现代数学基础

# 19 偏微分方程

■ 孔德兴

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

19

# 偏微分方程

Pianweifen Fangcheng

■ 孔德兴

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书共分八章:第一章为绪论;第二、三章分别介绍了一阶方程、具有两个自变量的二阶方程的基本知识;第四、五、六章分别介绍了三类基本方程:波动方程、热传导方程和 Laplace 方程的定解问题的适定性、求解方法及解的性质;第七章主要介绍了一阶拟线性双曲守恒律方程组的一些基本知识;第八章介绍了 Cauchy - Kovalevskaya 定理。另有两个附录:Fourier 反演公式;Li - Yau 估计。本书不仅把注意力集中在传统的偏微分方程基础知识上,而且还有目的地介绍一些当代数学知识,譬如在几何分析中具有重要作用的 Li - Yau 估计和 Harnack 不等式等。本书的另一特点是,除在每节后面为读者准备了一些习题之外,还在一些章节后面为读者准备了一些思考题和“开放问题(open problem)”。这些问题具有一定的启发性,对提高学生对本门课程的学习兴趣有很大帮助。

本书可作为高等院校数学系学生的教材,也可供数学、力学和物理学等相关专业的工作者参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

偏微分方程/孔德兴编著.—北京:高等教育出版社,2010.9

ISBN 978 - 7 - 04 - 030448 - 0

Ⅰ.①偏… Ⅱ.①孔… Ⅲ.①偏微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 156953 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010 - 58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **咨询电话** | 400 - 810 - 0598 |
| **邮政编码** | 100120 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| | | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京中科印刷有限公司 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 787 × 1092　1/16 | **版　　次** | 2010 年 9 月第 1 版 |
| **印　　张** | 17.75 | **印　　次** | 2010 年 9 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 320 000 | **定　　价** | 45.30 元 |



**物料号 30448 - 00**

# 前　言

本书的前身是作者在浙江大学、上海交通大学讲授多次的“偏微分方程”课程讲义。本书是作者在长期从事“偏微分方程”、“数学物理方法”的教学实践的基础上, 结合自己的科研工作, 并参考先期出版的同类优秀书籍, 由原来的讲义经过修订、补充而成的。

众所周知, 偏微分方程已成为研究自然科学、工程技术以及经济管理等领域的各种实际课题的重要工具, 同时也是现代数学的一个重要分支。长期以来, 我们有一个愿望: 要编写一本适合当代教学特点的偏微分方程教材, 它既能融入一些现代数学的概念, 又表现得更加通俗易懂。编写这本书的目的是力图实现我们的上述愿望。在本书的编写过程中, 我们力求做到理论与实际相结合, 严密性与直观性相统一, 科学性与可读性相和谐。特别地, 在讲解基本理论和求解方法时, 力求突出处理问题的物理背景及其核心思想。

我们不仅把注意力集中在传统的偏微分方程基础知识上, 而且有目的地介绍一些当代数学概念: 一方面, 我们把传统偏微分方程知识讲得尽可能清楚些、透彻些, 把一些常见的数学模型推导得尽可能详细些、完整些; 另一方面, 我们还特别介绍了与本门课程紧密相关的一些当代数学基本知识, 譬如在几何分析中具有重要作用的 Li-Yau 估计 (也称 Li-Yau 不等式) 与 Harnack 不等式等。这方面的知识不仅可以看作传统偏微分方程的提升, 而且是当代前沿数学研究的基础, 它对提高同学们对这门课程的学习兴趣有很大帮助。本书的另外一个特点是, 在每节后面为读者准备了一些习题, 这部分习题可视为必做题, 除此之外, 在一些章节的后面还为读者准备了一些思考题和所谓的“开放问题 (open problem)” (譬如第四章后面的思考题“波动方程的两点边值问题”等), 这些问题具有一定的启发性, 主要是给那些对偏微分方程有兴趣而且学有余力的读

者准备的。本书配备的思考题和“开放问题”对进一步提高同学们对偏微分方程的学习积极性、有意识地培养和引导他们进入偏微分方程这一重要研究领域等方面均具有积极作用。在编写这本书的时候, 我们把本书的起点尽可能放低一些, 对所涉及的近代数学和力学知识尽可能做到自封, 只要读者具有数学分析、线性代数、常微分方程和一些泛函分析的知识, 就可以顺利阅读此书。

在本书的编写过程中, 我们参考了谷超豪教授等人编著的《数学物理方程》以及 F. John 教授编著的《偏微分方程》(中译本, 朱汝金译) 等优秀教材, 在此我们对这些作者及译者表示衷心的感谢。考虑到拟线性双曲守恒律方程组在当代偏微分方程理论研究中的重要性, 在本书的第七章我们简单介绍了关于拟线性双曲守恒律方程组的一些基本知识, 这部分内容来自姜礼尚教授等人编著的《应用偏微分方程讲义》的第五章。在本门课程的教学过程中, 我们得到了参加本课程学习的各位同学的大力支持, 借此机会对他们一并表示感谢。同时衷心感谢何春蕾博士、沈明博士, 她们仔细校对了书稿、并提出了许多宝贵的意见, 这些意见使得本书增色不少。感谢黄守军博士以负责任的态度和娴熟的技巧打印了部分书稿, 也感谢孙庆有博士在绘图方面给予的帮助。特别感谢美国佛罗里达大学的陈韵梅教授, 在本书的编写过程中提出了许多宝贵的建议。此外, 还要感谢关心我的老师们、同事们、朋友们和同学们, 感谢他们的大力支持与无私的帮助。本书的出版得到了高等教育出版社的王丽萍女士、李华英女士的大力支持和热心帮助，借此机会编者对她们认真负责的工作态度和辛勤的劳动表示衷心的感谢。

这本教材虽然用过多次, 但是限于作者的水平, 书中不妥之处、甚至错误在所难免, 恳请各位专家、同仁、读者惠予指正。

编　者

2009 年 8 月于杭州玉泉

# 目　录

# 第一章 绪 论

偏微分方程在数学、物理学、力学以及工程技术等学科中具有十分重要的作用，这些学科中的许多问题常常可以归纳为求解一个 (或一组) 偏微分方程的相应的定解问题. 在绪论中，我们简要介绍本书将要用到的一些常用符号和基本概念，给出一些重要的偏微分方程的例子，最后简单介绍一下本书的主要内容.

## §1 常用符号

惯穿本书的始终，我们用区域这个术语和符号 $\Omega$ 专门来表示实的 $n$ 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示区域 $\Omega$ 中的一个点,它的范数是 $|x|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，而点 $x$ 和点 $y$ 的内积是 $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$. 我们将讨论定义在 $\Omega$ 上的函数 $f$，用记号 $f\in C^k(\Omega)$ 表示 $f$ 为区域 $\Omega$ 上的 $k$ 次连续可微的函数. 在本书中，我们还用到 Hölder 连续的概念: 对定义在 $\Omega$ 上的函数 $h$，如果存在正常数 $K$ 使得

$$|h(x)-h(y)|\leqslant K|x-y|^{\lambda},\quad \forall\, x,y\in\Omega$$

成立，那么我们称函数 $h$ 是具有指数 $\lambda$ 的 Hölder 连续函数，其中 $\lambda\in(0,1]$ 是一给定的实数. 上式通常称为指数为 $\lambda$ 的 Hölder 条件.

如果 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是非负整数$\alpha_j$ 的一个 $n$ 重组，我们把 $\alpha$ 称为一个多重指标且用 $x^\alpha$ 来表示次数为 $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ 的单项式 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 类似地,

如果记 $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$, 则 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ 表示一个阶数为 $|\alpha|$ 的求导算子. 通常记 $D^{(0,\cdots,0)}u = u$. 如果 $\alpha$ 和 $\beta$ 是两个多重指标, 假如 $\alpha_i$ 和 $\beta_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 满足 $\alpha_i \geqslant \beta_i$, 那么我们称 $\alpha \geqslant \beta$, 此时 $\alpha - \beta$ 也是一个多重指标而且 $|\alpha - \beta| + |\beta| = |\alpha|$. 另外, 我们还记 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. 进一步, 如果 $\alpha \geqslant \beta$, 那么

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

设函数 $f$ 和 $g$ 是定义在点 $x$ 的一个邻域内的 $|\alpha|$ 次连续可微函数, 则通过直接验证可知

$$D^\alpha(fg)(x) = \sum_{\alpha \geqslant \beta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x). \tag{1.2}$$

如果 $G \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们用 $\bar{G}$ 表示 $G$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的闭包, 假设 $\bar{G} \subseteq \Omega$, 而且 $\bar{G}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 那么记为 $G \subset\subset \Omega$. 如果 $f$ 是定义在 $G$ 上的函数, 我们把

$$\mathrm{supp} f \triangleq \overline{\{x \in G |\ f(x) \neq 0\}} \tag{1.3}$$

定义为函数 $f$ 的支集. 如果 $\mathrm{supp} f \subset\subset \Omega$, 那么我们称 $f$ 在 $\Omega$ 中具有紧支集, 或者称 $f$ 是 $\Omega$ 上的具有紧支集的函数. 通常我们用记号 $\partial\Omega$ 来表示 $\Omega$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的边界, 即集合 $\bar{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$, 其中 $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n |\ x \notin \Omega\}$ 是 $\Omega$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的余集.

设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的分片光滑的闭曲面 $\Gamma$ 所围成的有界区域 (可以是单连通区域, 也可以是多连通区域), 而 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 是定义在 $\overline{\Omega} \triangleq \Omega \cup \Gamma$ 上的任意连续函数且在 $\Omega$ 内有连续的偏导数, 则成立

$$\iiint\limits_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint\limits_{\Gamma} (P\alpha_1 + Q\alpha_2 + R\alpha_3)\, dS, \tag{1.4}$$

其中 $dV$ 是体积微元,$dS$ 是曲面 $\Gamma$ 上的面积微元, 而

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\cos(n,x), \cos(n,y), \cos(n,z)), \tag{1.5}$$

这里 $n$ 表示 $\Gamma$ 的外法线方向.(1.4) 式通常称为 Green 公式 (详见第六章中的 3.1 小节).

## §2 基本概念

下面我们给出几个最基本的概念.

**定义 1.1** 关于函数 $u(x,y,\cdots)$ 的偏微分方程是指形如

$$F(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},\cdots)=0 \tag{2.1}$$

的关系式，其中 $F$ 是自变量 $x,y,\cdots$，未知函数 $u$ 以及 $u$ 的有限多个偏导数的已知函数.

**定义 1.2** 称函数 $u=u(x,y,\cdots)$ 是 (2.1) 的经典解，如果把 $u(x,y,\cdots)$ 及其相应的偏导数代入 (2.1) 式后，在 $x,y,\cdots$ 空间的某个区域 $\Omega$ 中 (2.1) 式关于这些变量恒成立.

**注记 1.1** 除非有相反的说明，在本课程中我们总是要求 $x,y,\cdots$ 是实的,$u$ 以及在方程 (2.1) 中出现的 $u$ 的偏导数在实空间的区域 $\Omega$ 中都是关于 $x,y,\cdots$ 的连续函数. 为了简单起见，我们有时也常常省略区域 $\Omega$ 的明确描述，而把所述的命题“局部地”适用于 $x,y,\cdots$ 空间中一点的某一适当邻域.

**注记 1.2** 作为经典解概念的推广，在现代偏微分方程理论中人们引入了“弱解”、“广义解”等概念，这些拓展的概念已经成为现代偏微分方程理论的重要研究对象.

涉及一个或几个未知函数及其偏导数的多个偏微分方程便组成一个偏微分方程组. 记 $n$ 为未知函数的个数,$m$ 为偏微分方程的个数，我们有下面的定义.

**定义 1.3** 当 $n>m$ 时，方程组称为欠定的；当 $n<m$ 时，方程组称为超定的；当 $n=m$ 时，方程组称为适定的.

**定义 1.4** 偏微分方程 ( 组 ) 的阶数是指方程 ( 组 ) 中出现的最高阶偏导数的阶数;偏微分方程 ( 组 ) 的维数是指自变量 $x,y,\cdots$ 的个数.

根据偏微分方程 (组) 包含未知函数及其偏导数的单项式，我们可以将偏微分方程 (组) 进行如下分类:

**定义 1.5** 偏微分方程称为线性的，如果它关于未知函数 $u$ 及其所有的偏导数是线性的，并且其系数仅依赖于自变量 $x,y,\cdots$；$m$ 阶的偏微分方程称为拟线性的，如果它关于未知函数 $u$ 的 $m$ 阶偏导数是线性的，并且其 $m$ 阶偏导数的系数仅依赖于 $x,y,\cdots$ 以及未知函数 $u$ 的阶数低于 $m$ 的偏导数；$m$ 阶的偏微分方程称为完全非线性的，如果它关于未知函数 $u$ 的 $m$ 阶偏导数是非线性的.

对偏微分方程组，我们有类似的定义. 根据上面的定义，线性、拟线性、完全非线性的偏微分方程之间的关系可由下图给出:

$$\text{偏微分方程}\begin{cases}\text{线性}\\ \text{非线性}\begin{cases}\text{拟线性}\\ \text{完全非线性}\end{cases}\end{cases}$$

**注记 1.3** 在很多的应用领域中, 许多问题可以归纳为线性或非线性的偏微分方程 ( 组 ), 譬如弦的小振幅振动可以用一线性的偏微分方程来描述, 而湍流等复杂现象往往用非线性的偏微分方程 ( 组 ) 来刻画.

## §3 一 些 例 子

偏微分方程 (组) 出现在数学、物理学以及工程技术中的各个分支中. 在许多场合, 有一个自变量代表时间, 通常用 $t$ 表示, 而其余的自变量记为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(特别地, 当 $n=3$ 时, 则记为 $x, y, z$), 表示 $n$ 维空间中的位置.

下面我们引入两个常用的符号:

**Laplace 算子**

$$\Delta \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \tag{3.1}$$

**波动算子**

$$\Box \triangleq \frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta. \tag{3.2}$$

**例 1** Laplace 方程 (又称调和方程)

$$\Delta u \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0. \tag{3.3}$$

它的解 $u$ 称为势函数或调和函数 (harmonic function).

**注记 1.4** 特别地, 当 $n=2$ 时, 记 $x_1=x, x_2=y$, 可以证明存在一个 "共轭" 调和函数 $v(x,y)$ 使得 $u$ 和 $v$ 一起满足下述 Cauchy-Riemann 一阶方程组

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x. \tag{3.4}$$

(3.4) 式的一对实解 $(u,v)$ 组成复变元 $z=x+iy$ 的解析函数

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y). \tag{3.5}$$

此外, 我们也可以把 $(u(x,y),-v(x,y))$ 看成无旋不可压缩流体的速度场.

**注记 1.5** 不可压缩无旋流的速度势、重力场、电场以及处于热平衡状态的温度分布场均满足 $n=3$ 时的方程 (3.3).

**例 2** 热传导方程.

当密度和比热都是常数时, 导热体中的温度分布满足热传导方程

$$u_t = k\Delta u, \tag{3.6}$$

其中 $k>0$ 是常数, 表示介质的热传导系数.

**例 3** 波动方程

$$u_{tt} = c^2\Delta u \quad (\ c>0\ \text{为常数}), \tag{3.7}$$

其中 $u=u(t,x_1,\cdots,x_n)$.

**注记 1.6** $n=1$ 的情形可以用来刻画弦的振动以及波在管中的传播等现象, 此时 $c$ 表示传播速度 ;$n=2$ 的情形可以用来描述浅水面上的水波 ; 而 $n=3$ 时 , 方程 (3.7) 可以用来刻画声波或光波的传播现象 .

**例 4** 弹性波方程组.

在经典弹性理论中, 弹性波可由线性方程组

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu\Delta u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}\ u) \quad (i=1,2,3) \tag{3.8}$$

描述, 其中 $u_i(t,x_1,x_2,x_3)$ 是位移向量 $u$ 的分量,$\rho$ 是密度, 而 $\lambda,\mu$ 是弹性材料的 Lame 常数. 可以证明, 每一个分量 $u_i$ 都满足由两个不同的波动算子所组成的四阶方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho}\Delta\right)u_i = 0. \tag{3.9}$$

当弹性平衡 (即 $u_t=0$) 时, 我们便得到重调和方程

$$\Delta^2 u = 0. \tag{3.10}$$

**例 5** Maxwell 方程.

在真空中且无自由电荷和电流的情况下, 关于电场强度向量 $E=(E_1,E_2,E_3)$ 及磁场强度向量 $H=(H_1,H_2,H_3)$ 的 Maxwell 方程实质上是由六个一阶方程所组成的线性方程组

$$\begin{cases} \varepsilon E_t = \mathrm{curl} H, \\ \mu H_t = -\mathrm{curl} E, \\ \mathrm{div} E = \mathrm{div} H = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $\varepsilon, \mu$ 是描述电磁介质的常数, 分别称为真空介电常数和磁导率. 特别地, 作为关系式

$$\varepsilon E_t = \mathrm{curl} H, \quad \mu H_t = -\mathrm{curl} E$$

的推论, 如果 $t=0$ 时, 关系式

$$\mathrm{div} E = \mathrm{div} H = 0$$

成立, 则上式对所有的 $t$ 均成立. 不难验证, 这里的每个分量 $E_i, H_k$ 均满足具有 $c^2 = 1/(\varepsilon\mu)$ 的波动方程 (3.7). 事实上, 在方程组中消去磁场强度便得到电场强度的偏微分方程: 这只需对 (3.11) 式中的第二式求旋度, 再用其第一式可得

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl} E) = -\mu(\mathrm{curl} H)_t = -\varepsilon\mu E_{tt},$$

又因为

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl} E) = \nabla(\mathrm{div} E) - \Delta E,$$

再利用 (3.11) 式中的第三式得到

$$E_{tt} = (\varepsilon\mu)^{-1}\Delta E.$$

类似地, 我们可以得到磁场强度向量 $H$ 所满足的偏微分方程.

**例 6** Schrödinger 方程.

在势能为 $V(x,y,z)$ 的场中, 运动的质量为 $m$ 的单个质点所满足的 Schrödinger 方程是

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi, \tag{3.12}$$

其中 $h = 2\pi\hbar$ 是 Planck 常数. 它是量子力学中的基本方程.

**例 7** Tricomi 方程

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{3.13}$$

Tricomi 方程在几何、流体力学等学科中有十分重要的应用. 另一类重要的方程是

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0. \tag{3.14}$$

上述方程通常称为 Keldysh 方程. 这两类方程在平面跨音速流的研究中均具有十分重要的作用. 具有形式

$$u_{xx} + (\mathrm{sgn}\, y)u_{yy} = 0 \tag{3.15}$$

的方程称为 Lavrentiev-Bitsadze 方程. 它与方程 (3.13)、(3.14) 密切相关, 同样具有重要的理论意义和应用价值.

上述例子中的方程都是线性的. 在自然科学以及工程技术中, 非线性方程也是常见的, 但是求解非线性方程更为困难, 因此在实际中常用线性方程近似地表示它们. 然而, 随着现代科学技术的飞速发展, 人们对偏微分方程理论的要求进一步提高, 对非线性偏微分方程的研究更加重视. 目前关于非线性偏微分方程的研究已经成为偏微分方程理论的研究主体, 甚至可以说, 非线性偏微分方程已经成为整个现代数学学科的主流研究方向之一. 下面是几个非线性方程的例子.

**例 8** 位势流方程.

密度为 $\rho$ 的二维定态绝热无旋等熵流的速度势 $u(x,y)$ (其速度分量为 $u_x$, $u_y$) 满足二阶拟线性方程

$$(1-c^{-2}u_x^2)u_{xx}-2c^{-2}u_xu_yu_{xy}+(1-c^{-2}u_y^2)u_{yy}=0, \tag{3.16}$$

其中 $c$ 是速率 $q=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$ 的已知函数. 例如, 对于状态方程为

$$p=A\rho^{\gamma} \tag{3.17}$$

的多方气体 (或称为 $\gamma$ 气体),

$$c^2=1-\frac{\gamma-1}{2}q^2. \tag{3.18}$$

上述方程通常称为位势流方程, 它在流体力学、特别是空气动力学中有十分重要的应用.

**例 9** 极小曲面方程.

3 维 Euclid 空间中的极小曲面 $z=\varphi(x,y)$, 即通过给定周线而具有最小面积的曲面, 满足二阶拟线性方程

$$(1+\varphi_y^2)\varphi_{xx}-2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+(1+\varphi_x^2)\varphi_{yy}=0. \tag{3.19}$$

上述方程称为极小曲面方程, 它在几何学、广义相对论以及工程技术中均有重要的应用.

**例 10** Minkowski 时空中的极值曲面方程.

$(1+n)$ 维 Minkowski 空间中的极值曲面 $x=x(t,\theta)\in\mathbb{R}^n$ 满足二阶拟线性方程

$$|x_\theta|^2x_{tt}-2\langle x_t,x_\theta\rangle x_{t\theta}+(|x_t|^2-1)x_{\theta\theta}=0. \tag{3.20}$$

上述方程通常称为空间中的极值曲面方程, 它在时空几何学、弦理论等学科中有重要的作用.