

国家教委指定：全国中小学图书馆（室）必备书目

彩图中国青少年自然科学丛书

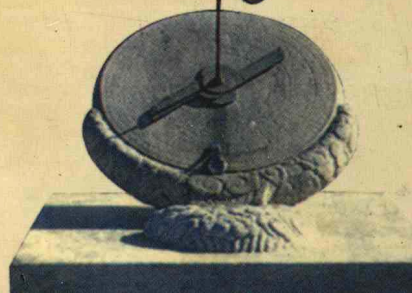
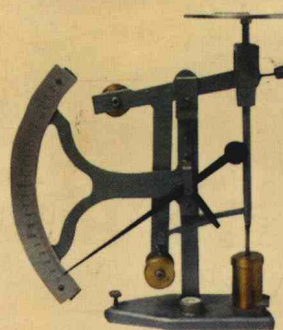
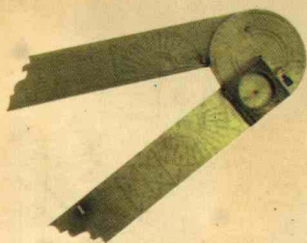
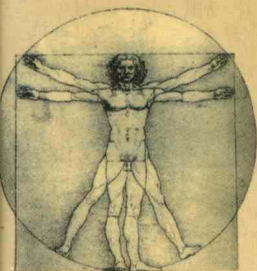
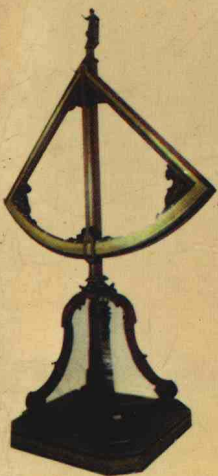
顾问 陈景润
主编 罗声雄

数学卷

CAITUZHONGGUO
QINGSHAONIAN
ZIRANKEXUECONGSHU

1

辽宁人民出版社



彩图中国青少年自然科学丛书

数 学 卷

主 编 罗声雄

撰 稿 人 李水生
潘温厉
罗声雄

辽宁人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学/罗声雄主编. —沈阳:辽宁人民出版社,1998.7
(彩图中国青少年自然科学丛书)
ISBN 7-205-03561-9

I. 数… II. 罗… III. 数学-普及读物 IV. 01-19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 03995 号

辽宁人民出版社出版
(沈阳市和平区北一马路 108 号 邮政编码 110001)
沈阳新华印刷厂印刷 辽宁省新华书店发行

开本:787×1092 毫米 1/16 字数:160 千字 印张:10 $\frac{1}{2}$ 插页:4

印数:1—10 000 册

1998 年 7 月第 1 版

1998 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑:邵连凯 于虹 王丽竹	责任校对:许振学
李春城 周琳	版式设计:赵多良
封面设计:杨勇	插图:杨丽珠 赵耀今

全套定价:420.00 元

勤奮學習
熱愛科學

宋健

一九九七年二月

知识就是力量
未来属于青年

周光吕

九七年二月廿七日

“彩图中国青少年自然科学丛书”

编 委 会

总 策 划:李春城

选题策划:张卫星 李春城

主 编:冯克正 郑利华 张卫星

主 任:李春城

副 主 任:过生如 于 虹 王丽竹 周 琳

编 委:(以姓氏笔画排列)

丁辰元	于 虹	王 军	王丽竹
冯克正	过生如	乔际平	何关福
张卫星	张其德	苏明义	杨 勇
邵连凯	李有浩	李春城	周 琳
郑利华	林亨国	林琬生	罗声雄
高 武	柏万良	梅多伦	

当代科学家献给未来

科学家的礼物(代前言)

青少年朋友们：

这部自然科学丛书是当代科学家写给你们——未来的科学家的一部科普读物，也是我国第一部由当代科学家撰稿、审订并配有大量彩图的大型科普读物。

我国五六十年代出版的《十万个为什么》作为一部优秀的科普读物，曾经培养了几代人，当代很多中青年科学家走上科学之路，就是从这里起步的，科学的启蒙何等重要！如今，给人类社会带来巨大变化的 20 世纪即将过去，新世纪的曙光已经依稀可见。人类即将跨进历史的新纪元。21 世纪将是一个科学技术更加突飞猛进的时代，人类将用自己的发明创造把这个世界装点得更加五光十色。广大青少年朋友可能已经意识到，当今人类社会的重要特征之一，是科学技术成为现代生产力中最活跃和决定性的因素，成为推动经济、社会发展的主导力量。科学技术人才作为科学技术的承载者，也就必然成为新世纪综合国力竞争的支撑点。科学技术的迅猛发展，必将导致国际竞争更趋激烈，一个国家和民族在竞争中取胜，并不仅仅取决于自然资源和经济实力，而更多的是依靠科学技术。说到底，综合国力的竞争，实质上是科学技术和人才的竞争。历史已经反复地证明，谁能拥有更多高素质的人才，创造和掌握最新的科学技术，并善于将科技知识转化为现实的生产力，谁就能在竞争中处于优势地位，并赢得竞争的胜利。我们的民族正面临这种新的历史的挑战。

青少年朋友们，你们是新世纪的主人，是民族的希望。我们的国家要在新世纪里再振雄风，再造辉煌的重任，就历史地落在你们的肩上。因此，你们不仅应该有对社会主义理想和信念的执著追求，而且要树立自信、自尊、自立、自强的精神，和勇于探索攀登科学高峰的意志。我们应该以当代世界

第一流的科学家为榜样。华罗庚、李四光、钱学森……都为祖国的科学事业、为人类的文明追求,贡献了毕生的心血;获得诺贝尔奖金的美籍华人科学家李政道、杨振宁、丁肇中、李远哲都被国际上公认为当代最杰出的科学家。西方学者认为,他们的辉煌成就证明,在“人类高度智慧阶层中,东方人、西方人具备着完全相同的创造能力”。从科学巨匠身上我们还看到,科学高峰人人可攀。被誉为近代最伟大的科学家之一,两度获得诺贝尔奖金的居里夫人,出身于贫苦家庭,为了读书,她曾当过女仆,甚至边工作边学习。她吃尽千辛万苦,在极端艰难凄苦的环境中把自己造就成为一代伟大的科学家。公认为物理学界有史以来最伟大的学者之一阿尔伯特·爱因斯坦,也是在坎坷不平的人生道路上顽强地学习,不懈地追求,才成为划时代的伟大学者的。国际上评价说“牛顿时代由爱因斯坦取而代之”了。让我们踏上巨人的肩膀,在新世纪里,为祖国的科学事业创造出更加辉煌壮丽的业绩来!更多地摘取科学王冠上的明珠!

青少年朋友们,当你们翻开这部书时,你们会发现,本书在科学上是具有权威性的,文字表达力求做到通俗生动。大量的彩色插图将成为你深入理解科学奥秘的重要手段。各卷中都有不少观察和实践的设计,你可以亲自动手,提高你的实践能力。

我们相信,这部书不仅会成为中小学生的的重要参考书,对于中学教师的相关课程教学也将有重要参考价值。对于广大青少年学习研究自然科学知识也将是良师益友。因此它还有重要的收藏价值。

最后应该告诉青少年朋友的是,参加这套丛书编写的都是各方面的学者、专家。这里有中国科学院的科学家、有高等院校的教授,还有一些研究部门的专家。他们把当今世界最先进的科学成就,以及他们个人的最新研究成果介绍给青少年朋友们。特别应该提到的还有一些著名的科学家、中国科学院院士担任各卷的顾问,关心和支持这套丛书的出版,他们献出了一片爱心,对青少年朋友成长寄予殷切的希望。所以,我提议青少年朋友们应该向他们深鞠一躬,表示敬意,并用实际行动来表示不辜负他们的期望。

编 者

1996年10月于北京

编 者 的 话

本书介绍一些数学概念和数学问题，编者企图通过这些概念和问题，反映数学的一般面貌。选择概念和问题的标准是：1. 重要性；2. 通俗性；3. 尽可能避免与中小学教材重复。因此，本书中的名词与解释不是全面的。

由于数学的抽象表现形式，使它不容易被公众，特别是青少年朋友所理解。其实，这不是数学的个性。数学是人们生活中最常见最常用的规律的符号表现形式，本应容易被公众接受。编者基于这种认识，向青少年朋友和不了解数学的人介绍古典的和现代和普通数学名词以及重大的数学问题，希望能引起读者的兴趣，进而下功夫去了解数学。这就是本书的目的。

编 者

目 录

当代科学家献给未来科 学家的礼物 (代前言) 编者的话

数学	(1)
数	(3)
自然数	(4)
数零	(5)
正数·负数	(5)
分数	(6)
小数	(7)
有理数·无理数	(8)
实数·虚数	(9)
复数	(9)
代数数和超越数	(10)
数的进制	(11)
二进制	(12)
算术	(12)
四则运算	(13)
整除	(13)
整数的分解	(14)
最大公约数	(15)
最小公倍数	(16)

比·比例	(16)
珠算	(17)
数论	(18)
素数	(18)
算术基本定理	(19)
费马数	(20)
梅森数	(20)
完全数	(21)
数论函数	(21)
同余	(22)
中国剩余定理	(23)
连分数	(24)
孪生素数猜想	(25)
哥德巴赫猜想	(25)
费马大定理	(25)
代数	(26)
运算和运算律	(27)
多项式	(28)
多项式运算	(29)
余式定理	(30)
综合除法	(30)
因式分解	(31)
托值多项式	(31)
根	(32)

三次方程	(33)
韦达定理	(34)
单位根	(35)
代数基本定理	(36)
群	(36)
环	(38)
域	(38)
行列式	(38)
线性方程组	(40)
高斯消元法	(40)
矩阵	(41)
部分分式	(42)
哥西不等式	(42)
哥西—西瓦茨不等式	(43)
切比雪夫不等式	(44)
几何学	(45)
欧几里得几何学	(46)
点·直线·平面	(46)
三角形	(47)
平行公理	(48)
非欧几里得几何	(49)

勾股定理	(49)	极限	(83)	连续统假设	(109)
长度	(51)	数 e	(84)	哥德尔不完全性定理	
面积	(52)	函数的极限	(85)		(109)
角度	(53)	极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	(85)	模糊数学	(110)
距离	(54)	连续函数	(86)	非标准分析	(110)
圆周率	(55)	微商	(87)	组合数学	(110)
等周问题	(56)	积分	(88)	组合数	(111)
圆幂定理	(56)	微积分学基本定理		二项定理	(112)
黄金分割	(57)		(90)	贾宪三角	(113)
九点圆	(58)	中值定理	(91)	幻方	(113)
正十七边形	(60)	极值	(92)	36个军官问题	(114)
四面体	(61)	凸函数	(94)	抽屉原理	(116)
祖暅原理	(63)	级数	(95)	母函数	(117)
正多面体	(64)	调和级数	(96)	递推关系	(118)
球	(65)	函数论	(97)	费波拉契数列	(119)
解析几何	(67)	变分法	(98)	四色问题	(121)
数轴	(67)	泛函分析	(99)	应用数学	(122)
坐标	(67)	微分方程	(99)	数学模型	(122)
坐标变换	(69)	数理逻辑	(100)	数学物理	(123)
向量	(70)	集合	(100)	计算数学	(124)
共线	(71)	集合运算	(101)	误差	(125)
圆锥曲线	(73)	布尔代数	(102)	迭代法	(125)
圆锥曲线方程	(74)	命题	(103)	概率论	(126)
拓扑学	(75)	证明	(103)	大数律	(127)
分析学	(76)	反证法	(104)	数学期望	(128)
微积分学	(76)	数学归纳法	(104)	二项分布	(128)
函数	(77)	公理	(105)	中心极限定理	(129)
指数函数	(79)	映射	(106)	信息论	(129)
对数函数	(81)	可数集	(107)	数理统计	(130)
三角函数	(82)			总体·样本	(130)

统计量	(130)	牛顿	(137)	国际数学奥林匹克	(144)
统计推断	(131)	高斯	(138)	国际数学联合会	(145)
最小二乘法	(131)	祖冲之	(138)	费尔兹奖	(145)
对策论	(132)	华罗庚	(139)	中国数学会	(145)
排队论	(133)	吴文俊	(140)	附录 中英文对照表	(147)
搜索论	(133)	陈景润	(141)	后记	(151)
库存论	(134)	陈省身	(141)		
图论	(134)	丘成桐	(142)		
控制理论	(136)	几何原本	(143)		
阿基米德	(136)	九章算术	(144)		

数学 数学是研究数量、图形、形式和变化的一门科学。

数学和语言一样，是人类社会最早产生的一种文化。为着交流，需要语言。为着交换，需要数数和丈量，于是产生了最原始的数学。经过漫长的历史演进，人类对数量和图形的知识日益丰富。大约在公元前几个世纪，出现了对数量关系和图形性质的系统研究，逐步形成了称之为数学的一个科学门类。

公元前 300 年左右，希腊数学家欧几里得，编著了巨著《几何原本》，汇集了已有的主要数学知识，并加以条理化，开创了对数学进行理性研究的新局面。在 16 世纪之前，在算术、代数、几何领域，已经积累了相当丰富的知识，特别是对素数的探索、对比值和无理数的认识、对代数方程和不定方程的求解方法、对二次曲线和曲面的分析、对面积和体积的巧妙计算等等，都达到很高的水平，以致人们难以把它们列入中学数学教程。这一时期，希腊、中国、印度、阿拉伯和埃及对数学有杰出的贡献。

17 世纪，在欧洲的工业革命和文艺复兴过程中，涌现出一大批数学家和数学成就，特别是笛卡尔建立的坐标系，把数和形结合起来，产生了解析几何学。牛顿和莱布尼茨创建的微积分学，使数学能够研究运动和变化，把数学推向一个崭新的阶段。18

世纪以来，借助解析几何与微积分这两个得力工具，分析学获得长足的进步，并出现一些独立的分支学科，如函数论和微分方程。19 世纪，高斯等人发现平行公理是不可证明的，是几何学乃至整个数学的一场革命，产生了各种非欧几里得几何。与此同时，英国学派也对代数学实施变革，他们把数和运算抽象化，研究集合和运算的代数结构，打开了现代抽象代数的闸门。特别是 19 世纪迦罗华开创的群论，对 20 世纪的数学产生了不可估量的影响。

19 世纪与 20 世纪之交，数学家们为了弥补微积分学的漏洞，建立了严格的实数理论，把整个数学大厦建立在坚固的自然数理论基础之上。与此同时，人们企图使各门数学理论在少数定义与公理的基础上，进行逻辑推理，使之成为一种纯逻辑的数学语言体系。这一时期的代表人物是德国数学家希尔伯特。他为欧氏几何建立了一个完整的公理化体系，并号召数学家们效仿。这位大师以“当代数学重要问题”的著名报告，给 19 世纪充满创新精神和严格精神的数学画了个圆满的句号，并为本世纪的数学提供了研究方向。

20 世纪以来，数学的面貌日新月异，新的更为抽象的领域不断涌现，应用数学的蓬勃发展，电子计算机的问世是当代数学新面貌的主要表

征. 数学朝着更抽象和更实际两个不同的方向发展, 遥相呼应, 相得益彰. 下面两个典型事例, 可谓 20 世纪最大的数学成就, 由此可以看出 20 世纪数学的特点.

一、哥德尔不完全性定理. 1931 年, 奥地利的 25 岁数学家哥德尔证明了: 任何形式系统存在不可判断的命题; 任何形式系统的无矛盾性不能在本系统获得证明. 从而摧毁了所有数学领域能够完全公理化的信念, 推翻了希尔伯特的公理化计划. 他还证明了连续统假设与集合论公理系统是不矛盾的, 并猜测否定该假设也不会导致矛盾. 后一结论于 1963 年被美国数学家科恩所证明. 这样, 连续统假设和平行公理也有类似的处境.

哥德尔与科恩的成就, 是数学理性文明的崇高表现.

二、电子计算机的问世. 1945 年数学家冯·诺依曼起草的报告“电子离散变量自动计算机”, 对电子计算机的设计起了决定性作用. 1946 年, 他又开创了程序设计与计算数学的新局面, 使人们能够利用电子计算机.

由于计算机性能的改进, 许多过去难以解决的问题, 例如微分方程的近似解, 巨大线性系统的解可以用电子计算机求得, 使数学在工程技术中发挥了重要作用, 同时刺激了计算数学的发展. 不仅如此, 计算机还帮助

人们解决了一些重大的数学问题. 1976 年, 美国人利用计算机, 对历史遗留的四色问题作了论证. 1993 年, 有人利用计算机证明了 $2^{756839} - 1$ 是素数. 人们还用计算机计算 π 的近似值达八百万位.

计算机科学反过来又给数学提出了许多难题, 例如可计算性问题、计算复杂性问题等.

电子计算机的问世及其对人类社会的影响是数学价值的最高体现.

由于数学反映自然界和现实世界普遍存在的规律, 它的理论与方法自然放之四海而皆准. 数学对科学技术、社会生产与社会生活有着巨大影响. 人们不能想象没有数学的世界将是什么局面. 数学对物理学、力学、工程技术、计算机科学、生命科学、经济学理论的建立起着不可估量的作用, 甚至在量子力学、相对论、电子计算机、信息科学、现代经济理论、DNA 复制、波传播理论出现之前, 数学家们已经为它们奠定了数学理论基础.

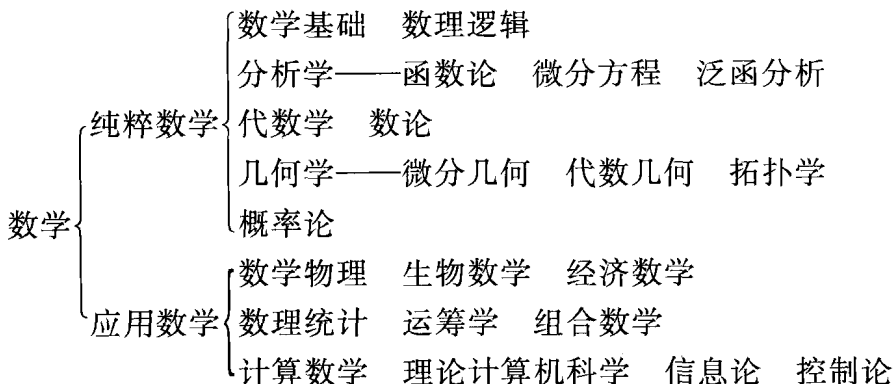
数学虽然具有广泛的应用性, 但真正用来解决实际问题, 还要有媒介, 那就是应用数学. 第二次世界大战以来, 应用数学发展迅速. 数学物理、数理统计、运筹学、计算数学、控制论、信息论、组合数学等应用数学学科在社会中发挥着日益重要的作用, 是数学的强大生力军.

数学和音乐一样，反映着自然界和现实世界的和谐与美。数学是一种有着丰富与深奥内涵的文化。数学和音乐一样，陶冶人的情操，培养人的思维能力和创造精神，应该受到人们的重视。

现在，20 世纪即将结束，国际

数学联合会正在总结本世纪的数学成就，并准备对 21 世纪的数学进行展望。届时将宣布 2000 年为世界数学年。毫无疑问，在新的世纪中国青少年将会成为世界数学中的一支生力军，使中国成为一个数学强国。

数学分类一览表



数 数的概念是随着人类的进步而演变的。

人类在史前时期就认识了自然数 1、2、3、4、…。祖先们用自然数数个数和排次序。自然数是制造其它一切数的原料。公元前 1700 年，古印度最早出现了分数。分数用来度量可以分割的物件。公元前 5 世纪，希腊数学家发现正方形的对角线与边长之比不是一个分数，引进了无理数。公元 1 世纪，

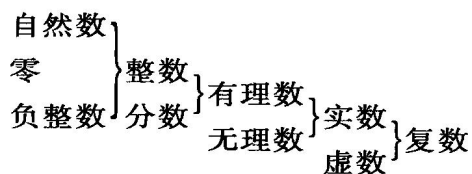
中国数学家在解一次方程时，率先引进了负数，从而有了完整的有理数体系。有理数和无理数统称为实数。虚数是欧洲人于 16 世纪为解二次方程引进的。但人们承认虚数是在 200 年以后。实数和虚数一起构成复数。19 世纪初，高斯给复数以几何解释后，人们才普遍接受它。

随着社会的进步，数的范围逐渐扩大。对数的认识逐步深化，特别是在 19 与 20 世纪之交，数学家们为实数建立了严格的理论，使整个数的大厦

建立在可靠的自然数理论基础之上.

时至今日,人类对数的认识远未完成,例如,对自然数中的素数研究,仍然是现代数学家们关心的课题.

数系是一种数字系统.常见的数系有自然数系、整数系、有理数系、实数系和复数系.它们之间的关系如下表:



自然数 自然数是人类最早认识的数.它是由数个数产生的.

一群牛、一窝鸟蛋、一排树木,它们的个体是不能分割的.“1”是它们的自然单位.以“1”为单位,可以逐一数它们的个数.譬如,原始人为了知道一群羊的只数,先伸出大拇指对准一只羊,再伸出食指对准另一只羊,又伸出中指对准下一只羊,如此继续,便知道了一群羊的只数.这里有两个要素:自然单位1和“+1”运算.先有1,每伸一个指头相当于

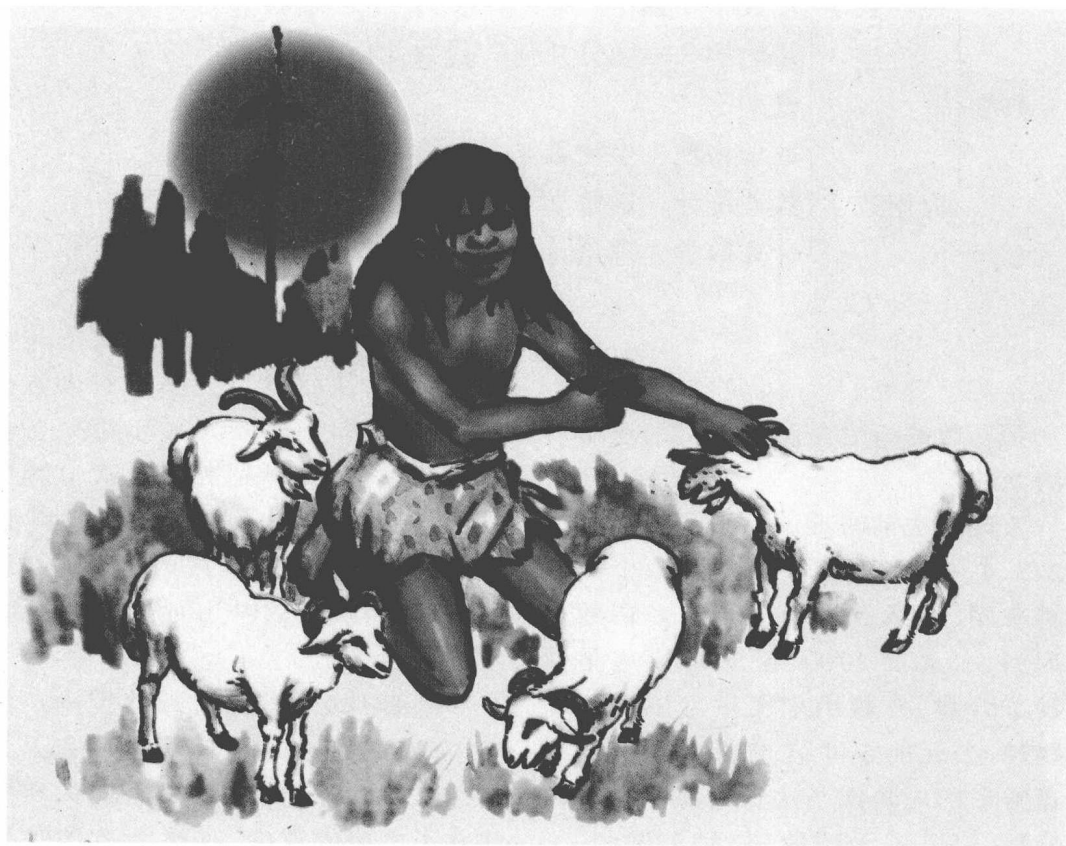


图1 原始人数个数

作了一次“+1”运算. 这样由1而2, 2而3, 继而得到4、5、6、…。这些自然界实际存在的数1、2、3、4、5、6、…称为自然数.

自然数是数学中最原始的概念, 本无需多作解释, 但到了19世纪末, 由于数学公理化运动的兴起, 数学家们用集合定义了自然数. 其实, 他们所做的只是把原始人上述数个数的过程用集合语言描述一番. 这种严格的描述成为数学的基础.

自然数有两大功能, 一是用来回答“多少个”的问题, 二是用来回答“第几个”的问题. 前者称为基数, 后者称为序数.

自然数是所有数的母体, 其它各种数都由其演变而来. 从解代数方程的需求可以看出自然数是如何派生其它数的.

设 a, b 是自然数, $x + a = b$ 总要有解. 这就要求把自然数扩大到整数. $ax = b (a \neq 0)$ 总要有解, 数系必须扩大到有理数, 但在有理数范围内, $x^2 = p$ (素数) 无解, 必须引进实数. 最后, $x^2 = -1$ 无解, 除非引进复数. 对于复系数代数方程, 因为它的解都在复数范围内, 再无需引进别的数了. 复数系完全满足社会生活的需要.

数零 数零表示无, 记号是0, 零不是自然数, 它比自然数出现得晚.

0的特征是:

(1) 对任何数 a , $a + 0 = 0 + a = a$.

(2) 对任何数 a , $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(3) 0是正数与负数的分界线. 若 $a < 0 < b$, 则 a 是负数, b 是正数.

在记数法中, 0起着举足轻重的作用. 0表示无, 但它所处的位置不同, 作用也完全不同. 例如, 在十进制中, 0.001和1000相差百万倍.

数学中最忌讳的是用0作除法. $a \div 0$ 永远没有意义. 如果在等式两边同时约去0, 会得出荒谬的结果. 在方程式两边同时约去可能为零的因式, 则可能丢根.

正数·负数 某人从某地出发, 向东行 $a (a \neq 0)$ 公里, 回头又向西行 b 公里, 正好回到原地, 总的效果等于原地不动. 列成算式便是:

$$a + b = 0.$$

如果将向东行定为正向, a 就是正数, b 就是负数了.

一般地说, 假设两数 a, b 之和为0, 则称 a 和 b 互为相反数. 如果称 a 为正数, 则称 b 为负数, 并记 b 为 $-a$, 于是

$$a + (-a) = 0.$$

自然数 n 和自然数之比 $\frac{m}{n}$ 分别称为正整数与正分数, 于是 $-n$ 和 $-\frac{m}{n}$