初级中学

代数第四册

教学参考书

人民教育出版社

目　录

说　明

初级中学课本《代数》第四册的内容包括：常用对数、函数及其图象、解三角形、统计初步等四章.

这册教材的教学要求是：

1. 使学生理解对数的概念，掌握对数的运算性质，并能熟练地利用对数表及反对数表进行对数运算.

2. 使学生理解函数的意义，了解函数的表示方法，能够画出正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数的图象，了解其性质，掌握一元二次不等式的解法．理解二次函数、一元二次不等式与一元二次方程之间的关系.

3. 使学生理解三角函数的初步概念，掌握直角三角形的边角关系及正弦、余弦定理的内容，了解解三角形在实际中的应用，并会解三角形.

4. 使学生理解统计的初步知识，了解用样本估计总体的数理统计的基本思想方法，初步掌握计算平均数和方差的方法，会列频率分布表，会绘制频率分布直方图.

这册教材共分四章．考虑到与《代数》第三册教材的衔接，首先安排与指数有紧密联系的第十三章常用对数．利用对数进行计算是初等数学的重要的计算方法之一．在生产实际和科学研究中经常要遇到比较复杂的计算问题，利用对数能把繁杂的计算化简．到此为止，中学代数中在实数范围内所研究的初等运算都研究过了.

函数是初等数学中的重要内容之一，不仅是一个重要的数学概念，也是一种重要的数学思想方法. 对学生来说从学习数、式、方程等研究常量的计算，到学习函数研究变量的变化规律，是认识上的一次重大飞跃. 为了研究函数的图象，第十四章先介绍了直角坐标系、函数的概念及表示方法，然后依次介绍了正比例函数、反比例函数、一次函数及二次函数的图象、性质. 使学生初步掌握函数知识. 初中阶段学习函数，强调变量间的对应关系，介绍描述性的定义，没有给出函数的符号 $f(x)$，也没有提出定义域、值域等名词，到高中代数第一册将用集合和映射的观点重新介绍函数的定义，包括上述概念和符号. 学习过二次函数后，可以加深对一元二次方程的理解，利用二次函数的图象可以直观地了解二次函数、一元二次方程与一元二次不等式之间的关系.

课本在第十五章开始讲解三角形. 首先在学生已掌握的函数概念的基础上，进一步介绍了三角函数的初步概念，着重研究了三角形的边角之间的数量关系及三角形的解法，为解简单的应用题打下了基础. 在几何中研究过三角形边角间的一些性质，在解三角形一章又进一步研究了三角形边角间的数量关系. 使学生对三角形的认识深入了一步.

初中代数的最后一章安排了统计初步的知识. 统计是应用数学的重要方法之一，它提供了在生活和生产中搜集数据，分析数据以研究问题的科学方法. 随着生产的发展，它的重要性将越来越明显. 初中学生学习统计的一些初步知识，对毕业后从事各项工作都是有益的.

在教学中要注意以下几点:

一、重视概念和原理的教学，强调新旧知识的联系. 使学生正确地理解新概念和新原理及其与有关旧概念和旧原理的联系，以逐步形成初中代数知识的完整系统和结构，包括代数知识与几何知识间的联系，增强综合、灵活运用知识的能力.

二、加强培养学生的逻辑思维能力和解决实际问题的能力，以及培养提高学生的自学能力，养成善于分析问题的习惯.

本册教材中有大量的数学计算题，要通过这些练习，提高学生的计算能力，培养耐心、认真的良好习惯.

针对上述情况，教材做了一些改进，但更主要的还是有待于教师根据学生的实际情况，严格掌握教学要求，遵循教学规律，改进教学方法，因材施教，努力提高教学质量，以圆满地完成中学代数课的教学任务.

这本教学参考书，按章分以下几项内容:

I. 教学要求. 指明每章基本知识和基本技能以及思想教育的要求.

II. 教材分析和教学建议. 分析全章教材内容，指明这些内容的地位、作用与相互联系，并提出教材的重点、难点与关键，给出全章课时分配的参考意见；按节分条阐述教材的编写意图，提出教学建议以及例、习题的处理意见.

III. 习题的答案、提示和解答. 对于课本中的练习、习题、复习参考题和总复习参考题中的题目，根据难易程度，除少数略去外，分别给出答案、提示和解答.

IV. 附录.（不是每章都有）主要是与教材有关的基础知

识以及有关的数学史料. 这部分内容一般不做为教学要求.

关于本册各章的授课时间,大致分配如下,仅供参考:

第十三章	常用对数	约 12 课时
第十四章	函数及其图象	约 33 课时
第十五章	解三角形	约 34 课时
第十六章	统计初步	约 12 课时

第十三章　常用对数

I　教学要求

1. 使学生正确理解对数的概念，熟习对数式 $\log_a N=b$ 与指数式 $a^b=N$ 间的对应关系．掌握对数的运算性质，并能熟练正确地运用性质简化计算．

2. 使学生掌握常用对数的求法，能正确地确定常用对数的首数和尾数，并能利用对数表和反对数表熟练地进行乘、除、乘方、开方等计算．

II　教材分析和教学建议

本章的主要内容是对数、常用对数的概念和运算性质，以及利用对数进行计算．

指数与对数是中学代数的一个重要组成部分．学完了本章教材，中学代数中在实数范围内所研究的各种初等运算，都已经研究过了．学习本章内容对于将来学好指数函数和对数函数，解决某些生产实际问题都将起着重要的作用．

本章教材是从指数运算的推导来引进的，介绍了对数的概念，对数的运算性质，常用对数及其首数、尾数和首数的求法，以及根据对数的运算性质，利用对数表和反对数表进行计算的方法．我们应用这些计算方法，可以把一些多位数的乘、除、乘方、开方大为简化．可见，指数和对数是生产实践和科

学实验中常用的数学工具之一.

本章教材的重点是利用对数进行计算. 这部分内容的难点有三个:第一是引进对数概念.第二是对数恒等式和含有负首数的对数计算. 第三是常用对数的查表, 尤其是真数为纯小数时的情况. 能够正确、熟练地进行对数计算的关键在于掌握好对数的运算性质, 而掌握好对数的运算性质又在于透彻理解对数的定义, 所以理解对数的概念是学好本章教材的关键. 要突破"对数概念"这一难点, 必须使学生真正弄懂对数式与指数式中各数的对应关系. 在教学"含有负首数的对数计算"时,应反复强调一个正数的对数应该分成首数与尾数两部分,首数是负整数时,运算要分两部分进行, 然后再进行合并. 本章教材的概念与方法较多, 要求学生作到运算比较熟练. 教师在教学时,应尽量使学生懂得知识的前后联系.课堂练习和作业中出现的错误, 教师要及时启发学生分析、讲评并改正;解题的步骤、格式要注意规范化.

本章教学约需 12 课时,具体分配如下(仅供参考):

13.1	对数	约 2 课时
13.2	积、商、幂、方根的对数	约 2 课时
13.3	常用对数	约 2 课时
13.4	对数的首数和尾数	约 5 课时
13.5	对数表	
13.6	反对数表	
13.7	利用对数进行计算	
复习		约 1 课时

13.1 对数

1. 学好对数概念是学好本章教材的关键，也是教学中的一个难点. 一定要使学生透彻理解对数的定义，掌握指数式与对数式的互化.

为此，课本通过指数式的具体例子 $2^4=16$ 表示 16 是 2 的 4 次幂，提出另一种相反的问题：2 的多少次幂等于 16？并用式子 $\log_2 16$ 来表示所求的数，再从 $2^4=16$ 的对比中，知道 $\log_2 16=4$，又进一步给出了这个式子中各数的读法. 然后，在此基础上，从一般的指数式 $a^b=N$ 得出对数的一般表示式 $\log_a N=b$ 及其式中各字母表示的数的名称.

2. 引进对数定义后，要强调以下两点：

(1) 让学生真正弄清对数式 $\log_a N=b$ 的含义. 首先弄清式中各数相对于指数式中的什么数，找出它们之间的联系和区别；其次弄清各数的名称和式子的读法；第三弄清对数式的写法，"log"同"+"、"×"、"$\sqrt{\ }$"等符号一样，表示一种运算，即已知一个数和它的幂求指数的运算，这种运算叫对数运算. 不过对数运算的符号写在数的前面. 在弄清含义的基础上，还要求学生能作到对数式的读法和写法都要规范化，并要求学生书写正确、工整，养成好的习惯. 否则会在计算中分不清底数、真数、对数，造成不应有的计算错误.

(2) 注意对数式 $\log_a N=b$ 中字母的取值范围. 引进对数定义时，为什么规定 $a>0, a\neq 1$ 呢？可与指数式 $a^b=N$ 中的底数 a 的条件对照考虑. 因为：

① 若 $a<0$，则 N 为某些值时，b 不存在，如 $b=\log_{(-2)}8$ 不存在.

② 若 $a=0$，N 不为 0 时，b 不存在，如 $\log_0 2$ 不存在；N

亦为 0 时，b 可为任何值(正数)，是不唯一的，即 $\log_0 0$ 有无数个值.

③ 若 $a=1$，N 不为 1 时，b 不存在，如 $\log_1 5$ 不存在；N 亦为 1 时，b 可为任何数，是不唯一的，即 $\log_1 1$ 有无数个值.

这样就规定了必须限定 $a>0$, $a\neq1$.

在 $\log_a N=b$ 中，必须 $N>0$，这是由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数. 因而 $a^b=N$ 中的 N 总是正数. 要特别强调零与负数没有对数，这一点很重要，高中讲对数函数的定义域是以这一点为基础的.

为了加深对数概念的理解，课本第 2 页的图说明了指数式与对数式之间的联系. 也可以列表予以说明：

	式　　子	名　　称		
		a	b	N
指 数 式	$a^b=N$	底数	指数	幂(的值)
对 数 式	$\log_a N=b$	底数	对数	真数

使学生懂得对数式 $\log_a N=b$ 只不过是指数式 $a^b=N$ 的改写，两者所表示的 a，b 和 N 三个数的关系是一样的，在底数相同的条件下，对数式和指数式可以互相转化. 练习中的第 1、2 两题的目的是使学生牢固地掌握这个定义. 还应注意向学生说明两个定义中的不同点是对数定义中规定了 $a\neq1$.

3. 为了激发学生学习对数的积极性，可以先介绍些实际问题中遇到的一些计算问题，提出引入对数概念的必要性，而后再通过课本上的例子讲对数定义. 或在讲完对数定义后，介绍些关于对数的历史知识(详见本章附录"对数的发展简

史")及实例,说明学习对数的作用.

4. 根据对数的定义,可得对数恒等式:

$$a^{\log_a N}=N.$$

必须注意式子成立的条件是 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$, 否则不能成为对数恒等式. 如 $2^{\log_2(-4)}\neq-4$, 因为 $\log_2(-4)$ 没有意义.

应用对数恒等式时,要使幂的底数和对数的底数相同.对数恒等式的作用, 在于能把任意一个正数 N 写成以 a 为底的幂的形式, 这时指数是 $\log_a N$. 结合对数定义介绍 $a^{\log_a N}=N$, 有助于加强指数式与对数式间的关系的了解,这个恒等式在证明、计算和化简等方面应用比较广泛,但在初中阶段对大多数学生来说, 不宜再补充超出课本中所有类型的习题. 教材仅在课文中介绍了对数恒等式, 在全章的小结中没有列入这一式子,目的是不作过高、过多的要求.

5. 安排例 1 与例 2 的作用是巩固对数概念,熟悉对数式中各数的名称, 使学生会根据对数定义将指数式与对数式互相转化. 例 3 是已知底数与对数求真数的问题,例 4 是计算特殊数的对数值的问题. 这两个题可以归纳为已知 $\log_a N=b$ 的 a, b, N 三个数中的两个数, 求出第三个数的问题. 练习中的第 4 题,习题一的第 1, 3 题都属于这种类型,可以进一步理解对数概念.在解题过程中应注意书写格式.解的过程也是推理过程,应通过作题培养学生的思维能力,推理能力.

为了帮助教师掌握例 3、例 4 的教学要求, 特作两点说明,供教师参考,不必给学生介绍.

(1) 若已知等式 $\log_a N=b$ 中的两个数,求其余一个数,可以根据对数的定义把 $\log_a N=b$ 化成 $a^b=N$, 再由两个已

知数求另一个未知数．这时，如果已知 a、b 求 N，就是乘方问题，已知 N、b 求 a，就是开方问题，已知 a、N 求 b，可以设法化成同样的底，比较它们的指数．

这三类问题并不是常常都能解决的，只能在一定的条件下解决其中的一部分．

(2) 如果 $a^m=a^n$，则 $m=n(a>0, a\neq 1)$．

证明：若 $m\neq n$，而 $n=m+c(c\neq 0)$，

于是 $$a^m=a^{m+c}=a^m\cdot a^c.$$

等式两边同除以 a^m（因 $a^m\neq 0$）得：

$$1=a^c.$$

而任意一个数的幂，如果底不等于 1 和幂指数不等于 0，那么，它不可能等于 1．因此假设 $m\neq n$ 就引出了矛盾．

6．例 5 是具体数字的计算题．教材通过例 5 的计算推广到一般情况，给出 $\log_a 1=0, \log_a a=1$．并要求学生自己证明，一方面由于根据对数的定义进行证明并不困难，学生可以自己证，另一方面也可以培养学生的动手能力，发挥学生的积极性．这两个式子是对数的两个基本性质，在化简或计算中经常用到，应要求学生牢固地掌握．

13.2　积、商、幂、方根的对数

1．能否掌握好积、商、幂、方根的对数的运算性质，直接影响到能否正确、熟练地利用对数进行计算的问题．要使学生理解推得这些性质的根据和过程，会用语言叙述四个运算性质，并在此基础上要求学生记住公式．

2．关于对数的运算性质的导出，各书各有特点．本教材是根据对数的意义和指数的运算性质证明的．为此，教材先

系统地复习了指数的四个运算性质，以便于学生对比，理解推导的根据和过程，掌握对数的运算性质. 也可以利用对数恒等式和指数的运算性质来推导.

设 $M>0, N>0, a>0, a\neq 1$,

$\because$ $M=a^{\log_a M}, N=a^{\log_a N}$,

$\therefore$ $M\cdot N=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}=a^{\log_a M+\log_a N}$.

根据对数定义可得

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N. \quad (证毕)$$

同样，$\because$ $M=a^{\log_a M}$,

$\therefore$ $M^n=(a^{\log_a M})^n=a^{n\log_a M}$.

根据对数定义可得

$$\log_a M^n=n\log_a M. \qquad (证毕)$$

仿照上面的证法，同样可以证明

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.$$

$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

以上供教师参考，不必给学生介绍.

3. 教学中应向学生指出：

(1) 利用对数的运算性质，可以把高一级的运算（乘、除、乘方、开方）转化为低一级的运算（加、减、乘、除）. 这样作，不仅加快了计算的速度，也简化了计算的方法，显示了利用对数进行计算的优越性.

(2) 强调在使用性质时，应明确性质中各字母的取值范围：$M>0, N>0, a>0, a\neq 1$. 在性质 3 中 n 是一切实数，在

性质 4 中 n 是大于 1 的整数. 要注意只有所得结果中的对数和所给数的对数都存在时等式才能成立.

例如 $\log_2(-4)(-8)\neq\log_2(-4)+\log_2(-8)$.

虽然$\log_2(-4)(-8)$是存在的, 而 $\log_2(-4)$, $\log_2(-8)$ 无意义.

同样 $\log_{10}(-10)^2\neq 2\log_{10}(-10)$.

因为$\log_{10}(-10)$无意义.

(3) 应注意防止和纠正学生可能产生的各种错误. 如错误地将对数的运算性质写成:

$$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N;$$

$$\log_a MN=\log_a M\cdot\log_a N;$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\frac{\log_a M}{\log_a N};$$

$$\log_a M^n=(\log_a M)^n.$$

产生错误的原因是把积、商、幂的对数与对数的积、商、幂混淆起来了, 或把对数符号当作了表示数的字母进行运算. 为了防止或纠正学生产生错误, 应该要求作题时先想一想每一步计算的根据是什么, 然后再动笔写. 也可以用实际数目检验, 指出其错误. 练习中的第 4 题是让学生判断给出的三个对数式是否正确, 以帮助学生正确地掌握对数的运算性质.

(4) 应用对数的运算性质, 可以把几个正数的幂或算术根之间相乘除所得到的式子, 用式子里的各个数的对数表示出来, 这个运算过程叫做"取式子的对数". 练习中的第 1、2 题, 习题一中的第 4 题就是取式子的对数的练习题, 通过这种练习, 可以为常用对数的计算打下基础.

13.3 常用对数

1. 常用对数是以 10 为底的对数，它不仅具有对数的一切性质，而且还有它本身的特殊性质，利用这些性质就能使对数的运算大大简化．此外，对于不是以 10 为底的对数，可以通过对数换底公式（$\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}$，在高中代数第一册讲）换作以10为底的对数，从而大大扩大了常用对数的应用范围．

2. 通过这一节教材的学习，必须使学生明确并掌握下面两个问题：

(1) 10的整数次幂的对数是一个整数，它等于幂的指数（即$\lg 10^n=n$）．并且真数较大时它的对数也较大．

课本上从对数的定义得出了这个规律．列举了学生比较熟悉的式子，如：因为 $10^2=100$，所以 $\lg 100=2$，因为$10^{-3}=0.001$，所以 $\lg 0.001=-3$．也可以由幂的对数运算性质得出．例如

$$\lg 100=\lg 10^2=2\lg 10=2,$$

$$\lg 0.001=\lg 10^{-3}=-3\lg 10=-3.$$

通过上面的例子可以引导学生发现当底数 $a=10$ 时，真数和对数之间的变化关系：较大的真数对应于较大的对数；反过来，较大的对数对应于较大的真数．从而得到对数的这样一个性质：

当底数大于 1 时，真数越大，它的对数也越大．

(2) 10 的整数次幂以外的任何正数的对数是个小数（即都可以写成一个整数与一个正的纯小数的和的形式）．

有了前一个性质做基础，掌握这一性质是不难的．例如

数字 72 在10与 100 之间，即 $10<72<100$，而 $\lg 10=1$，$\lg 100=2$. 根据前一条性质可以知道 $1<\lg 72<2$，所以 $\lg 72$ 是 1 与 2 之间的一个小数. 一般地，对于给出的一个正实数 M，如果

$$10^n<M<10^{n+1}\ (n\text{ 为整数}),$$

那么有 $$n<\lg M<n+1.$$

特别是，如果 $1<M<10$，

那么有 $0<\lg M<1$.

即当 $1<M<10$ 时，$\lg M$ 的值是一个正的纯小数.

3. 教学时可以先向学生说明，任何正数都有对数. 任何一个不是 10 的整数次幂的正数也有对数. 然后再通过举例使学生了解不是 10 的整数次幂的正数的对数是一个小数.

10的整数次幂以外的正有理数的对数的值不是整数，也不是分数，而是无理数. 由于初中阶段学习对数时仅能查表求值，而对数表给出的多是近似值. 因而不能要求学生对这个结论有透彻的理解，只要求学生知道有这样的结论就可以了，但是教师应该理解. 下面，我们举两个例子来说明.

(1) 考察比 1 大的数，例如 35.

首先，$\lg 35$ 不可能是整数. 因为，如果 $\lg 35$ 是整数，那么 35 就应该是 10 的正整数幂，也就应该是 1 后面带有若干个零的整数. 但是 35 不是这样的数，所以 $\lg 35$ 不是整数.

其次，$\lg 35$ 也不可能是分数. 因为，如果 $\lg 35$ 是分数，那么 35就应该是 10的$\frac{a}{b}$(b 是大于 1 的整数，a 是正整数) 次幂，因此可以得到$10^{\frac{a}{b}}=35$，$10^a=35^b$. 但是10^a 是 1后面带有若

干个零的整数，而 35^b 不是这样的数，所以 $\lg 35=\frac{a}{b}$ 不成立，因而 $\lg 35$ 是无理数.

(2) 考察比 1 小的正数，例如$\frac{9}{200}=0.045$.

首先，$\lg 0.045$ 不可能是整数. 因为，如果 $\lg 0.045$ 是整数，那么 0.045 就应该是 10的负整数幂，也就应该是 1 前面带有若干个零的纯小数，而 0.045 不是这样的数，所以 $\lg 0.045$ 不是整数.

其次，$\lg 0.045$ 也不可能是分数. 因为，如果 $\lg 0.045$ 是分数，那么 0.045 就应该是 10 的 $-\frac{a}{b}$(b 是大于 1 的整数，a 是正整数)次幂；因此可以得到 $10^{-\frac{a}{b}}=0.045$, $10^{-a}=0.045^b$，但是 10^{-a} 是 1 前面带有若干个零的纯小数，而 0.045^b 不是这样的数，所以上面的等式不能成立. 因此，$\lg 0.045$ 不是分数. 由此可知，$\lg 0.045$ 不可能是有理数，而是无理数.

一个数的对数是无理数时，虽然不能用有理数把它准确地表示出来，但是能够用小数表示出它的近似值. 例如:

$$10<35<100,$$

$$\therefore \quad \lg 10<\lg 35<\lg 100,$$

$$\therefore \quad 1<\lg 35<2,$$

由此可知 $\lg 35=1+$正的纯小数.

即 $\lg 35$ 是 1 与 2 之间的一个小数.

又如，$$0.01<0.045<0.1,$$

$$\therefore \quad \lg 0.01<\lg 0.045<\lg 0.1,$$