21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

GAODENG SHUXUE（下册）

主编　王金金

主审　李尚志

GAODENG SHUXUE

北京邮电大学出版社

www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

高等数学

（下册）

主　编　王金金
副主编　李广民　张卓奎　任春丽
主　审　李尚志

北京邮电大学出版社
·北京·

内　容　简　介

本书是作者近年来在建设“高等数学”精品课程的教学实践中，按照对课程体系、教学内容进行深入研究和改革的精神，根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合我国中学教育课程改革的实际情况，为适应我国各类高等学校“高等数学”课程的教学而编写的.

内容上以培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及分析和解决应用问题能力为主线，重要概念均通过实际背景引出，并以其几何意义和物理意义的对比再现其本质内涵. 定理、性质的原理在运用中以朴素的语言体现其逻辑性、严谨性，展现了从本质到现象的过程.

全书分上、下两册出版，下册内容包括：第 7 章，多元函数微分及其应用；第 8 章，重积分；第 9 章，曲线积分和曲面积分；第 10 章，无穷级数；第 11 章，微分方程. 书末附有习题答案.

本书通俗易懂，例题搭配合理，便于学生理解和掌握. 为了适应各类学时的学生使用，内容包括了工科类本科“高等数学”基本要求的全部内容，使用者可根据学时及专业需要适当取舍. 本书可作为各类普通高等学校工科“高等数学”课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/王金金主编. — 北京：北京邮电大学出版社，2010.3

ISBN 978-7-5635-2154-8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 033353 号

书　　名	高等数学(下册)
主　　编	王金金
责任编辑	苏文刚
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	16.5
字　　数	332 千字
版　　次	2010 年 3 月第 1 版　2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2154-8　　**定价：26.00 元**

如有质量问题请与发行部联系

前　言

高等数学是一门经典的学科，但随着社会的发展，它也是一门与时俱进的学科.它的发展反映了社会发展的需要.随着我国中学新课标的实施，高等数学中的基础知识开始普及化，由此对高等数学教学内容改革也提出了新的要求.为了适应这一新的要求，结合我国中学教育课程改革的实际情况，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在作者近年来建设“高等数学”精品课程的教学实践基础上编写了本书.

在编写过程中，特别注意了与中学数学教学的衔接，对中学数学已讲授过的内容(如集合、函数，向量的概念、坐标、数量积等)，在教材中有些只给出结论，有些可以不讲授；对中学数学中没有讲授的极坐标，在定积分应用中极为重要，做了一些补充，保持了教材的完整性.

全书分上、下两册出版，共11章.上册内容包括：第1章，函数、极限与连续；第2章，导数与微分；第3章，微分中值定理与导数的应用；第4章，不定积分；第5章，定积分；第6章，空间解析几何；下册内容包括：第7章，多元函数微分及其应用；第8章，重积分；第9章，曲线积分和曲面积分；第10章，无穷级数；第11章，微分方程.

教材中保持结构严谨，逻辑清晰，通俗易懂，例题合理分配，注重基础，同时加强应用，相对独立，便于取舍，适合高等院校工科类各专业学生使用.

作为高等院校理工科专业重要的基础理论课，本书旨在帮助学生达到高等院校对本课程的两个要求：一是为后继课程提供必需的基础数学知识；二是传授数学思想，培养学生的创新意识，逐步提高学生的数学素养、数学思维能力和应用数学的能力.

本书由王金金教授主编.其中第1、2章由王金金教授执笔，第4、8、9章由李广民教授执笔，第3、6、7章由任春丽副教授执笔，第5、10、11章由张卓奎副教授执笔.

西安电子科技大学刘三阳教授认真审阅了书稿.北京航空航天大学李尚志教授主审了本书，提出了许多宝贵意见.在此一并表示衷心的感谢.

本书在编写过程中得到西安电子科技大学理学院领导及从事“高等数学”教学的广大教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵意见，编者在此致以深深的谢意.

由于编者水平与经验有限，错误与不妥之处一定难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第7章

多元函数微分及其应用

在上册中，我们学习了一元函数的微分学. 但在实际应用中，往往需要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，便是一个变量依赖于多个变量的问题，由此引入了多元函数的微分学. 多元函数微分学是一元函数微分学的推广. 与一元函数微分学相比，多元函数微分学有许多性质和一元函数微分学相类似. 但从一元函数到多元函数有本质上的飞跃，而从二元函数到三元及三元以上的函数则只是技巧性的差别，无实质上的不同. 本章将以二元函数为背景，研究多元函数的极限与连续性、偏导数与全微分以及它们在具体问题中的某些应用.

第1节 多元函数的基本概念与极限

一、平面区域的概念

一元函数的定义域是数轴上的点集. 数轴上点的邻域、开区间与闭区间在讨论一元函数时都是至关重要的概念. 与此类似，为了讨论多元函数，我们需要把邻域和区间等概念加以推广. 首先将有关概念从数轴 $\mathbf{R}^1$ 中推广到二维平面 $\mathbf{R}^2$ 中，然后推广到一般的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中.

1. 平面点集

二维平面 $\mathbf{R}^2$ 上具有某种性质的点的集合，称为平面点集，记作

$$E = \{(x,y) \mid (x,y)\text{ 具有的性质}\}.$$

例如，$\mathbf{R}^2$ 上以坐标原点 $O(0,0)$ 为中心，r 为半径的圆内所有点 $P(x,y)$ 的集合为

$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}\text{或记成 } C = \{P \mid |OP| < r\}.$$

2. 邻域

(1) 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个定点，δ 为一个正数，则集合

$$\begin{aligned} U(P_0,\delta) &= \{P \mid |PP_0| < \delta\} \\ &= \left\{(x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\} \end{aligned}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域. 在几何上，$U(P_0,\delta)$ 是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、δ 为半径的

圆的内部.

不包含点 P_0 的邻域,称为 P_0 的去心邻域,记作$\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(P_0,\delta) &= \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\} \\ &= \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}.\end{aligned}$$

3. 区域

设 E 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个点集,P 是 $\mathbf{R}^2$ 中一点,则有:

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$,使得 $U(P) \subset E$,则称点 P 为 E 的内点(如图 7-1 中 P_1 为 E 的内点).

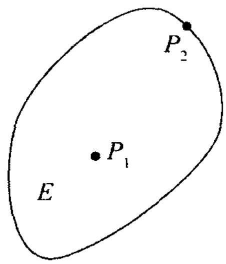

图 7-1

(2) 如果点集 E 内任意一点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**.

例如,集合 $E_1 = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$是开集;而集合 $E_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$不是开集.

(3) 如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的**边界点**(如图 7-1 中 P_2 为 E 的边界点). E 的边界点的全体称为 E 的**边界**,记作 ∂E.

例如,集合 E_1 的边界 $\partial E_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1$ 及点$(0,0)\}$;集合 E_2 的边界 $\partial E_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$. 可见,$E$ 的边界点可以属于 E,也可以不属于 E.

(4) 如果 P 的任何去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$ 内总含有 E 中的点,即对于任何 $\delta > 0$,$\mathring{U}(P,\delta) \cap E \neq \varnothing$,则称 P 为 E 的**聚点**.

例如,圆$\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ 上的点既是 $E_1 = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$的聚点,也是 $E_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$的聚点. 可见,点集 E 的聚点可以属于 E,也可以不属于 E.

(5) 如果点集 E 内的任何两点都可以用属于 E 中的折线连接起来,则称 E 是**连通集**.

(6) 连通的开集称为**开区域**或**区域**,通常记作 D. 例如

$$D_1 = \{(x,y) \mid x>0, y>0\},\ D_2 = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$$

都是开区域.

开区域连同它的边界一起,称为**闭区域**,通常记作 $\overline{D}$. 例如

$$\overline{D}_1 = \{(x,y) \mid x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\},\ \overline{D}_2 = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$$

都是闭区域.

(7) 对于点集 E,如果存在某一正数 K,使一切点 $P \in E$ 与坐标原点 O 间的距离 $|OP|$ 不超过 K,即

$$|OP| \leqslant K \quad 或 \quad E \subset U(O,K),$$

则称 E 为**有界集**;否则称为**无界集**. 例如 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$是有界闭区域,$\{(x,y) \mid x>0, y>0\}$是无界开区域.

4. n 维空间

我们知道,全体实数表示数轴上一切点的集合,即直线,记作 $\mathbf{R}$;全体有序二元数组 (x,y) 表示平面上一切点的集合,即平面,记作 $\mathbf{R}^2$;全体有序三元数组 (x,y,z) 表示空间一切点的集合,即空间,记作 $\mathbf{R}^3$. 一般地,有序 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合称为 **n 维空间**,记为 $\mathbf{R}^n$. 而每个有序的 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点,数 x_i 称为该点的第 i 个坐标.

n 维空间中 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 两点间的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

当 $n=1,2,3$ 时,上式分别为数轴、平面及空间中两点间的距离公式.

二维平面 $\mathbf{R}^2$ 中的一系列概念,可推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去. 例如,设 $P_0\in\mathbf{R}^n$,$\delta>0$,则 $\mathbf{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P\in\mathbf{R}^n\}.$$

以邻域为基础,可进一步定义 $\mathbf{R}^n$ 中集合的内点、边界点以及区域等一系列概念. 读者可自行写出.

二、多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中所涉及的函数往往依赖于两个或更多个自变量,下面举几个例子.

例 7.1.1　底半径为 r,高为 h 的正圆锥体的体积 V 和侧面积 S 分别为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h,\quad S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}.$$

这里,当 r 和 h 每取定一组值时,就有唯一确定的体积值 V 和侧面积值 S 与之对应,即 V 和 S 依赖于两个彼此独立的变量 r 和 h.

例 7.1.2　设长方体的边长分别为 x,y 和 z,则体积 V 为

$$V=xyz.$$

这里,V 依赖于三个彼此独立的变量 x,y 和 z.

例 7.1.3　电流所产生的热量 Q 与电压 U、电流 I 以及时间 t 的关系为

$$Q=UIt.$$

这里,Q 依赖于 U,I,t 的变化而变化.

从上述例子中即抽象出多元函数的概念.

定义 1　设有三个变量 x,y 和 z,D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个非空子集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$,变量 z 按照一定法则总有唯一确定的数值与之对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数),记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

或

$$z = f(P), \quad P \in D.$$

其中 x,y 称为自变量,z 称为函数(或因变量),点集 D 为函数的定义域.

当自变量 x,y 取定值 x_0,y_0 时,函数 z 对应的值 z_0 称为二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值,记作 $f(x_0,y_0)$,即 $z_0 = f(x_0,y_0)$. 函数值 $f(x,y)((x,y) \in D)$ 的全体所构成的集合称为该函数的值域,记作 $f(D)$,即

$$f(D) = \{z \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}.$$

注 z 是 x,y 的函数也可记为 $z = z(x,y)$,$z = \varphi(x,y)$,等等.

类似地,可以定义三元函数 $u = f(x,y,z)$ 及三元以上的函数. 如例7.1.2、例7.1.3中的体积 V、热量 Q 分别是变量 x,y,z 和变量 U,I,t 的三元函数. 当 $n \geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数,记作 $u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D$,或记作 $u = f(P)$,$P \in D$.

多元函数的定义域与一元函数相类似. 我们约定:由一个解析式表达的多元函数 $u = f(P)$ 的定义域是使得这个算式有意义的全体自变量所组成的集合;而由实际问题所确定的函数,还需要考虑使实际问题有意义. 如例 7.1.1 中正圆锥体的底圆半径 r,高 h 只能取正数.

例 7.1.4 求二元函数 $z = \ln(x + y)$ 的定义域.

解 函数 z 的定义域为 $x + y > 0$,即

$$D = \{(x,y) \mid x + y > 0\}.$$

这是一个无界开区域(如图 7-2).

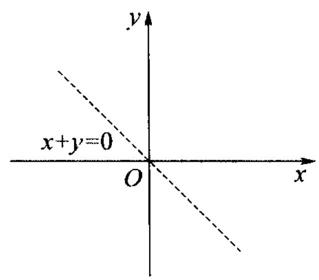

图 7-2

例 7.1.5 求函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ 的定义域.

解 函数 z 的定义域应满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0, \end{cases}$$

即
$$D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}.$$

这是一个有界区域(如图 7-3).

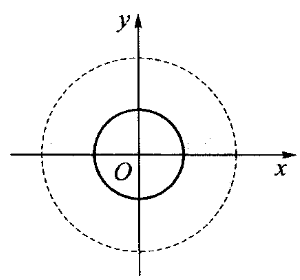

图 7-3

例 7.1.6 求 $f(x,y) = \dfrac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$ 的定义域.

解 解不等式组 $\begin{cases} |3 - x^2 - y^2| \leqslant 1, \\ x - y^2 > 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x > y^2. \end{cases}$

故函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D = \{(x,y) \mid 2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, x > y^2\}$.

二元函数的几何意义 设二元函数 $z = f(x,y)$ 的定义域为 D,点 $P(x,y)$ 为 D 中任意取定的点,对应的函数值为 $z = f(x,y)$,这样以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z = f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定唯一的点 $M(x,y,z)$. 当点 (x,y) 取遍 D 上的一切点时,得到一个空间点集

$$G = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y) \in D\}.$$

该点集形成的图形称为二元函数 $z = f(x,y)$ 的几何图形(如图 7 - 4).

通常,二元函数的图形是一张曲面,其定义域恰好是曲面在 xOy 平面上的投影区域.例如,函数 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的图形是球心在坐标原点、半径为 a 的上半球面,它的定义域是曲面在 xOy 平面上的投影区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$(如图 7 - 5);函数 $z = ax + by + c$ 的图形是一张平面,投影是二维平面 $\mathbf{R}^2$.

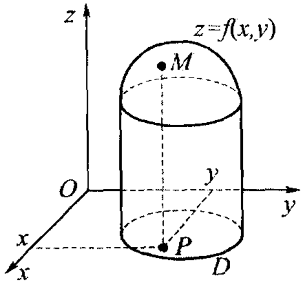

图 7 - 4

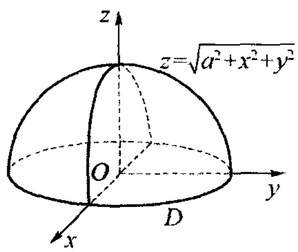

图 7 - 5

三、二元函数的极限与连续性

1. 二元函数的极限

研究函数的极限即是研究函数的变化趋势.对于二元函数 $z = f(x,y)$ 的极限,与一元函数的极限概念类似,如果当 xOy 平面上动点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向定点 $P_0(x_0,y_0)$(记作 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$)的过程中,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,我们就说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限.

为了确切地描述二元函数的极限,用"$\varepsilon - \delta$"语言给出这个极限的精确定义.

定义 2　设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义.如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x,y) \in D$,都有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

也可记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad (P_0, P \in \mathbf{R}^2).$$

通常把二元函数的极限也叫做二重极限.

例 7.1.7　设 $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 \neq 0)$,求证:$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0$.

证　因为 $\left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|=|xy|\cdot\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|\leqslant x^2+y^2$，所以，对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，总有

$$\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

例 7.1.8　证明：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证　因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant|y|$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|y|=0$，由夹逼定理可得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

注　(1) 二重极限存在，是指动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数值 $f(x,y)$ 都无限接近于同一个常数.

(2) 如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式或多种方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值，那么就可以断定函数的极限不存在. 例如，考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\[2mm] 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

显然，当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点(0,0) 时，

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,0)=0;$$

又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点(0,0) 时，

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{y\to0}f(0,y)=0.$$

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式趋于点(0,0) 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在并且相等，但是当点 $P(x,y)$ 沿着任意直线 $y=kx$ 趋于点(0,0) 时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然它随着 k 值的不同而改变，因此极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

(3) 关于二元函数极限的概念，可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 中去，记作 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A(P_0,P\in\mathbf{R}^n)$.

(4) 一元函数求极限的四则运算法则、复合函数求极限法则、夹逼准则，等等，都可以推

广到多元函数中.

例 7.1.9　计算下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y}$; (3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 2}y=1\cdot 2=2$(利用重要极限及四则运算法则).

(2) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\frac{1}{2}x^2y^2}{x^2y}=0$(等价无穷小代换).

(3) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^y=e^{\lim\limits_{y\to 0}y}=1$(重要极限).

2. 二元函数的连续性

类似于一元函数连续的定义,二元函数连续的定义如下:

定义 3　**设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义. 如果极限**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),\tag{7-1}$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续,或称 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的连续点;否则,称 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的间断点.

函数在一点连续的定义,也可以用增量形式给出. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,并设 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点,则称两点的函数值之差 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为函数在点 P_0 对应于自变量增量 $\Delta x,\Delta y$ 的全增量,记作 Δz,即

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

由此可得函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续的等价定义:

定义 3′　**设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义. 如果极限**

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,\tag{7-2}$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

若令 $x=x_0+\Delta x,y=y_0+\Delta y$,则式(7-2)等价于式(7-1).

定义 4　**如果函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域)D 内的每一点连续,那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续,或者称 $f(x,y)$ 是 D 内的连续函数.**

例如,函数 $z=\ln(x+y)$ 在定义域 $D=\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$ 内连续;函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在定义域 $D=\mathbf{R}^2$ 内除点 $O(0,0)$ 外连续,而点 $O(0,0)$ 是该函数

的间断点;函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周曲线 $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 上没有定义,所以圆周曲线 C 是该函数的间断线.

多元连续函数的性质 根据多元函数的极限运算法则,可以证明多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零处)均为连续函数;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数 由常数及不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则和复合运算,并用一个解析式子表示的函数称为**多元初等函数**. 例如,$\sin(x+y)$,$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$,$\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 都是多元初等函数.

根据上面所述,可以进一步得出结论:**一切多元初等函数在其定义区域(指包含在定义域内的区域)内都是连续的.**

由此可见,初等函数 $f(P)$ 在其定义域内任意点 P_0 处的极限值为 $f(P_0)$,即 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$.

例 7.1.10 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数,它的定义域为

$$D=\{(x,y)\,|\,x\neq0,y\neq0\}.$$

又 $D_1=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$ 是区域,且 $D_1\subset D$,所以 D_1 是函数 $f(x,y)$ 的一个定义区域. 而点 $P_0(1,2)\in D_1$,故 $f(x,y)$ 在点 P_0 连续,因而

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

四、有界闭区域上多元连续函数的性质

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质.

性质 1(有界性) **在有界闭区域 D 上的多元连续函数必有界.**

也就是说,若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则必定存在常数 $K>0$,使得对于一切 $P(x,y)\in D$,有 $|f(x,y)|\leqslant K$.

性质 2(最大值和最小值定理) **在有界闭区域 D 上的多元连续函数,必定在 D 上能取得最大值和最小值.**

也就是说,在 D 上至少有一点 $P_1(x_1,y_1)$ 及一点 $P_2(x_2,y_2)$,使得 $f(x_1,y_1)$ 为最大值 M,而 $f(x_2,y_2)$ 为最小值 m,即对于一切点 $P(x,y)\in D$,有 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$.

性质 3(介值定理) **在有界闭区域 D 上的多元连续函数,必取得介于函数最大值和最小值之间的任何值.**

也就是说，如果 μ 是 m 与 M 之间的任一常数（$m < \mu < M$），则至少存在一点 $(\xi,\eta) \in D$，使得 $f(\xi,\eta) = \mu$.

习题 7-1

1. 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

2. 已知函数 $f(x,y) = (x+y)^{x-y}$，求 $f(2,3)$，$f(x+y,y)$.

3. 已知 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x,y)$.

4. 求下列各函数的定义域，并画出定义域内的图形：

(1) $z = \ln(xy)$；

(2) $z = \dfrac{\arcsin(3 - x^2 - y^3)}{\sqrt{x - y^2}}$；

(3) $z = \ln(y - x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$；

(4) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$；

(5) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} (R > r > 0)$.

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{1 - xy}{x^2 + y^2}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x^2 y}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$.

6. 从 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,\dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{5}$，能否断定 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在？

7. 函数 $z = \dfrac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 在何处是间断的？

8. 证明：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x + y}{x - y}$ 不存在.