有限自动机理论

孙 怀 民

北 京 航 空 学 院

一九八二年二月

目　　录

第一第　数学准备

自动机理論是在近二十多年发展起来的新兴数学分支，属于控制論的范疇。它的主题是对处理信息的过程进行数学描述。正是由于这个缘故，所以从它誕生伊始，它就和計算机的发展有着千絲万縷的联系。这是因为，計算机本质上是信息处理机，它涉及的許多问题都可以用有限自动机作为数学模型。大家都知道，有一段相当长的时期，有限自动机理論一直是計算机运轉设計及各种数字工程设計的主要工具。在形式語言理論中，有限自动机也是基本工具之一（例如，編譯系統中的詞法分析程序就是以它为模型）。所以学习自动机理論，不論是对軟件工程或硬件工程说来，都有很大的好处。特别重要的是，今天計算机的軟件工程正经历着一个由技巧向科学的过渡，也就是说要把已经相当成熟的经験提炼成系統的科学理論。而要建立科学理論，关鍵的手段是要对对象进行数学描述，也就是说要建立数学模型。在这种背景之下，有限自动机理論正在滲透到計算机科学众多领域中，例如人机交互作用的信息交換过程，图象识别的算法，并行程序的信息交換及处理，程序分析和设計的方法論等等。有人说，演算是分析数学的語言，集合論是离散数学的語言，自动机理論是計算机科学的語言，这話是有它一定的道理的。

从方法論上说，有限自动机理論就是用抽象数学的方法研究信息处理过程的理論。所以它用的概念比較新，比較抽象。这对于初学者会造成一定困难。它虽然不要求初学者具备任何专門的数学基础知识，但是却要求他們具有一定的数学修养（即进行抽象思維的能力）。其实，只要我們在一开始就注意确切把握它的各种抽象概念，我們就会发現，它的方法是很容易掌握的。为了帮助读者作到这一点，本章将作一些必要数学准备。主要讲两方面，其一是关于如何对信息处理过程进行数学的抽象，其二是一些有关抽象代数学的基本概念。

§1·1　信息处理过程的数学抽象

广义地说，人类的一切活动（自然的、技术的、社会的）都离不

开信息的概念，一个战争的指挥員要作出正确的决策，必須掌握足够的情报，这些情报就是他从外界获得的信息。他們根据这些情报作出决策，用命令的形式发布出去，这些命令就是他发出的信息，表达了他为了使外界向他所希望的方向变化而作出的选擇（选擇了那些影响外界状态的行动）。一台計算机的cpu要能正确地控制运算的进行，首先必須取得足够的信息（关于原始数据和程序以及中間运算結果的信息），它根据这些信息通过邏輯运算而选擇目前应进行的动作，以信号的形式发给运算器，这就是它发出的信息。总之，一切科学领域，都要和信息打交道。这样人們就想到了要对信息进行抽象的数学描述，以发現规律，指导一般。

怎样进行抽象呢？当然，首先就应該抽象出不同领域的信息之間所共有的性质。在不同的领域里，信息內容的意义可以是完全不同的，同样是用阿拉伯数符构成的串，在电报編碼中和在算术运算中就具有完全不同的內在涵义，就是用同一內容的信息，对不同时間、地点、不同的对象的意义也可完全不同。比如说外国某某交易所股票大跌价，对該国的一些人看来是了不得的大消息，在我們看来就不见得是这样。所以，要发現不同领域的信息的共同规律，必須把"信息"这一概念从其內涵抽象出来，才能使关于信息的数学理論具有概括性。

那么，撇开其內涵之后，"信息"这一概念还留下了什么值得概念的东西呢？有的、那就是，无論什么信息，它的作用总是告訴我們，在一組可能发生的事件中，究竟那一事件发生了，这给我們提供了对信息进行抽象量度的一种方法。设想有人告訴我們，什么时候会发生月蝕，我們不会惊奇，因为这是必然会发生的事，这个消息甚至不含有信息量。因为并沒有一組偶然性事件提供选擇，在該时只能发生月蝕，而不可能发生其他事件。反之，如果有人告訴我們月亮飞往火星了，我們就会大为震动，并不一定是由于这一信息內容对我們有什么意义，而是由于信息量太大了。它告訴了我們一件我們原来认为不可能发生的事件。

类似的这一系列比喻提供了信息的"量"的概念。它是基于"集合"和"概率"这两个概念的。信息的量度脱离不开可能发生的事件的全体的集合。这样的集合就叫作信息源。信息源集合可能是有限的，

也可能是无限的，但是我們只要知道了它的概率分布，就可能对其中某些特定事件（子集）发生的信息作大量的测度。这些，就是信息論的奠基人申农在建立他的理論时的基本思路。

对信息的性质作了这样的抽象之后，就可以进一步对其作出形式的描述。对于各个可能发生的事件，可以不再用它們原来的名称（这些名称是着重表达其內涵的），而改用一些抽象的字符（也可以叫作字母，如拉丁字母）来代表他們，这样，信息源的集合就变成了字符集合，或者叫作字母表。这样作并不单純是描述方式的改变。数学思維的经驗告訴我們，一旦对某种現象建立了形式化的符号描述語言，就提供了进行运算的可能性。

在这里应該指出，同样是作为信息的数学抽象，信息論和有限自动机理論的着眼点是不同的。前者关心的是信息的量的测度。后者关心的是处理信息的手段。所謂手段，具体地说是两个问题。第一个问题是信息识别，就是说对已收到的信息，要判段它們是否属于某个特定的范疇。第二个问题是信息的变换，就是根据收到的信息，发出反应信息。所以一般说来，有限自动机理論所关心的，只是作为信息源的字符集合中包括什么字符，而不关心这些字符的統計特性（在自学习机制的研究中，必須考虑外界信息的統計特性，这时可以用概率性有限自动机作为模型，但关于这方面探討超出了本課的范圍）。

除此之外，还有一点很重要，那就是有限自动机所处理的，并不是彼此无关的信息，而是时間进程中的信息流。对这种信息流的抽象描述，需要用到一些抽象代数的概念。这就是下一节的内容。

§1·2 独異半群

大家都知道，一切抽象代数系統都是在"集合"和"算子"（或者说映射）两个概念的基礎上建立起来的。也就是说，要有一个运算对象組成的集合，要有可以对这些运算对象施行运算的算子（或者说对每一运算对象决定其映象的映射）。这些再加上一組这些运算所应服从的规律（公理）就构成了一个代数系統。独異半群就是一种簡单的代数系統。它是群論的一簡化。它以下述方式定义：

一个独異半群包括一个集合 M 和一个二元运算"∘"，它們服从

下列公理：

（1·1）自封性

"∘"是一个M的二重笛卡儿积到M本身的映射$M \times M \to M$。换言之，对于任意$m_1 \in M$，$m_2 \in M$，对它們施行"∘"运算的結果仍是M中的元。卽有

$$m_1 \circ m_1 \in M$$

（注意"∘"在这里是一个抽象算符，我們并不关心它的意义。它的运算結果是什么样子我們也不关心。我們只須用$m_1 \circ m_2$作为运算所得到的那个单元的代表符号就行了）。

（1·2）結合律：

对于任意m_1，m_2，$m_3 \in M$，恒有

$$(m_1 \circ m_2) \circ m_3 = m_1 \circ (m_2 \circ m_3)$$

（1·3）单位元：

存在一个元$1 \in M$，使得对于任何$m \in M$，恒有

$$1 \cdot m = m = m \circ 1$$

（1·1）至（1·3）定义了独異半群M。它們就是独異半群的公理。

把"∘"运算扩展成可以作用于M的两个子集，就可以使M的幂集$M\rho$也成为一个独異半群，对M的任意两个子集x和y，定义施行"∘"的运算結果为

$$x \circ y = \{x \circ y \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

不难看出，这样定义的結果使得M的幂集$\rho(M)$（M的所有子集）也变成了一个独異半群。它的单位元就是{1}，（1是M的单位元，在自动机理論中，通常并不区分单个元素以及仅含元素的集，所以也可可把{1}写成1）。

独異半群M的子集T，如果滿足下述定义，我們就说T是M的独导半群。

（1·4）$1 \in T$

（1·5）$T^2 \subset T$（$T^2 = T \circ T$）

按照这一定义，則对于独異半群M的任意子集A说来，集合

$$A^* = \Lambda \cup A \cup A^2 \cup \cdots\cdots \cup A^n \cup \cdots\cdots$$

$$(A^{n+1} = A^n A)$$

就是 ρ(M)的子独导半群。它是 ρ(M)的所有包含 A 的子独異半群中最小的一个。代数中把这一事实说成："A^* 是含 A 的子独異半群的最小閉包"。

下面将介紹独異半群的一个特例——自由独異半群。在有限自动机理論中，自由独異半群是一个非常重要的概念。

定义 1·1

自由独导半群的定义

令Σ是一个由任意有限个字符（包括空字符Λ在内）組成的字母表，令"∘"运算表示两个字符的連接，即 $a \circ b = ab$，$a \in \Sigma$，$b \in \Sigma$。于是，可归納定义Σ基自由独異半群Σ^*（也簡記为（Σ^*，∘，Λ））如下：

（1·6） 所有仅含Σ中的单个字符的集都是Σ^*的元，

（1·7） 如果 a 和 b 是Σ^*的元，則 $a \circ b = ab$ 也是Σ^*的元。

（1·8） 只有通过（1·6）、（1·7）而构成的才是Σ^*的元。

不难証明，由定义 1·1 所获得的确是一个独異半群，因为它满足（1·1）至（1·3）。1 其单元为{Λ}。如前所述，如果不区分仅含单个字母的集{a}与字母 a 本身，我们就可把Σ^*看成是所有由字母表Σ中的字母組成的有限长度的字（包括空字）的集合。我們用 $|S|$ 表示字 S 的长度。显然，$st = s \circ t$ 的长度为 $|s| + |t|$。

我們象以前一样把連接运算"∘"扩展成可作用于Σ^*的子集，也就是说，令 x 和 y 分别代表Σ^*的子集，則可定义 $x \circ y$ 的結果为

$$x \circ y = xy = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

例如，令$\Sigma = \{a, b, c\}$，$x = \{ab, ac\}$，$y = \{bc\}$

則有 $x \circ y = \{abbc, acbc\}$。

设 $s \in \Sigma^*$，如果能把 s 表为 utv，其中 u，t，$v \in \Sigma^*$ 則称 t 是 s 的子字或子字符串。如果 $u = \Lambda$，則称 t 为 s 的头。如果 $v = \Lambda$，則称 t 为 s 的尾。

在有的有限自动机文献中，不区分独异半群和半群的概念，而統称之为半群。其实二者是有区别的。在公理（1·1）～（1·3）中，去掉了（1·3），就定义了一个半群。換句話说，半群不一定要有单位元。可以说，一个独異半群一定是一个半群，但反之則不一定了。

如果A是半群S的子集，則

$$A^{+}=A\cup A^{2}\cup\cdots\cdots\cup A^{n}\cup\cdots\cdots$$

是包含A的最小子半群，特別比

$$\Sigma^{+}=\Sigma^{*}-\Lambda$$

是Σ^{*}的子半群。它是由Σ^{*}中的所有非空字組成的集。

現在我們可以看出，自由独異半群（Σ^{*}，∘，Λ）可以用来描述时間进程中的信息流。我們用字母表示Σ表征信息源集合，Σ中的各个字母就表征在单位时間节拍（也叫作工作瞬間）內所可能发生的各个信息。如果信息a和信息b是在相連的两个瞬間內先后发生的，我們就看成是对a和b施行了連接运算“∘”的結果。这样，以Σ为基的自由独異半群Σ^{*}恰好是信息流的数学模型，也就是说，Σ^{*}是由Σ中字母連接成的，任意有限长度的信息流的集合。以后我們将看到，这一概念是建立有限自动机代数的关鍵。

显然，上面的信息流所作的抽象中，把时間进程看成了离散型的。但这并不影响其通用性，因为对任意連续型时間进程，总可用分得足够小的离散型时間进程近似地描述。

习　题　1

1．証明任何独異半群的单位元都是唯一的

2．设$s\in\Sigma^{*}$，设u_1v_1和u_2v_2都是s的分解式（即有u_1，v_1，u_2，$v_2\in\Sigma^{*}$且$s=u_1v_1=u_2v_2$，証明存在唯一的s分解式$s=xyz$，使得下述二条必有一个成立。

a．$u_1=x$，$v_1=yz$，$u_2=xy$，$v_2=z$

b．$u_1=xy$，$v_1=z$，$u_2=x$，$v_2=yz$

3．令I是所有≥0的整数組成的集合。指定I的幂集的两个元

S_1, S_2 (S_1 $S_2 \in I\rho$) 为

$S_1=\{0, 2, 4\cdots\}$ S_1 为偶数集合

$S_2=\{1, 3, 5, \cdots\}$ S_2 为奇数集合

已知 (I, "∘", 0) 是一独異半群，其中算子"∘"代表加法运算，问 $S=S_1 \circ S_2$ 是什么？ S 和 "∘" 能否构成独異半群？

§ 1·3 格

格也是一个代数系統，目前它已成为近世代数学中一个独立的分支格的概念，在自动机理論、布尔代数及近代开关理論中均有重要的意义所以在这里需要对这格的性质作一簡要介紹。

半序集合

定义 1·2

一个定义在集合 A 上的关系≤ 1 如果满足下述公理，我們就称之为半序关系。

(1·9) 自反性 对一切 $x \in A$，均有 $x \leq x$。

(1·10) 反对称性 对一切 $x, y \in A$，如果 $x \leq y$，并且 $y \leq x$，則 $x = y$。

(1·11) 傳递性 对一切 $x, y, z \in A$，如果 $x \leq y$，且 $y \leq z$，則 $x \leq z$。

一个集合 A 如果有一半序关系定义在其上，則称 A 是一个半序集合。

例 1·1

设 ρ(A) 是集 A 的冪集，則定义在 ρ(A) 上的包含关系⊆就是一半序关系

例 1·2

令 $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$。在 A 上定义关系 " $x \leq y$ " 为 " y 可被 x 整除 "。我們可用图 1 表示这一关系。显然，这样定义的关系在 A 上是半序关系。例如，在 2 与 5， 4， 10 与 25， 20 与 50 之間就没有≤关系。

定义1·3

令A是一幂集，B是A的非空子集。如B中有一元b_0满足下述条件，则称b_0是B的最小元素。

$$(\forall b)(b \in B \Rightarrow b_0 \leq b)$$

如B中元b_0满足下述条件，则称b_0是B的极小元素。

$$\neg(\exists b)(b \in B \wedge b < b_0)$$

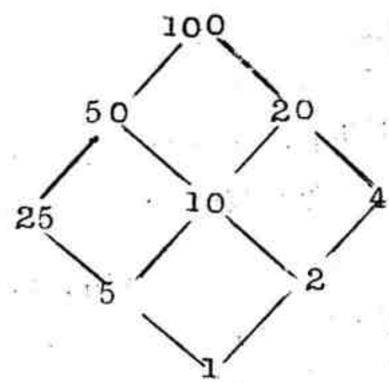

图1　例1·2的半序关系

注意在半序集合中最小元素一定同时又是极小是极小元素，但极小元素不一定是最小元素。

定义1·4

B中最大元素b_0定义为

$$(\forall b)(b \in B \Rightarrow b_0 \geq b)$$

B中极大元素b_0的定义为

$$\neg(\exists b)(b \in B \wedge b \geq b_0)$$

由上述定义及半序集合的定义，立即可以得出下述定理：

定理1·1

幂集的任何有限子集均有极小元素和极大元素。

例1·3

令B是例2中的集合A的子集。$B=\{4, 5, 10, 20, 25, 50\}$。则B中的半序关系$\leq$如图2所示。由图2可看出4和5都是B的极小元素。20和50是B的极大元素。B中没有最大元素，因为50和20之間没有半序关系。同理，B中也没有最小元素，因为4和5之間没有半序关系。而图1中的100和1则分别是A中的最大元素和最小元素。

有序集合的这种代数結构还可以推广到多个集合的笛卡儿积上，如下面定理所示。

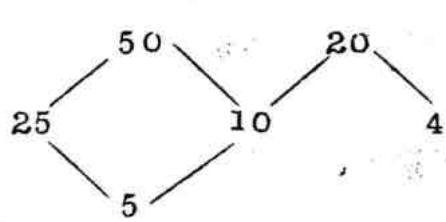

图　2

定理1·2

令ρ是两个半序集合A和B的笛

卡儿积，定义包含关系“$\leq$”如下

当且仅当$a_1 \leq a_2$且$b_1 \leq b_2$时方能成立下列关系

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$$

式中a_1，$a_2 \in A$，b_1，$b_2 \in B$。于是$A \times B$对此关系是一半序集合。广义地说，令ρ是n重笛卡儿完积$A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n$，关系$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) \leq (a_1', a_2', \cdots\cdots, a_n')$定义方式同上，则$\rho$对此关系是半序集合。

下面我們再进一步考察对每一个半序集合的元所可能进行的某些运算。为此，先引入下述概念。

定义1·5

令ρ是一个半序集合。用x，y表示ρ的元。如果ρ中有一元b满足

$$b \leq x \wedge b \leq y$$

则称b是x和y的一个下界。如果b还满足下述关系

$$b \leq x \wedge b \leq y \wedge (\forall z)(z \leq x \wedge z \leq y = z \leq b)$$

则称b是x和y的最大下界，記如$g\ell b(x, y)$。

与此对应的，如ρ中有一元u满足

$$x \leq u \wedge y \leq u$$

则称u是x和y的一个上界。如果u还满足下述关系

$$x \leq u \wedge y \leq u \wedge (\forall z)(x \leq z \wedge y \leq z = u \leq z)$$

则称u是x和y的最小上界，記如$L, u, b(xy) = u$。

定义1·6

在ρ上定义二元运算“$\cap$”（交）为

$$x \cap y = gLb(x, y)$$

二元运算“$\cup$”(併)为

$$x \cup y = Lub(x, y)$$

例4.

在例1·3的图2中，有$25 \cup 10 = 50$，$25 \cap 10 = 5$，$10 \cup 4 = 20$，

$10 \cap 4$无解等。

由定义1·5及1·6不难看出，如果$x \cup y$，$x \cap y$在半序集合中有解，則其解是唯一的。并且它們滿足吸收律，即

$$x \cap (x \cup y) = x \tag{1·a}$$

$$x \cup (x \cap y) = x \tag{1·b}$$

現在我們回顧一下本节中的討論。我們看到，我們通过(1·9)、(1·10)、(1·11)定义了集合中任二元之間所可能存在的一种关系（半序关系）。如果一集合中有一些元与元之間存在这种半序关系，我們就称之为半序集合。以这种概念为基础，我們就可以定义出集合中二个元的上界，下界，最小 上界，最大下界等。然后我們就可定义求二个元的g，L，b和L，u，b的运算。根据定义过程，我們就可断言这些运算所服从的某些规律，例如方程(1·a)和(1·b)等。

現在我們对上述过程进一步抽象化。我們撇开像“次序”、“排列”这一类比較“具体”的概念，而去考虑任意的抽象客体，抽象关系。我們不难看出，不管是什么关系，只要它服从(1·9)、(1·10)、(1·11)。我們就可以形式地定义相对的概念和运算。这些运算在形式上必然与“并”、“交”等运算服从类似的规律如(1·a)和(1·b)等。这样，我們就从半序集合的概念过渡到一种抽象的代数系統的概念了。这样作的好处是，它有助于我們理解所考察的运算系統的邏輯本质。概括出通用性的规律等等。为了帮助我們理解这种作用，下面在表1中给出了三种运算系統。它們的运算对象、关系、运算的意义都是不相同的。但它們却都服从类似(1·a)、(1·b)那样的的形式规律。

表1

	半序集合	命题代数	整数代数
关系	$\leq$	$\Longrightarrow$	$\leq$（算术不等式）
客体	集合的元x，y等	合式公式，P Q等	整数a，b等
运算	$\cap$ $\cup$	$\wedge$ $\vee$	min max
吸收规	$x\cap(x\cup y)=x$ $x\cup(x\cap y)=x$	$P\wedge(P\vee Q)=P$ $P\vee(P\wedge Q)=P$	$\min(a, \max(a, b))=a$ $\max(a, \min(a, b))=a$

习　题　2

1．令R是定义在集合A上的二元关系。定义R的逆关系$\bar{R}$为$xRy \Longleftrightarrow y\bar{R}x$。求証如果R是一半序关系，则$\bar{R}$也是一半序关系。

2．令$A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$是一半序集合。求証如果$a_1\leq a_2\leq\cdots\cdots\leq a_n\leq a_1$，则$a_1=a_2=\cdots=a_n$。

3．令(x_1, y_1)，(x_2, y_2)代表平面上二点的坐标。定义半序关系如定理1-1·3所示。求这两个点的最小上界和最大下界。

4．令$S=\{1, 2, \cdots\cdots, 10\}$。令$\rho$是定义在S上的二元关系，其定义为如果$2a>b$则有$a\rho b$。问$(S, \rho)$是不是一个半序集合？为什么？

格及其基本性质

现在我們将进一步考察半序集合的一个特例，即抽象代数学中称之为格的系統。我們将会看到，关于格的理論将构成有限自动机理論的代数背景。由于以后我們所关心的只是这种半序集合的代数性质，所以以下我們将用布尔代数中习惯的符号“$\circ$”和“$+$”代替“$\cap$”和“$\cup$”。

由上节所给出的交运算和并运算的定义，我們可提出下述引理。

引理1·2

在任何代数半序集合A中，如果在其某二元間存在交和并的运算，则这些运算必具有如下的性质。

$$x \le y \Leftrightarrow x \cdot y = x \wedge x + y = x$$

証：自明 □

定理 1·3

半序集合上的幷与交运算具有如下性质

(a) 冪等律 L_1：$x \cdot x = x$　　$L_{1}+$：$x + x = x$

(b) 交換律 L_2：$x \cdot y = y \cdot x$　$L_{2}+$：$x + y = y + x$

(c) 結合律 L_3：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$L_{3}+$：$x + (y + z) = (x + y) + z$

(d) 吸收律 L_4：$x \cdot (x + y) = x$　L_{4+}：$x + (x \cdot y) = x$

証：性质 L_1 和 L_2 可直接由幷与交运算的定义得出。性质 L_3 是显然的，因为 $x \cdot (y \cdot z)$ 和 $(x \cdot y) \cdot z$ 都是 x，y 和 z 的最大下界，$x + (y + z)$ 和 $(x + y) + z$ 都是 x、y、z 的最小上界。为了証明性质 L_4，我們分别考虑下面的两种情况。

(1) 如果 $x \le y$，则有

$x \cdot (x + y) = x \cdot y$　　由引理 1-1·2

$= x$　　由引理 1-1·2

以及

$x + (x \cdot y) = x + x$　　由引理 1-1·2

$= x$　　由 L_{1+}

(2) 如果 $y \le x$，则有

$x \cdot (x + y) = x \cdot (y + x)$　　由 L_{2+}

$= x \cdot x$　　由引理 1-1·2

$= x$　　由 L_1

以及

$x + (x \cdot y) = x + (y \cdot x)$　　由 L_2

$= x + y$　　由引理 1-1·2

$= x$　　由引理 1-1·2 □

下面给出格的定义

定义1·7

如果一个半序集合L的任一对元都存在交运算和并运算，也就是说L的任一对元都具有最大下界和最小上界，则称L是格。

定理1·4

格满足下述性质

(a) 其所有元都满足定理1-1·3中的L_1-L_4。

(b) 其所有元都满足保序性，也就是说，如果$x\leq y$，则$x\cdot z\leq y\cdot z$且$x+z\leq y+z$。

(c) 其所有元都满足模不等式，即如果$x\leq z$，则$x+(y\cdot z)\leq (x+y)\cdot z$

(d) 其所有元都满足分配不等式

$$x\cdot(y+z)\geq(x\cdot y)+(x\cdot z)$$

$$x+(y\cdot z)\leq(x+y)\cdot(x+z)$$

証：性质(a)由格的定义自明。

性质(b)的証明

如果$x\leq y$则

$x\cdot z=(x\cdot y)\cdot(z\cdot z)$　　由引理1-1·3及L_1

$=(x\cdot z)\cdot(y\cdot z)$　　由L_2及L_3

根据引理1·2，由此可推出$(x\cdot z)\leq(y\cdot z)$。(b)的第二个不等式也可用同样方式証明。

性质(c)的証明

当$x\leq z$时，由于$x\leq x+y$，故有

$x\leq(x+y)\cdot z$

另外又由于$y\cdot z\leq z$且$y\cdot z\leq y\leq x+y$，故有

$y\cdot z\leq(x+y)\cdot z$

根据这些結果，再考虑到+的定义，可知

$x+(y\cdot z)\leq(x+y)\cdot z$

性质(d)的証明

由于 $x \cdot y \leq x$ 且 $x \cdot y \leq y \leq y+z$，故有

$$x \cdot y \leq x \cdot (y+z)$$

由 $x \cdot z \leq x$ 及 $x \cdot z \leq z \leq y+z$，可得

$$x \cdot z \leq x \cdot (y+z)$$

从而有 $x \cdot (y+z) \geq (x \cdot y)+(x \cdot z)$

(d) 中的第二个不等式也可按同等方式証明 □

定理 1·5

任何有限格均有一最小元素和最大元素。証：设格 L 有 n 个元 x_1，……，x_n，则 L 的最小元素就是 $x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_n$。L 的最大元素就是 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$。它們必然都是 L 的元素。 □

例 1

令 L 是 216 的所有因数組成的集合，L={1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216}。其半序关系定义为整除关系。显然 L 是一个格。g、L、b(xy) 是 x，y 的最大公因数，L，u，b(x，y) 是 x，y 的最小公倍数。格 L 的图形如图 3 所示。

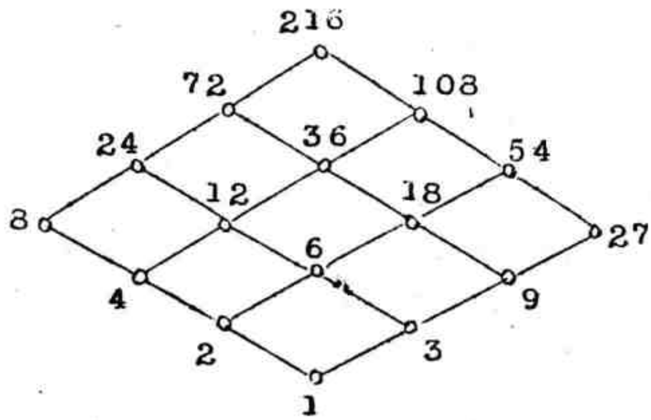

图 3 例 1 的格

一个格也可以不用定义 1·7 来定义，而用性质 L_1 至 L_4 定义。对此，我們有下述定理。

定理 1·6

如果非空集合 L 上定义了两个二元运算。它們对 L 的任意二元都满足 L_1 — L_4，则 L 是格。(証明略)。

定理 1·7

两个格的笛卡儿积是格。广义地说，如果 A_1，A_2，……，A_n 是格，则笛卡儿积 $A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n$ 也是格。(証明略)

习　　题　　3

1．証明如果任一格满足两个分配律之一，则它必然也满足另一个分配律。

2．証明在任何格中均有

$$(a\cdot b)+(b\cdot c)+(c\cdot a)\leq(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$$

3．如果 P 是正整数集合，又如果对于所有的正整数 m，n，我們定义 m·n 为 m 与 n 的最大公約数，定义 m + n 为 m，n 的最小公倍数，証明 P 对于这两个运算为格。