# 数学竞赛题集锦

江苏省数学学会 编

91

南京大学出版社

# 数学竞赛题集锦

江苏省数学学会编

南京大学出版社

1992·南京

（苏）新登字第011号

## 内 容 简 介

本书是江苏省数学学会在承办1991年全国高中数学联合竞赛的基础上组织编写的。全书分五章：极值与函数方程、代数与初等数论、几何、不等式、组合数学等，所选题目内容丰富，具有新意，方法灵活，技巧性高，每题均给出了详细的解答，有些还给出了思路分析和注解。

阅读本书对启迪思维，增强竞赛能力，进入IMO前沿阵地大有益处。

**数学竞赛题集锦**

SHU XUE JING SAI TI JI JIN

江苏省数学学会 编

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　　江苏丹阳新华印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 10.625　字数 237 千

1992年6月第1版　1992年6月第1次印刷

印数 1—10000

ISBN 7-305-01476-1/O·78

定价 4.20 元

# 前　言

1991年我会受中国数学会的委托，承办全国高中数学联合竞赛。在命题过程中，得到全国各兄弟省、市、自治区数学会的大力支持，提供200多道候选题。这便启示我们在命题完成之后来编写一本竞赛题书。《数学竞赛题集锦》一书正是这种情况下的产物。

本书第1章介绍极值与函数方程，第2章介绍代数与初等数论，第3章介绍几何。不等式与组合数学则分别在第4、第5章中介绍。各章选题都给出了详细的解答或证明，有些题在解答之前还加上了思路分析或有益的注。每章后都附有一定数量的练习题，并在书末给出了他们的答案或提示，以供读者参考。应当指出，这些提示连同各章选题中的解法都未必是最佳的，希望能起到抛砖引玉的作用。

在编写本书时，编者们力求逻辑性、科学性强，内容丰富，具有新意，方法灵活，趣味性与技巧性高。同时注意到各章内容彼此间的相互渗透。希望本书有利于各种竞赛训练，促进读者尽快进入当今IMO竞赛的前沿阵地。在那繁花似锦的竞赛园地里，希望本书能得到读者的欣赏。

参加本书编写的有我会的中国数学奥林匹克高级教练员郑维行、马传渔、佟文廷、马永培、姚天行等同志，除了这次征题以外，他们还吸收了多年来为训练数学奥林匹克竞赛而写的讲稿，并查阅了许多有关杂志与资料。由于时间仓促，书中不妥之处在所难免。敬请专家、读者们不吝赐教。

在本书编写过程中，深得南京大学出版社的大力支持；省数学学会王肇西同志的协助；特别应指出的是，周伯壎教授与参加本届竞赛命题工作的其他同志裘宗沪、杜锡录、单墫、赵振威、阮君伟、张同君等各位教授、高级教练员对本书的编写给予极大的启发与鼓励。编者于此对他们谨表示衷心的感谢。

江苏省数学学会

1991，12于南京

# 目　　录

# 1

# 极值与函数方程

**1**．给出数列 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，$n\in\mathrm{N}$，(i) 试证 $\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}(n+1)^2$；(ii) 求 $a_n/n^2$ 的最大与最小确界，并问能否达到．

(i) **证** 对任何自然数 $k$，有

$$k<\sqrt{k(k+1)}<k+\frac{1}{2},$$

对 $k$ 自 1 到 $n$ 求和，得

$$\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{n}{2},$$

故

$$\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}n(n+2).$$

显然，$n(n+2)<(n+1)^2$，故得结论(i)．

(ii) **解** 据已证结果，

$$\frac{1}{2n}(n+1)<\frac{a_n}{n^2}<\frac{1}{2n}(n+2).$$

由此可见 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$．下面证明 $a_n/n^2$ 是单调递减的：

$$\frac{a_n}{n^2}>\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2},\ n\in\mathrm{N}.$$

此不等式等价于

$$\frac{a_n}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2}\left(a_n+\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)$$

或

$$\frac{a_n}{n^2} > \frac{1}{2n+1}\sqrt{(n+1)(n+2)}.$$

由于 $\frac{1}{2n}(n+1) > \frac{1}{2n+1}\sqrt{(n+1)(n+2)}$，故上述不等式确实成立。因此 $a_n/n^2$ 是单调递减的，它的最大下界为 1/2 且不能达到。它的最小上界为第一项$\sqrt{2}$，可以达到。

**注** 题中不等式也可用数学归纳法证明。在求数列的确界时，考察数列的极限值与单调性是重要的，当然有时他们不一定存在。

**2.** 设 $1\times2\times3\times\cdots\times1991=21^n\times A$，其中 $n$ 与 $A$ 均为自然数。那么，$n$ 的最大值是多少？

**解** 分情况讨论。

1° 在 1 至 1991 的自然数中，是 7 的倍数的有 $7\times1$，$7\times2$，…，$7\times284$，共 284 个。

2° 在上面 284 个数中，是 $7^2$ 的倍数的有 $7^2\times1$，$7^2\times2$，…，$7^2\times40$，共 40 个。

3° 在上面 40 个数中，是 $7^3$ 的倍数的有 $7^3\times1$，$7^3\times2$，…，$7^3\times5$，共 5 个。

4° 有 $7^{284}\times7^{40}\times7^5=7^{329}$，共 329 个。

5° 同理可知，在 1 至 1991 的自然数中，因子 3 的个数是

$$3^{660}\times3^{220}\times3^{73}\times3^{24}\times3^8\times3^2=3^{987},\text{共 987 个。}$$

由于 $987>329$，故 $n$ 的最大值是 329。

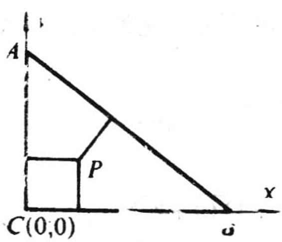


图 1.1

**3.** 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别是 3，4，5。试求 $\triangle ABC$ 内一点 $P$ 到三边距离的乘积的最大值。

**解** 如图，设 $\triangle ABC$ 的边

$AC=3$，$CB=4$，$BA=5$，那么 $\angle C=90°$。

取坐标如图，则 $A$，$B$ 的坐标分别是 $A(0, 3)$，$B(4, 0)$。直线 $AB$ 的方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$

设 $P$ 的坐标为$(a, b)$，$a, b>0$，则 $P$ 到直线 $AB$ 的距离为

$$d=\frac{1}{5}(12-3a-4b).$$

因此 $P$ 到三边距离的乘积是

$$A=\frac{1}{5}ab(12-3a-4b).$$

将 $A$ 表成 $\frac{1}{60}(3a)(4b)(12-3a-4b)$，可见三个正因子的和为常数 12，因此，此乘积当

$$3a=4b=12-3a-4b$$

时达到最大。解之，得 $a=4/3$，$b=1$，而最大值

$$A_{\max}=16/15.$$

**4**．某车间第一天生产电视机不超过20台，以后每天产量比前一天有所增加，增加数不超过20。经过若干天后，至某天产量达到1991台。求从第一天起所有产量总和的最小值。

**解**　设第 $i$ 天的产量为$a_i$(台)，$i=1, \cdots, n$，且$a_n=1991$，并设 $n$ 天总产量为 $S_n$。

如果令 $x_i=a_i-a_{i-1}$，$i\geqslant 1$，这里约定 $a_0=0$，则 $x_i\leqslant 20$，$a_1\leqslant 20$。

有

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\\&=x_1+x_2+\cdots+x_n,\end{aligned}$$

因此，

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1991. \tag{1}$$

不难看出，

$$S_n=nx_1+(n-1)x_2+(n-2)x_3+\cdots+x_n. \tag{2}$$

于是问题归结为在条件(1)下求 $S_n$ 的最小值。

由于 $x_i\leqslant 20$, $i\geqslant 1$，我们由后面往前面推算，设由后面起第一个小于 20 的数记为 $x_k$，并进行下面这样的调整，以观察 $S_n$ 的变化：

$$x_1'=x_1-1,\ x_2'=x_2,\ \cdots,\ x_{k-1}'=x_{k-1},\ x_k'=x_k+1,$$

$$x_j'=x_j \quad (k+1\leqslant j\leqslant n).$$

那么 $x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=1991$，且

$$S_n'=nx_1'+(n-1)x_2'+\cdots+(n-k+2)x_{k-1}'$$
$$+(n-k+1)x_k'+\cdots+x_n'=S_n-(k-1).$$

可见 $S_n-S_n'=k-1$。

这样，依上述调整时，$S_n'$ 变小了。这表明，当 $x_k<20$ 时，每增加 1，相应的 $S_n$ 就变小一次。因此 $S_n$ 的最小值是在

$$0<a_1\leqslant 20,\ x_2=x_3=\cdots=x_n=20$$

时达到。

由 (1)，$1991=(n-1)\times 20+a_1(0<a_1<20)$。又因 $1991=99\times 20+11$，从而产量的最小值为

$$S_{100}=100\times 11+\frac{99\times 100}{2}\times 20=100100.$$

**5**. 设 $z_1$，$z_2$ 为复平面上两动点，满足下列条件：(i) $z_1$ 的幅角为定值 $\alpha$，$z_2$ 的幅角为 $-\alpha$，这里 $0<\alpha<\pi/2$，(ii) $z_1$，$z_2$ 与原点 $O$ 所成三角形的面积为定值 $S$。假定 $\triangle z_1Oz_2$ 的重心为 $z$，求 $z$ 的模的最小值。

**解** 用复数表示法来解此问题。假设

$$z_1=r_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha),\ z_2=r_2(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha).$$

据重心的性质，有

$$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+O),$$

故

$$z=\frac{1}{3}\{(r_1+r_2)\cos\alpha+\mathrm{i}(r_1-r_2)\sin\alpha\}.$$

这样，

$$|3z|^2=(r_1-r_2)^2+4r_1r_2\cos^2\alpha.$$

由于 $S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin 2\alpha$，故

$$\begin{aligned}|3z|^2&=(r_1-r_2)^2+\frac{8S\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}\\&=(r_1-r_2)^2+4S\operatorname{ctg}\alpha.\end{aligned}$$

由此看出，当 $r_1=r_2=\left(\frac{2S}{\sin 2\alpha}\right)^{1/2}$ 时，$|3z|^2$，从而 $|z|$ 有最小值，且此时 $|z|$ 的最小值为 $\frac{2}{3}(S\operatorname{ctg}\alpha)^{1/2}$。

注　本题用复数表示法来解是方便的；当求得 $|z|$ 的表达式时，用配方法直接看出最小值在何时达到。

**6.** 设一椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b$。过其右边焦点 $F$ 作椭圆的弦 $PQ$，问此弦长为多少使三角形 $PQA$ 的面积最大？（$A=(a,0)$）。

**解**　本题须先求出 $\triangle PQA$ 的面积，然后分析何时达到极大。引用适当的参数是重要的。据经验，用极坐标表示椭圆方程并用极角作参数是方便的。

由于对称性，考察 $\triangle PQA'$ 的面积，其中 $PQ$ 为过左边焦点 $F'$ 的弦，而 $A'$ 的坐标为 $(-a,0)$。已知以 $F'$ 为极点 $F'x$ 为极轴椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

其中$e=\frac{c}{a}$为离心率，$p=\frac{a}{e}(1-e)$。容易求出，

$$PF'=\frac{ep}{1-e\cos\theta},\quad F'Q=\frac{ep}{1+e\cos\theta},$$

其中$\theta$为$P$点的极角，$0<\theta<\pi$，故

$$PQ=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

设$PQ=k$，由上式求出

$$\sin\theta=\frac{1}{e}\left(\frac{2pe+e^2k-k}{k}\right)^{1/2}.$$

于是

$$S_{\triangle PQA'}=\frac{1}{2}PF'\cdot A'F'\sin\theta+\frac{1}{2}F'Q\cdot A'F'\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}PQ\cdot(a-c)\sin\theta.$$

将上面$PQ$，$\sin\theta$的表达式代入化简得

$$S_{\triangle PQA'}=\frac{a(1-e)k}{2e}\left(\frac{(2a-k)(1-e^2)}{k}\right)^{1/2}.$$

$S_{\triangle PQA'}$达到极大等价于$S^2_{\triangle PQA'}$达到极大，因此等价于$k$的二次函数$k(2a-k)$达到极大。注意到此二因子之和为$2a$，故当$k=2a-k$时达到极大。于是当$k=a$时，$S_{\triangle PQA'}$达到极大(最大)且最大值为$\frac{1}{2e}(1-e)(1-e^2)^{1/2}a^2$。

注　本题也可用直角坐标系求解。对于双曲线可以讨论类似问题。读者试考察一下，对于抛物线，能提出类似问题否？

**7**．求二元函数$f=Ax^2+2Bxy+Cy^2$在条件$x^2+y^2=1$下的极值，这里$A$，$B$，$C$是实数。

**解** 选用参数 $t$，将题中条件改写为

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\leqslant t<2\pi.$$

代入 $f$ 的表示中并化简可得

$$f=\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}(A-C)\cos 2t+B\sin 2t.$$

由于右边第一项为常数，只须考察后两项的极值。我们有（据 Cauchy 不等式）

$$\left|\frac{1}{2}(A-C)\cos 2t+B\sin 2t\right|\leqslant\left\{\frac{1}{4}(A-C)^2+B^2\right\}^{1/2}$$

$$\cdot\{\cos^2 2t+\sin^2 2t\}^{1/2}=\left\{\frac{1}{4}(A-C)^2+B^2\right\}^{1/2}$$

且当关系

$$\lambda\cos 2t=\frac{1}{2}(A-C),\ \lambda\sin 2t=B$$

对某个常数 $\lambda$ 满足时上述不等式达到等号。由此求出 $\lambda^2=\frac{1}{4}(A-C)^2+B^2$，$\lambda=\pm\frac{1}{2}\{(A-C)^2+4B^2\}^{1/2}$，并且 $\operatorname{tg}2t=2B/(A-C)$。取 $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2B}{A-C}$ 的主值为 $\theta$，则 $t$ 可取四个值 $\dfrac{\theta}{2}$，$\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\theta}{2}+\pi$，$\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{3\pi}{2}$（在 $A=C$，$B\neq 0$ 时应取 $\theta=\pi/2$；而在 $A=C,B=0$ 时 $f=$ 常数。）相应的得到四组的 $x$，$y$ 值，他们是 $f$ 的极值点。不难看出，在相应极值点处函数取达极大值 $\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\{(A-C)^2+4B^2\}^{1/2}$ 与极小值 $\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\{(A-C)^2+4B^2\}^{1/2}$。

注 在高等数学中，常用 Lagrange 乘数法来求这个条件极值问题。现介绍如下。

引进待定乘数 $\mu$，作函数

$$F = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \mu(x^2 + y^2 - 1),$$

求 $F$ 对 $x$ 与对 $y$ 的偏导数，并令他们等于零，得到极值点所满足的条件：

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2Ax + 2By - 2\mu x = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2Bx + 2Cy - 2\mu y = 0.$$

用 $x, y$ 分别乘第一式与第二式后并相加，注意条件 $x^2 + y^2 = 1$，得

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \mu,$$

可见 $\mu$ 是所述函数可能取得的极值。由于 $(x, y) \neq (0, 0)$，上面方程组的行列式为零：

$$\begin{vmatrix} A-\mu & B \\ B & C-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

这是 $\mu$ 的二次方程式，解之，得到 $\mu$ 的两个根，$\frac{1}{2}(A+C) \pm \frac{1}{2}\{(A-C)^2 + 4B^2\}^{1/2}$，即为 $f$ 的极大值与极小值。

Lagrange 乘数法可用于一般情形，要注意在中学数学竞赛中不能应用。读者可用来作为寻找、校验极值时的参考。这好像代数方程对于用算术解鸡兔同笼问题一样。

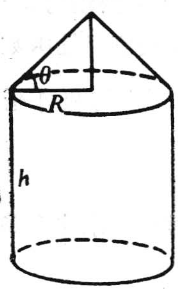

图 1.2

**8.** 一物体由半径为定长 $R$ 的直圆柱底面、侧面与直圆锥顶面构成，而直圆柱的高可以变动。假定物体的全面积为常数 $a$，问何时物体的体积为最大。

**解** 引进两个变量 $\theta$, $h$，其中 $\theta$ 为圆锥母线与其底面所成的角，$h$ 为圆柱的高。那么，圆锥的表面积为 $\pi R^2 \sec\theta$，圆柱的侧面积与底面积之和为 $2\pi Rh + \pi R^2$。于

是物体的全面积为

$$2\pi Rh+\pi R^2+\pi R^2\sec\theta=a. \tag{1}$$

令物体体积为 $V$，则 $V=\dfrac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\theta+\pi R^2h$. 问题成为在条件(1)之下求 $V$ 的极大值. 将(1)中 $h$ 的值代入 $V$ 的计算公式得

$$V=\frac{R}{2}(a-\pi R^2)+\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\theta-\frac{\pi}{2}R^3\sec\theta,$$

$$0<\theta<\pi/2.$$

因此，问题等价于求 $y=2\operatorname{tg}\theta-3\sec\theta$ 的极值，其中 $0<\theta<\pi/2$. 如果用代换 $\operatorname{tg}\theta=x$，则

$$y=2x-3\sqrt{1+x^2},\ 0<x<\infty. \tag{2}$$

容易看出，此曲线是双曲线

$$5x^2+4xy-y^2+9=0 \tag{3}$$

对应于 $x=0$, $y=-3$ 的一支. 此支曲线当 $x\to\pm\infty$ 时 $y\to-\infty$. 因此曲线是上凸的. 为求极大(最大)值，可用求水平切线与曲线交点的方法.

曲线(3)在$(x_0, y_0)$的切线方程为

$$5x_0x+2(x_0y+y_0x)-y_0y+9=0,$$

其斜率为$(2y_0+5x_0)/(y_0-2x_0)$. 当斜率等于零时，得 $2y_0+5x_0=0$，或 $y_0=-\dfrac{5}{2}x_0$. 代入(3)，求出 $x_0=2/\sqrt{5}$. 从而 $y_0=-5/\sqrt{5}$. 回到角 $\theta$，便有使物体体积 $V$ 取达最大值的 $\theta=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $(0<\theta<\pi/2)$，而相应的体积为 $\dfrac{1}{2}Ra-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)\pi R^3$.

注　本题按原分析是属于多元条件极值问题. 在消去一个变量后化为一个变量的极值问题. 由于不能用微分法，我

们再将它转化为求二次曲线的峰点。至于一般二次曲线的切线方程，可以在原二次曲线方程中用 $x_0x$ 代 $x^2$，$y_0y$ 代 $y^2$，$\frac{1}{2}(x_0y+y_0x)$ 代 $xy$，$\frac{1}{2}(x_0+x)$ 代 $x$ 以及 $\frac{1}{2}(y_0+y)$ 代 $y$ 而得到，这可以据切线与二次曲线只有一个交点(重根)而用初等数学来建立。

**9**．将 1990 表示为某些正整数之和，试求这些正整数之积的最大值与最小值。

**解** 最大值的存在性是显然的。

假定所求最大值为 $x_1x_2\cdots x_n$，且不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$。来分析每个 $x_k$ 的取值范围。

显然 $x_1\geqslant 2$。当 $x_1=1$ 时，可去掉此因子而将 1 加到其他的 $x_k$(例如 $k=2$)上去，则积变大了。

其次容易知道 $x_n\leqslant 4$。因若 $x_n>4$，则可将 $x_n$ 写为 $x'_n+x'_{n+1}$，这里 $x'_n=2$，$x'_{n+1}=x_n-2$。则有 $x_n<x'_nx'_{n+1}$。于是 $x_1\cdots x_n<x_1\cdots x_{n-1}x'_nx'_{n+1}$，因而 $x_1\cdots x_n$ 非最大。

当 $x_n=4$ 时，就改写 $x_n=2\cdot 2$。这样，可认为最大的积 $x_1\cdots x_n$ 中的因子全是 2 与 3 组成。

我们再指出，在 $x_1$，…，$x_n$ 中至多只有两个 2。因若出现 3 个 2 时，把他们换成两个 3，那么 $2\cdot 2\cdot 2<3^2$，积便增大了。

于是，$x_1\cdots x_n$ 中一切因子是 2 或 3，且因子 2 的个数只能是 0、1 或 2。但当因子 2 的个数是 0，1，2 时，乘积 $x_1\cdots x_n$ 的一切因子之和(即 1990)被 3 除的余数分别为 0，2，1。现易知 1990 被 3 除的余数为 1。可见积中恰有两个因子 2。由于

$$1990-(2+2)=1986,\ 1986\div 3=662,$$

故所求最大值为 $2^2\cdot3^{662}$。

最小积显然是 1。

注　本题解法很有特点，可用于类似的问题上去。

**10**. 设 $p$ 为素数，$n\in\mathrm{N}$。令 $v(n)$ 为 $n$ 的素因子积中 $p$ 的指数；且当 $x=r/s$ 为有理数，这里 $r$，$s\in\mathrm{N}$，令 $v(x)=v(r)-v(s)$；此外，$v(-x)=v(x)$。这样，$v(x)$ 对一切有理数有定义。现在对任意有理数 $x$，$y$，令 $d(x, y)=p^{-v(x-y)}$，对于 $x\neq y$，而 $d(x, x)=0$。试证，对任意有理数 $x$，$y$，$z$，有不等式

$$d(x, z)\leqslant\max\{d(x, y), d(y, z)\}. \qquad (1)$$

**证**　首先看特殊情况。当 $z=x$ 时，左边为零，右边是非负的，(1) 式显然成立。当 $x=y$ 时，(1)式右边为 $\max\{0, d(y, z)\}=d(y, z)$，与左边一致，(1)亦成立。对 $y=z$ 情形，与此相同。这样，当 $x$，$y$，$z$ 中有两个相同时，(1)是正确的。

现设 $x$，$y$，$z$ 两两互异。令 $x-y=x'$，$z-y=z'$，那么 $x-z=x'-z'$，并且 $x'$，$z'$ 与 $x'-z'$ 均非零，这时(1)等价于

$$d(x', z')\leqslant\max\{d(x', 0), d(z', 0)\}$$

或

$$v(x'-z')\geqslant\min\{v(x'), v(z')\}. \qquad (2)$$

由对称性，不妨设 $v(x')\geqslant v(z')$，此时若令 $x'=p^r\xi$，$z'=p^s\zeta$，其中 $\xi$，$\zeta$ 均不含因子 $p$，则 $\dfrac{x'}{z'}-1=\dfrac{p^{r-s}\xi-\zeta}{\zeta}$，分母无$p$的因子，从而 $v\left(\dfrac{x'}{z'}-1\right)\geqslant0$。于是

$$\begin{aligned}v(x'-z')&=v\left(\left(\frac{x'}{z'}-1\right)z'\right)\\&=v\left(\frac{x'}{z'}-1\right)+v(z')\geqslant v(z').\end{aligned}$$