，b 是正实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$”是真命题；

(2) 命题“如果 a，b 是任意实数且 $a^2>b^2$，那么 $a>b$”是假命题.

证 (1) ∵ $a^2>b^2$，

∴ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$.

∵ $a>0$，$b>0$，

∴ $a+b>0$.

因此，$a-b>0$，即 $a>b$.

于是，命题(1)是真命题.

(2) 取 $a=-2$，$b=1$. $a^2>b^2$，但 $a<b$. 于是，命题(2)是假命题.

证明假命题的通常方法是举出一个反例.

暂时不知道真假的命题可以叫作**猜想**(conjecture). 一个好的猜想将推动数学的发展，因为人们在证明猜想的过程中会提出许多新的数学概念和想出许多新的数学方法.

在学习数学的过程中，同学们应尽力提出自己的猜想，并力图证明它们. 这是需要努力培养的一种能力.

例如：命题“当整数 $n\geqslant 3$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解”就是著名的**费马**(Fermat) 大定理. 长期以来，人们不知道费马大定理究竟是真命题还是假命题，一直作为一个猜想而存在. 历经300多年，直至1994年，费马大定理才最终获得证明.

练习

判断下列命题的真假：

(1) $5\leqslant 4$；

(2) 有两个角为45°的三角形是等腰直角三角形；

(3) 方程 $x^2+1=0$ 没有实数根.

习题 1

学而时习之

1. 判断下列命题的真假：

(1) 若 a，b 是任意实数，则 $|a|+|b|>0$；

(2) 若 x，y 是实数且 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$.

温故而知新

2. 试证：

(1) 命题“若 $m>0$，则 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根”是真命题；

(2) 命题“若 $x^2+x-m=0$ 有两个不同的实数根，则实数 $m>0$”是假命题.

3. 试证：命题“两条对角线互相垂直的四边形一定是菱形”是假命题.

4. 试独立举出数学上一个真命题和一个假命题的例子.

1.1.2 命题的四种形式

同学们在初中阶段已学过命题与逆命题的知识，知道如何构造一个命题的逆命题，也知道当一个命题为真时，它的逆命题可以为真也可以为假. 如果把两个互逆的命题中的一个叫作原命题，那么另一个叫作原命题的逆命题.

例如：

(1) 原命题　若两个三角形全等，则它们相似；

(2) 逆命题　若两个三角形相似，则它们全等.

又如：

(3) 原命题　若两个三角形不全等，则它们不相似；

(4) 逆命题　若两个三角形不相似，则它们不全等.

仔细分析上述四个命题的构成，容易发现它们之间有内在的联系：由其中一个命题出发能够构造出其余的三个命题.

你能发现构造的规律吗？

命题通常由两部分构成——命题的条件部分和命题的结论部分.例如，命题(1)的条件部分是“两个三角形全等”，结论部分是“两个三角形相似”. 分析上述四个命题的条件部分和结论部分就能发现：命题(2)的条件部分是命题(1)的结论部分，命题(2)的结论部分是命题(1)的条件部分；命题(3)的条件和结论分别是命题(1)的条件和结论的否定；命题(4)的条件是命题(1)结论的否定，命题(4)的结论是命题(1)条件的否定. 在这种情况下，如果把命题(1)看作原命题，那么命题(2)叫作命题(1)的逆命题，命题(3)叫作命题(1)的否命题，命题(4)叫作命题(1)的逆否命题. 这就是所谓的命题的四种形式.

我们讨论的命题都是条件和结论比较明显的命题.

分析命题的条件和结论是关键.

用符号抽象地表示命题可以更清晰地显示命题的四种形式. 通常用小写拉丁字母 p，q，r，s，…表示最简单的命题，记号 $\neg p$ 表示命题 p 的否定，即不是 p. 如果 p，q 表示两个命题，那么命题“若 p 则 q”的四种形式是：

原命题 (original proposition)　若 p 则 q；

逆命题 (converse proposition)　若 q 则 p；

否命题 (negative proposition)　若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题 (converse-negative proposition) 若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

以命题四种形式中的任一种作为原命题，还能产生新的命题形式吗？

命题的四种形式中，任一对命题之间的相互关系如图 1－1 所示：

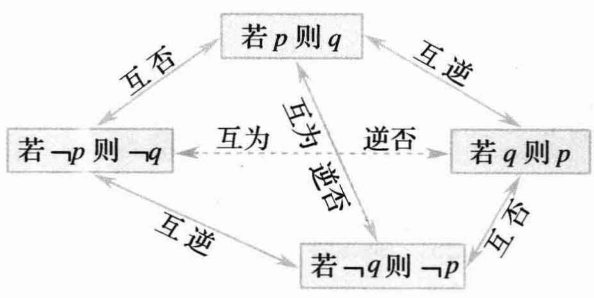


图 1－1

例 1　分别写出下列两个命题的四种形式.

（1）若 $\alpha=60°$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）设 $a>0$，$b>0$. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$.

解　（1）原命题　若 $\alpha=60°$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

逆命题　若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha=60°$；

否命题　若 $\alpha\neq60°$，则 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$；

逆否命题　若 $\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha\neq60°$.

（2）原命题　设 $a>0$，$b>0$. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$；

逆命题　设 $a>0$，$b>0$. 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$；

否命题　设 $a>0$，$b>0$. 若 $a\leqslant b$，则 $a^2\leqslant b^2$；

逆否命题　设 $a>0$，$b>0$. 若 $a^2\leqslant b^2$，则 $a\leqslant b$.

例 2　把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

关键是写好原命题的条件 p 和结论 q.

（1）矩形的两条对角线互相平分；

（2）小于 -5 的数的平方大于 25.

解　（1）原命题　若四边形是矩形，则它的两条对角线互相平分；

逆命题　若四边形的两条对角线互相平分，则它是矩形；

否命题　若四边形不是矩形，则它的两条对角线不互相平分；

逆否命题　若四边形的两条对角线不互相平分，则它不是矩形.

（2）原命题　若 $a<-5$，则 $a^2>25$；

逆命题　若 $a^2>25$，则 $a<-5$；

否命题　若 $a\geqslant-5$，则 $a^2\leqslant25$；

逆否命题　若 $a^2\leqslant25$，则 $a\geqslant-5$.

原命题为真时不能判断它的逆命题的真假性，因此，考虑一个命题的逆命题是提出猜想的一个来源.

我们已经知道，当原命题为真时，它的逆命题可以为真也可以为假. 那么，原命题的真假性同它的否命题及逆否命题的真假性之间是否有关系呢？

1. 原命题为真，它的逆命题可以为真，也可以为假.

例3 试证：

(1) 设 a，b，c 分别表示$\triangle ABC$中$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对边的边长，命题“若$\angle C$为钝角，则 $c^2>a^2+b^2$”的逆命题是真命题.

(2) 命题“两个正数之积仍为正数”的逆命题是假命题.

证 (1) 逆命题是：设 a，b，c 分别表示$\triangle ABC$中$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对边的边长. 若 $c^2>a^2+b^2$，则$\angle C$为钝角.

利用三角形的余弦定理，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0,\quad 且\quad 0°<\angle C<180°,$$

所以 $\angle C>90°$.

因此，(1)中命题的逆命题是真命题.

(2) 逆命题是：若 $ab>0$，则 $a>0$ 且 $b>0$.

取 $a=b=-1$. $ab>0$，但 $a<0$.

因此，(2)中命题的逆命题是假命题.

2. 原命题为真，它的逆否命题一定为真.

逆否命题不产生新命题.

事实上，逆否命题只是原命题的另一种陈述.

例如：

原命题 若 $a=0$，则 $ab=0$；

逆否命题 若 $ab\neq0$，则 $a\neq0$.

又如：

原命题 最高气温超过30 ℃时我就开空调；

逆否命题 若我没有开空调，则最高气温不超过30 ℃.

3. 原命题为真，它的否命题可以为真，也可以为假.

否命题是原命题的哪种形式命题的逆否命题?

例如：真命题“若 $a>0$，则 $a^3>0$”的否命题“若 $a\leqslant0$，则$a^3\leqslant0$”是真命题，而真命题“若 $a>0$，则 $a^2>0$”的否命题“若 $a\leqslant0$，则 $a^2\leqslant0$”是假命题.