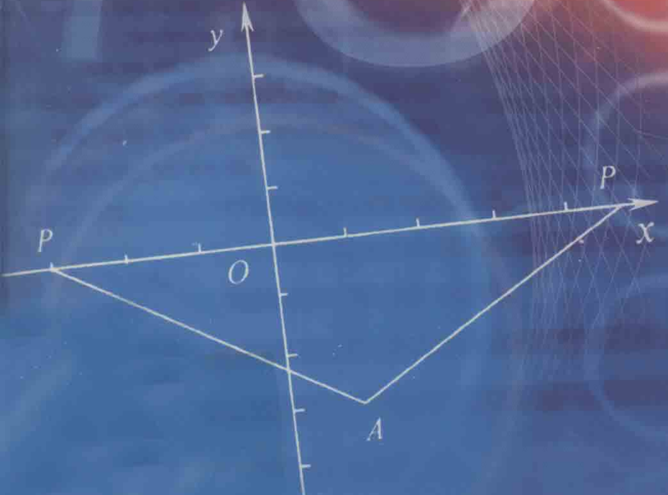
面向21世纪全国高职高专数学规划教材

五年制高职数学

wunianzhi gaozhi shuxue

（第2册）

吕保献 杨 辉 主 编
张新元 杨朝晖 副主编



$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材

五年制高职数学

（第2册）

吕保献 杨 辉 主编

张新元 杨朝晖 副主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高等职业技术学校的培养目标编写的。在内容编排上，删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

五年制高职数学教材分4册出版。第2册内容包括：直线方程，二次曲线，数列，排列、组合、二项式定理，立体几何等。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

图书在版编目（CIP）数据

五年制高职数学（第2册）/吕保献，杨辉主编．—北京：北京大学出版社，2005.7
（面向21世纪全国高职高专数学规划教材）
ISBN 7-301-08841-8

I. 五…　II. ①吕…②杨…　III. 高等数学—高等学校：技术学校－教材　IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第031077号

书　　名：五年制高职数学（第2册）
著作责任者：吕保献　杨辉　主编
责 任 编 辑：黄庆生　汉明
标 准 书 号：ISBN 7-301-08841-8/O・0641
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　11印张　238千字
2005年7月第1版　2005年7月第1次印刷
定　　价：16.00元

前　　言

为适应我国高等职业技术教育蓬勃发展的需要，加速教材建设步伐，我们受北京大学出版社的委托，根据教育部有关文件精神，考虑到高等职业技术院校基础课的教学，应以应用为目的，以“必需、够用”为度，并参照《五年制高职数学课程教学基本要求》，由高等职业技术院校中长期从事高职数学教学的资深教师编写本套教材。可供招收初中毕业生的五年制高职院校的学生使用。

本套数学教材是“面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高等职业技术学校的培养目标编写的，以降低理论、加强应用、注重基础、强化能力、适当更新、稳定体系为指导思想。在内容编排上，注重理论联系实际，注意由浅入深，由易到难，由具体到抽象，循序渐进，并兼顾体系，加强素质教育和能力方面的培养。删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

全套教材分四册出版。第 1 册内容包括：集合与不等式，函数，幂函数、指数函数与对数函数，三角函数，加法定理、正弦型曲线与复数等。第 2 册内容包括：直线方程，二次曲线，数列，排列、组合、二项式定理和立体几何等。第 3 册内容包括：极限与连续，导数、微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，空间解析几何，二元函数微积分初步，Mathematica 软件的应用（上）等。第 4 册内容包括：常微分方程，无穷级数，拉普拉斯变换，线性代数，概率论初步，数理统计初步，Mathematica 软件的应用（下）等。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

教材中每节后面配有一定数量的习题。每章后面的复习题分主、客观题两类，供复习巩固本章内容和习题课选用。书末附有习题答案供参考。

第 2 册由吕保献、杨辉担任主编，张新元、杨朝晖担任副主编，吕保献负责最后统稿。其中第 1 章由杨辉编写，第 2 章由崔宏宇编写，第 3 章由张新元编写，第 4 章由崔宏宇编写，第 5 章由杨辉编写。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请教师和读者批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2005 年 2 月

目 录

第1章　直 线 方 程

在初中代数里我们已经学习过，在平面直角坐标系内，可以用一对有序实数来表示平面上一点的位置，反之，对于任何一个有序实数对，在平面内都可以确定一个点．这里我们将进一步讨论用代数的方法来研究平面内的直线及直线的性质．本章先介绍两个重要公式，然后学习直线方程的概念及直线的有关性质．

1.1　一次函数与直线

1.1.1　两个重要公式

1．两点间的距离公式

A、B 两点间的距离记为$|AB|$，表示线段 AB 的长度．利用两点的坐标，就可将平面内两点间的距离求出．

在平面内，当 A、B 两点在数轴上时，如果它们的坐标分别是 x_1 和 x_2，那么不论这两点的相对位置如何，都有

$$|AB|=|x_2-x_1|,$$

如图 1-1，A 点坐标为 -2，B 点坐标为 3，则$|AB|=|3-(-2)|=5$，即 A、B 两点间的距离为 5．

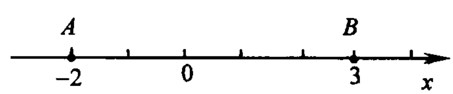


图 1-1

设 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 是平面内任意两点（图 1-2），从 P_1、P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1、P_1N_1 和 P_2M_2、P_2N_2，垂足分别是 $M_1(x_1,0)$、$N_1(0,y_1)$、$M_2(x_2,0)$、$N_2(0,y_2)$，并设直线 P_1N_1 和 P_2M_2 交于点 Q．则在直角三角形 P_1QP_2 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2,$$

因为

$$|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|,$$

所以

$$|P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2 .$$

由此得到**两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 间的距离公式**

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} . \tag{1-1}$$

例 1 已知点 P 在 x 轴上，它与点 $A(1,-3)$ 的距离等于 5．求点 P 的坐标．

解 设点 P 的坐标为 $(x,0)$，根据 $|AP|=5$，得

$$\sqrt{(x-1)^2+[0-(-3)]^2}=5 ,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+9}=5 ,$$

两边平方，得

$$(x-1)^2+9=25 ,$$

解得

$$x_1=5,\ x_2=-3 .$$

经检验，这两个值都是原方程的根．因此点 P 的坐标为 $(5,0)$ 或 $(-3,0)$，如图 1-3．

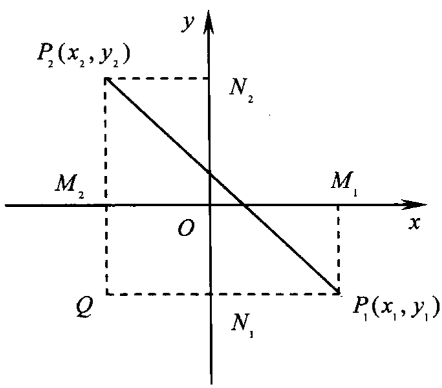


图 1-2

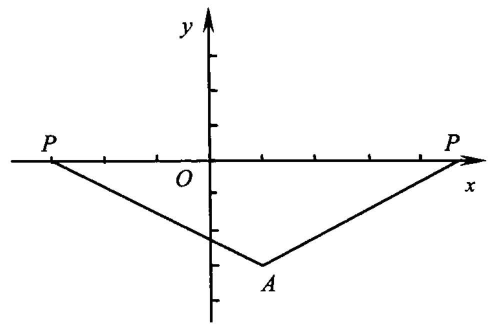


图 1-3

例 2 求证：以 $A(0,0)$、$B(3,1)$、$C(1,7)$ 为顶点的三角形是直角三角形．

证明 由两点间距离公式，得

$$|AB|^2=(3-0)^2+(1-0)^2=10 ,$$

$$|BC|^2=(1-3)^2+(7-1)^2=40 ,$$

$$|AC|^2=(1-0)^2+(7-0)^2=50 ,$$

于是

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2 .$$

所以，$\triangle ABC$ 是直角三角形，其中 $\angle B$ 是直角（如图 1-4）.

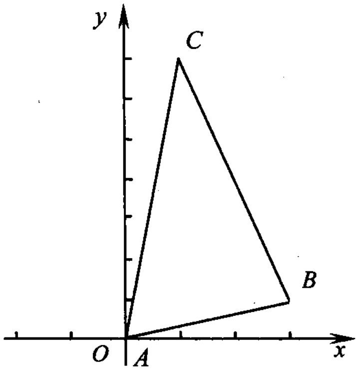


图 1-4

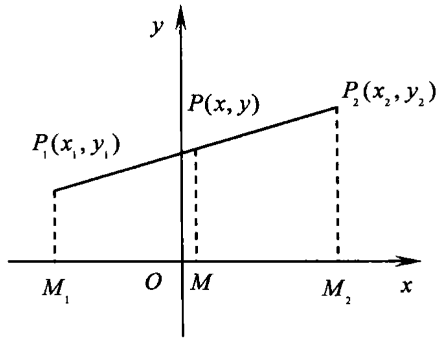


图 1-5

2. 线段的中点坐标公式

如图 1-5 所示，设线段 P_1P_2 的两个端点坐标分别是 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$ 为线段 P_1P_2 的中点，从 P_1、P 和 P_2 分别作 y 轴的平行线，交 x 轴于点 M_1、M 和 M_2．由平面图形的性质，得

$$|M_1M| = |MM_2|,$$

即

$$|x - x_1| = |x_2 - x|,$$

由图 1-5 可以知道

$$x - x_1 > 0,\quad x_2 - x > 0,$$

所以

$$x - x_1 = x_2 - x,$$

从而

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

同样，若从 P_1、P 和 P_2 分别作 x 轴的平行线，则

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

由此得到点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 之间所连线段的中点 P 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1-2}$$

上式称为线段 P_1P_2 的**中点坐标公式**.

例 3 已知线段 AB 的中点坐标是 $(-5,1)$，端点 A 的坐标是 $(-1,-3)$，求端点 B 的坐标.

解 设端点 B 的坐标为 (x,y)，由中点坐标公式，得

$$-5=\frac{-1+x}{2},\quad 1=\frac{-3+y}{2},$$

得

$$x=-9, y=5,$$

即端点 B 的坐标为 $(-9,5)$.

例 4 已知三角形的顶点是 $A(-2,-3)$、$B(4,-1)$、$C(-1,1)$，求此三角形两条中线 AD 和 CE 的长度（如图 1-6）.

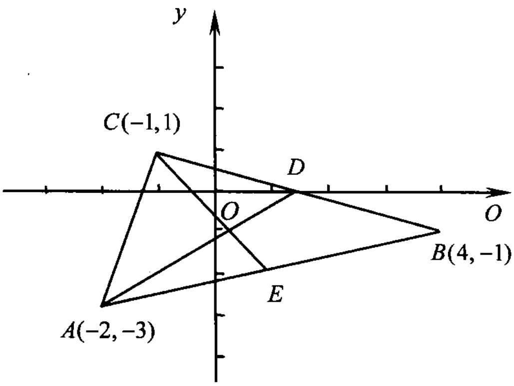


图 1-6

解 设 AB 的中点为 $E(x_1,y_1)$，BC 的中点为 $D(x_2,y_2)$，则由中点坐标公式，得

$$x_1=\frac{-2+4}{2}=1,\quad y_1=\frac{-3+(-1)}{2}=-2,$$

$$x_2=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2},\quad y_2=\frac{-1+1}{2}=0,$$

所以中点 E 的坐标为 $(1,-2)$，D 的坐标为 $(\frac{3}{2},0)$.

再根据两点间距离公式，可求得两条中线的长度分别为

$$|AD|=\sqrt{\left[\frac{3}{2}-(-2)\right]^2+\left[0-(-3)\right]^2}=\frac{1}{2}\sqrt{85},$$

$$|CE|=\sqrt{\left[1-(-1)\right]^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}.$$

1.1.2 直线方程

我们知道，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线，这条直线是以满足 $y=kx+b$ 的每一组 x、y 的值为坐标的点构成的.

例如，函数 $y=2x+1$ 的图像是直线 l（图 1-7）. 这时，以满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x、y 的值为坐标的点都在直线 l 上；反过来，直线 l 上每一点的坐标都满足函数式 $y=2x+1$.

如数对 $(0,1)$ 满足函数式 $y=2x+1$，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是 $(0,1)$；直线 l 上点 P 的坐标是 $(1,3)$，数对 $(1,3)$ 就满足函数式 $y=2x+1$.

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线，这个函数和直线之间具有关系：以满足函数 $y=kx+b$ 的每一组 x、y 的值为坐标的点都在直线上；直线上的任何点，它的坐标 (x,y) 都满足函数关系式 $y=kx+b$.

由于函数 $y=kx+b$ 也可以看成是一个关于 x、y 的二元一次方程，即 $kx-y+b=0$，因此这个方程和直线也具有下列关系：

（1）以方程 $kx-y+b=0$ 的每一组解 x、y 为坐标的点都在直线上；

（2）直线上的任何点的坐标都是方程 $kx-y+b=0$ 的解.

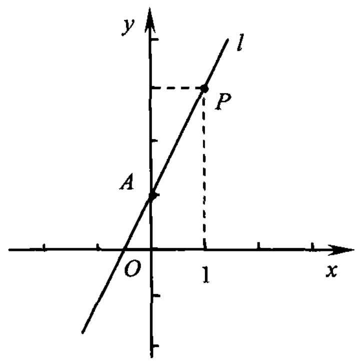


图 1-7

我们把满足上述条件的二元一次方程称为**直线的方程**，直线称为这个**方程的直线**.

利用直线与方程的这种关系，若已知直线的方程及某点的一个坐标，则可以求出直线上该点的另一个坐标，也可以验证某一点是否在直线上.

例 5　已知直线 l 的方程为 $2x-3y+6=0$.

（1）判断点 $P_1(-\frac{3}{2},1)$ 和 $P_2(2,-1)$ 是否在直线 l 上？

（2）求直线 l 与 x 轴交点的坐标；

（3）若点 $A(3,m)$ 在直线 l 上，求 m 的值.

解　（1）把点 $P_1(-\frac{3}{2},1)$ 的坐标代入方程 $2x-3y+6=0$，得

$$左边=2\times(-\frac{3}{2})-3\times1+6=0=右边,$$

所以，点 $P_1(-\frac{3}{2},1)$ 在直线 l 上.

把点 $P_2(2,-1)$ 的坐标代入方程 $2x-3y+6=0$，得

$$左边=2\times2-3\times(-1)+6=13\neq右边=0,$$

即方程两边不相等，
所以点 $P_2(2,-1)$ 不在直线 l 上.

（2）把直线与 x 轴交点的纵坐标 $y=0$ 代入方程 $2x-3y+6=0$，得

$$2x+6=0,$$
$$x=-3,$$

即直线与 x 轴的交点坐标为 $(-3,0)$.

（3）把点 $A(3,m)$ 代入方程 $2x-3y+6=0$，得

$$2\times3-3\times m+6=0,$$

所以

$$m=4.$$

1.1.3 直线的倾斜角斜率和截距

1. 直线的倾斜角

直线 l 向上的方向与 x 轴正方向所成的最小正角称为**直线 l 的倾斜角**. 如图 1-8 中的角 α_1 是直线 l_1 的倾斜角，角 α_2 是直线 l_2 的倾斜角.

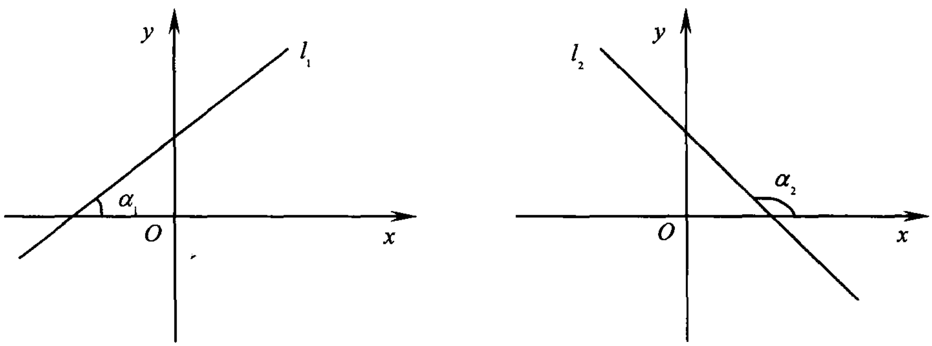


图 1-8

当直线与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 $0°$，当直线与 x 轴垂直时，它的倾斜角为 $90°$. 因此平面内任意一条直线都能确定惟一的倾斜角 α，α 的取值范围是 $0°\le\alpha<180°$（或 $0\le\alpha<\pi$）.

2. 直线的斜率

倾斜角不是 $90°$ 的直线，它的倾斜角的正切叫做这条**直线的斜率**. 直线的斜率常用 k 表示，即

$$k=\tan\alpha. \tag{1-3}$$

根据直线倾斜角的取值范围，直线的斜率有下面四种情形：

（1）当 $\alpha=0°$ 时（直线平行或重合于 x 轴），$k=\tan\alpha=0$；

（2）当 α 为锐角时，$k=\tan\alpha>0$；

（3）当 α 为钝角时，$k=\tan\alpha<0$；

（4）当 $\alpha=90°$ 时（直线垂直于 x 轴），因为 $\tan90°$ 不存在，所以斜率 k 不存在.

想一想：是不是所有的直线都有倾斜角？是不是所有直线都有斜率？

例 6　如图 1-9 所示，求直线 l 的倾斜角和斜率．

解　根据直线的倾斜角的概念，可得倾斜角为

$$\alpha = 180° - 45° = 135°,$$

斜率为

$$k = \tan 135° = -1 .$$

倾斜角不同的直线，其斜率也不同，我们常用斜率来表示倾斜角不等于 90° 的直线对于 x 轴的倾斜程度．

我们知道，两点确定一条直线，如果知道了直线上两点的坐标，那么，这条直线的斜率（只要它存在）就可以计算出来．

如图 1-10，设直线 l 上两点 P_1、P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，直线的倾斜角 $\alpha \neq 90°$（即 $x_1 \neq x_2$），从 P_1、P_2 两点分别作 x 轴的垂线 P_1M_1、P_2M_2，M_1、M_2 是垂足，再作 $P_1Q \perp P_2M_2$ 交 P_2M_2 于点 Q．

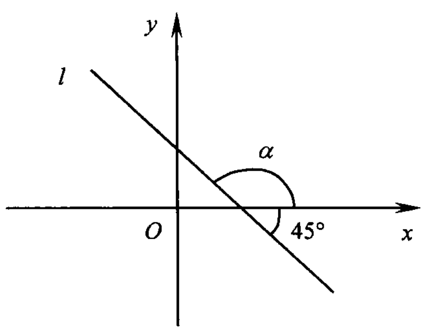


图 1-9

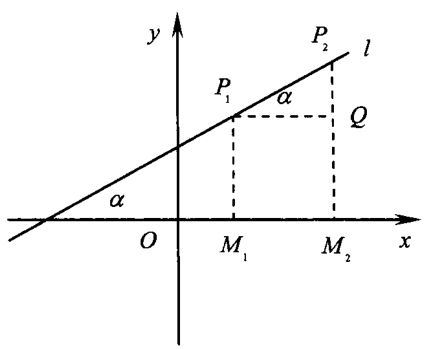


图 1-10

当直线 P_1P_2 的倾斜角 α 为锐角时，有

$$k = \tan\alpha = \tan\angle P_2P_1Q = \frac{|QP_2|}{|P_1Q|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

可以证明，当 α 为钝角时，以上结论也成立．

因此可知，经过 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 两点的直线的斜率公式为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2). \tag{1-4}$$

当 $x_1 = x_2$ 时，直线垂直于 x 轴，这时斜率不存在．

斜率 k 求得后，即可根据 $0° \leq \alpha < 180°$ 求出直线的倾斜角．

例7 求经过$A(-2,0)$、$B(-5,3)$两点的直线的斜率和倾斜角.

解 由公式1-4可得

$$k=\frac{3-0}{-5-(-2)}=-1,$$

即

$$\tan\alpha=-1,$$

因为

$$0^\circ\le\alpha<180^\circ,$$

所以

$$\alpha=135^\circ.$$

因此，这条直线的斜率是-1，倾斜角是135°.

例8 如图1-11，直线l_1的倾斜角$\alpha_1=30^\circ$，直线$l_2\perp l_1$，求l_1，l_2的斜率.

解 l_1的斜率

$$k_1=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因为l_2的倾斜角

$$\alpha_2=\alpha_1+90^\circ=30^\circ+90^\circ=120^\circ,$$

所以l_2的斜率

$$k_2=\tan120^\circ=-\sqrt{3}.$$

例9 求证：三点$A(1,-1)$，$B(9,5)$，$C(-3,-4)$在同一条直线上.

证明 设线段AB、AC所在直线的斜率分别是k_{AB}、k_{AC}，倾斜角分别是α_1、α_2，则由已知条件可得

$$k_{AB}=\frac{5-(-1)}{9-1}=\frac{3}{4},$$

$$k_{AC}=\frac{-4-(-1)}{-3-1}=\frac{3}{4},$$

所以

$$k_{AB}=k_{AC},$$

因此

$$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2,$$

而$0^\circ\le\alpha_1<180^\circ$，$0^\circ\le\alpha_2<180^\circ$，所以

$$\alpha_1=\alpha_2.$$

又因为它们经过同一点A，所以这两条直线重合，
也就是说A、B、C三点在同一条直线上.

3. 直线的截距

如果直线 l 和 x 轴交于点 $(a,0)$，与 y 轴交于点 $(0,b)$（图 1-12）. 那么数 a 叫做直线 l 的**横截距**（或叫做直线 l 在 x 轴上的截距），数 b 叫做直线 l 的**纵截距**（或叫做直线 l 在 y 轴上的截距）.

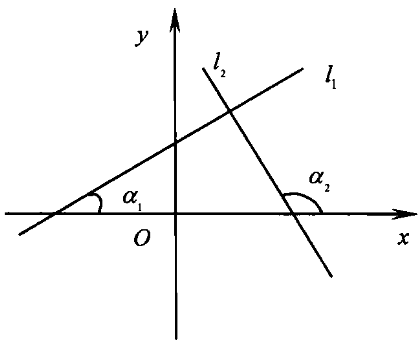


图 1-11

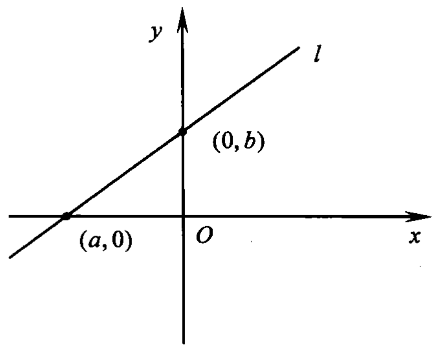


图 1-12

应当注意："截距"不是距离，也不是长度，它是可正可负，也可为零的任意实数.

如在直线 $3x-y+2=0$ 中，令 $x=0$，得

$$y=2,$$

令 $y=0$，得

$$x=-\frac{2}{3},$$

所以该直线的纵截距 $b=2$，横截距 $a=-\dfrac{2}{3}$.

平行于 x 轴的直线没有横截距，平行于 y 轴的直线没有纵截距，过原点的直线的横截距和纵截距均为零.

习　题 1-1

1. 求下列两点间的距离：

（1）$(-\frac{1}{2},1)$，$(-8\frac{1}{2},-3)$；　　（2）$(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$；

（3）$(ab^2,2abc)$, $(ac^2,0)$.

2.（1）已知点 $A(a,-5)$ 和 $B(0,10)$ 的距离是 17，求 a 的值.

（2）已知点 P 在 y 轴上，并且与点 $A(4,-6)$ 的距离是 5，求点 P 的坐标.

（3）求 x 轴上和点 $A(6,4)$、$B(5,-3)$ 距离相等的点的坐标.

3．求连结下列两点的线段的中点坐标：

（1）$(3,2)$，$(7,4)$；（2）$(-3,1)$，$(2,7)$；（3）$(2,8)$，$(0,-2)$．

4．连结两点 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 的线段的中点坐标是 $P(3,2)$，求 x、y．

5．已知三角形 ABC 的顶点为 $A(3,3)$，$B(-1,1)$，$C(0,3)$，求三角形 ABC 三条中线的长度．

6．已知直线 l 的方程为 $2x+y-3=0$，

（1）判断点 $M_1(\frac{1}{2},2)$ 和 $M_2(1,2)$ 是否在直线 l 上？

（2）求直线 l 与坐标轴交点的坐标．

7．根据下列条件，能否判定直线 AB 的斜率的正负．

（1）点 A 在第一象限，点 B 在第三象限；

（2）点 A 在第二象限，点 B 在第四象限；

（3）点 A 在第一象限，点 B 在第二象限．

8．求经过下列两点的直线的斜率和倾斜角，并画出图形．

（1）$A(0,0)$，$B(-1,\sqrt{3})$；（2）$C(0,-3)$，$D(4,-3)$；

（3）$M(-4,0)$，$N(-4,8)$；（4）$P(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$Q(-6,-5)$．

9．（1）当 m 为何值时，经过两点 $A(-m,6)$、$B(1,3m)$ 的直线的斜率是 12；

（2）当 m 为何值时，经过两点 $A(m,2)$、$B(-m,2m-1)$ 的直线的倾斜角是 $60°$．

10．设直线 AB 倾斜角等于由 $C(2,-2)$、$D(4,2)$ 两点所确定直线倾斜角的 2 倍，求直线 AB 的斜率．

11．判断下列各题中的三点是不是在同一条直线上．

（1）$A(0,-3)$，$B(-4,1)$，$C(1,-1)$；

（2）$A(a-b,c-a)$，$B(0,0)$，$C(b-a,a-c)$．

12．已知三点 $A(a,2)$、$B(5,1)$、$C(-4,2a)$ 在同一条直线上，试确定 a 的值．

13．求下列直线的横截距和纵截距：

（1）$2x+y-3=0$；（2）$y+3=0$；

（3）$x-2=0$．

1.2 直线方程

在平面内，要确定一条直线，必须具备两个独立的条件，从前面的学习知道，若给定了直线的斜率，就是给定了它的方向，但还不能确定直线的位置，还需再给一个条件．下面将讨论如何利用斜率和其他条件建立直线的方程．

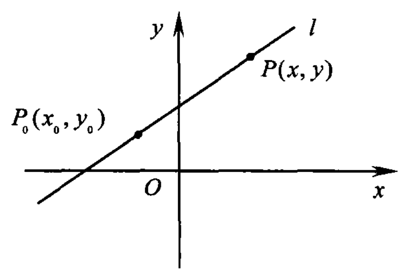


图 1-13

1.2.1 直线的点斜式方程

已知直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，斜率为 k，求直线 l 的