



现代通信信号处理丛书

信号检测与估计

——原理及应用

Detection and Estimation: Principles and Applications

|| 齐国清 编著 ||



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

现代通信信号处理丛书

信号检测与估计

—— 原理及应用

Detection and Estimation: Principles and Applications

齐国清 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

噪声背景中信号的检测与参数估计技术是雷达、声呐、通信等领域信号处理中的重要问题。本书系统地介绍了信号检测与参数估计的基本原理,结合作者本人的研究成果介绍了信号检测与估计在船舶导航雷达信号处理及正弦信号参数估计中的应用。主要包括:随机过程与噪声基本知识、信号检测理论、波形检测理论、信号参量估计基本理论、信号波形估计、信号检测与估计在船舶导航雷达中的应用、正弦信号频率估计技术等。部分章节在理论分析的基础上给出了计算机仿真实验结果及仿真程序,便于读者理解和应用。

本书可供雷达、声呐、通信、卫星导航及相关领域的工程技术人员参考,也可作为上述专业的研究生教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计:原理及应用/齐国清编著. —北京:电子工业出版社,2010.12

(现代通信信号处理丛书)

ISBN 978-7-121-12639-0

I. ①信… II. ①齐… III. ①信号检测 ②参数估计 IV. ①TN911.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第250929号

责任编辑:曲 昕

印 刷:北京东光印刷厂

装 订:三河市皇庄路通装订厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:21.5 字数:542千字

印 次:2010年12月第1次印刷

印 数:4 000册 定价:56.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

出版说明

随着通信技术的发展,特别是第三代移动通信技术的发展,宽带无线通信网、高速通信网、新一代信息网技术、光通信技术、个人通信技术和智能信息处理技术等已经进入了一个新的高速发展时期,对各种信号处理技术有了更高的要求。为了适应各种现代通信信息传输网络的技术要求,除了继续采用传统的数字信号处理技术外,还应在此基础上提出新的信号处理技术、算法和模型,以满足应用的需求。

随着通信智能化、大数据量、高速实时的多媒体应用需求的不断增多,处理信号的类型已经不仅仅局限于对常规数据的处理,还要处理大量的语音信号和视频信号等。这类信号的特点是数字化、宽频带、大数据量。信号处理技术在通信工程、电子信息工程、电子信息科学与技术、光信息科学与技术、测控技术与仪器、移动通信、无线通信、卫星通信、光通信、网络通信、智能信息系统以及多媒体通信等领域获得广泛的应用,已经成为应用工程的关键技术之一。目前,国内有关通信应用领域信号处理技术系列化的图书种类还非常匮乏,而市场对这方面的需求量又较大。因此,从这个角度出发,我们依托中国通信学会通信理论与信号处理专业委员会,在专业委员会专家、教授的大力支持下,组织出版一套面向 21 世纪的《现代通信信号处理丛书》。

这套丛书从我国现代通信信号处理技术应用现状与发展情况出发,以应用为中心,全面、系统地介绍了信号处理领域所涉及的有关关键技术与热点技术,如通信中的智能信号处理、通信中的阵列信号处理、通信中的自适应信号处理、通信中的光信号处理、超宽带技术、通信中的信号检测与估值、量子通信中的量子信号处理、网络信号处理和信号处理算法的实时 DSP 实现等内容。虽然所涉及的领域还不够全面,但我们会一直努力。在确保丛书质量的前提下,不断丰富,不断完善,力求内容的先进性、实用性和系统性,突出理论与应用实践的紧密结合,引导读者将信号处理的原理、技术与应用有机地结合,力争为读者奉献一套可读性与可操作性强的系列丛书。

这套丛书的主要读者对象,是广大从事通信信号处理技术工作的科技研发人员和工程技术人员,也适合高等院校相关学科各专业在校师生及刚刚走上工作岗位的毕业生阅读参考。

在编辑出版这套丛书的过程中,得到了中国通信学会通信理论与信号处理专业委员会的大力支持,参与编著和审定的各位专家都为此付出了大量的心血,可以说,没有他们的支持和帮助,就没有这套丛书的出版,对此,我们表示衷心的感谢。希望广大读者对这套丛书提出宝贵意见和建议,以便今后我们加以改进,为广大读者奉献更多、更好的优秀通信类图书。

联系信箱: wchn@phei.com.cn。

电子工业出版社
通信出版分社

前 言

噪声背景中的信号检测及信号参数或波形估计，也称为统计信号处理或随机信号处理，是雷达、数字通信以及卫星导航等领域的系统设计和性能分析的重要理论基础和工具，并在声呐、自动控制、数字图像处理以及振动信号处理、生物信号处理等领域得到广泛应用。

本书是在作者多年讲授“信号检测与估计”、“维纳滤波器与卡尔曼滤波器”、“船舶导航雷达信息处理”等研究生课程的基础上，参考国内外有关著作和教材，并根据多年在船舶导航雷达、通信、数字图像处理等领域的研究成果而撰写的。

本书第 1~5 章为信号检测与估计的基本原理，第 6~8 章介绍这些基本原理在通信、雷达和数字图像处理等领域的应用。

第 1 章在介绍随机过程基本知识的基础上，对噪声分析进行了重点介绍，包括白噪声的采样及信噪比的计算、白噪声的希尔伯特变换以及高斯白噪声序列的离散傅里叶变换等。计算机仿真技术在通信、雷达等领域的应用越来越普遍，第 1 章最后对蒙特卡洛模拟与重要采样原理进行了介绍。

第 2 章介绍经典信号检测理论，包括二元假设检验问题的常用判决准则、多元信号的检测以及复合假设检验等。

第 3 章介绍波形检测理论，主要内容包括高斯白噪声中二元确知信号检测、匹配滤波器理论以及高斯白噪声中随机参量二元信号检测等。本章结合 2PSK 信号对最佳二元通信系统接收机与实际相干接收机的性能进行了分析和对比，对最佳接收机和匹配滤波器进行了仿真实验。

第 4 章介绍信号参量估计的基本理论，包括基于贝叶斯估计理论的最大后验估计和最大似然估计原理、计量的性质，以及常用的两种线性估计方法——线性均方估计和最小二乘估计等。

第 5 章介绍信号波形估计理论，即维纳滤波器和卡尔曼滤波器，并通过一个仿真实例详细介绍了非因果维纳滤波器、因果维纳滤波器以及离散维纳滤波器的设计过程，通过仿真实验结果对上述几种维纳滤波器的性能进行了分析。

第 6 章介绍信号检测与参数估计技术在船舶导航雷达杂波处理、目标检测中的应用以及卡尔曼滤波器在雷达运动目标跟踪中的应用。

通信、导航、雷达和振动信号处理等领域经常涉及正弦信号参数估计问题。由于直接求正弦信号参数的最大似然估计算法复杂，不利于实时信号处理，工程实践中需要正弦信号参数的高精度、快速估计算法。本书第 7 章首先对正弦信号频率估计的时域方法和频域方法进行了详细的讨论，并通过理论分析和计算机仿真实验对各种方法的性能进行了分析和比较；然后介绍了正弦信号参数估计在 FMCW 液位测量雷达中的应用；最后对正弦信号参数估计的方差下限进行了研究。

第8章结合图像恢复和信道均衡，介绍维纳滤波器在逆滤波问题中的应用。

全书在理论分析的基础上，给出了部分章节内容的计算机仿真实验结果和仿真程序，便于读者参考；仿真程序源代码可从华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）免费注册后下载使用。

本书的编写得到“大连海事大学研究生教育教学改革研究课题和研究生创新课程建设项目(2009YK04)”的资助，作者对此表示感谢。

大连海事大学邹坤老师和硕士研究生臧晓蕾同学完成了本书部分书稿的录入工作，在此一并表示感谢。

书中引用了很多学者的论著和论文的内容，作者向他们表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编著者

目 录

第 1 章 随机过程与噪声基本知识	1
1.1 引言	1
1.2 随机变量的基本知识	1
1.2.1 随机事件与概率	1
1.2.2 随机变量的分布函数	2
1.2.3 随机变量的统计特征	6
1.2.4 多维高斯分布随机变量	8
1.2.5 随机变量函数的概率密度函数	8
1.3 随机过程的基本知识	9
1.3.1 随机过程的概念	9
1.3.2 随机过程的分布函数	9
1.3.3 随机过程的数字特征	9
1.3.4 随机过程的平稳性和遍历性	12
1.3.5 平稳随机过程的功率谱密度	14
1.3.6 平稳随机过程通过线性系统的输出	15
1.4 高斯过程与白噪声	16
1.4.1 高斯过程	17
1.4.2 白噪声	18
1.5 窄带高斯过程	20
1.5.1 希尔伯特变换与解析过程	20
1.5.2 窄带随机过程	24
1.6 白噪声的采样及信噪比的计算	29
1.7 白噪声的希尔伯特变换	32
1.7.1 理想实白噪声过程的希尔伯特变换	32
1.7.2 带限白噪声的希尔伯特变换	33
1.8 高斯白噪声序列的离散傅里叶变换	35
1.9 蒙特卡洛模拟与重要采样	36
1.9.1 蒙特卡洛试验原理	36
1.9.2 随机数的产生	39
1.9.3 重要采样原理	42
参考文献	48

第 2 章 信号检测理论	49
2.1 引言	49
2.2 二元假设检验及判决准则	49
2.2.1 二元假设检验基本概念	49
2.2.2 贝叶斯准则	50
2.2.3 最小总错误概率准则	54
2.2.4 最大后验概率准则	55
2.2.5 极大极小化准则	58
2.2.6 奈曼—皮尔逊准则	59
2.3 多元信号的检测	61
2.3.1 贝叶斯准则	61
2.3.2 最大后验概率准则	62
2.3.3 最大似然函数准则	63
2.4 复合假设检验	64
参考文献	73
第 3 章 波形检测理论	74
3.1 引言	74
3.2 高斯白噪声中二元确知信号的检测	74
3.2.1 二元通信系统	74
3.2.2 最佳二元通信系统接收机检测性能	76
3.2.3 最佳二元通信系统接收机与实际接收机的对比	79
3.2.4 最佳接收机的仿真	81
3.2.5 ASK 信号的自相关接收	84
3.3 匹配滤波器理论	86
3.3.1 输出信噪比最大的线性滤波器	86
3.3.2 白噪声背景下的匹配滤波器	88
3.3.3 色噪声背景下的匹配滤波器	89
3.3.4 相关接收机与匹配滤波器的比较	91
3.3.5 匹配滤波器仿真	93
3.4 高斯白噪声中随机参量二元信号的检测	95
3.4.1 高斯白噪声中随机相位 2ASK 信号的检测	95
3.4.2 高斯白噪声中随机相位和随机幅度 2ASK 信号的检测	99
3.4.3 雷达系统检测性能及计算机仿真	101
参考文献	103
第 4 章 信号参量估计基本理论	105
4.1 引言	105

4.2	贝叶斯估计	106
4.2.1	最小均方误差估计	107
4.2.2	条件中位数估计	107
4.2.3	最大后验估计	108
4.3	最大似然估计	109
4.4	估计量的性质	109
4.4.1	无偏性	109
4.4.2	有效性	110
4.4.3	一致性	110
4.4.4	估计量均方误差的 Cramer-Rao 下限	110
4.4.5	多参量联合估计的性能	122
4.5	线性均方估计	125
4.5.1	单参量线性最小均方估计	126
4.5.2	多参量线性最小均方估计	128
4.6	最小二乘估计	129
4.6.1	线性最小二乘估计	130
4.6.2	加权线性最小二乘估计	131
	参考文献	132
第 5 章	信号波形估计	133
5.1	引言	133
5.2	维纳滤波器原理	134
5.2.1	最佳线性滤波器	134
5.2.2	维纳—霍夫方程	135
5.2.3	非因果系统维纳—霍夫方程的求解	135
5.2.4	因果系统维纳—霍夫方程的求解	136
5.2.5	离散时间系统的维纳滤波器	140
5.3	维纳滤波器仿真实例	142
5.3.1	信号模型	142
5.3.2	非因果维纳滤波器的系统函数和冲激响应	144
5.3.3	因果维纳滤波器的系统函数和冲激响应	144
5.3.4	因果维纳预测滤波器的系统函数和冲激响应	146
5.3.5	因果维纳平滑滤波器的系统函数和冲激响应	147
5.3.6	离散维纳滤波器的时域解	151
5.3.7	仿真实验结果	153
5.4	卡尔曼滤波器	157
5.4.1	离散线性系统的数学模型	158
5.4.2	正交投影定理	161

5.4.3 卡尔曼滤波方程	163
5.4.4 卡尔曼滤波的计算过程	167
5.4.5 离散卡尔曼滤波器的特点	168
5.4.6 标量卡尔曼滤波器	169
参考文献	171

第 6 章 信号检测与估计在船舶导航雷达中的应用 172

6.1 引言	172
6.2 船舶导航雷达杂波 CFAR 处理	172
6.2.1 雷达杂波及分布	172
6.2.2 恒虚警率检测原理	173
6.2.3 恒虚警率损失	175
6.2.4 CA-CFAR 检测器	179
6.2.5 CA-CFAR 检测器存在的问题及其改进	181
6.2.6 对数正态 CFAR 检测器	185
6.3 船舶导航雷达信号积累检测	188
6.3.1 积累检测原理	190
6.3.2 滑窗检测器	191
6.3.3 反馈积累检测器	192
6.4 船舶导航雷达运动目标跟踪	193
6.4.1 基于 α - β 滤波器的雷达运动目标跟踪	194
6.4.2 基于卡尔曼滤波器的雷达运动目标跟踪	200
6.4.3 卡尔曼滤波器与 α - β 滤波器对比	205
6.4.4 航迹相关与航迹外推	208
参考文献	209

第 7 章 正弦信号频率估计技术 211

7.1 引言	211
7.2 复正弦信号参数的 ML 估计及方差下限	213
7.2.1 复正弦信号参数的最大似然估计	213
7.2.2 复正弦信号参数估计的 Cramer-Rao 方差下限	216
7.2.3 频率估计的信噪比阈值效应	217
7.3 基于瞬时相位的频率和初相估计方法	219
7.4 基于相位差的频率估计方法	222
7.4.1 Kay 方法	222
7.4.2 L-W 方法	231
7.5 基于相关函数相位的频率估计方法	232
7.5.1 L-R-P 方法	232

7.5.2 L-R 方法	237
7.5.3 Fitz 方法	245
7.6 基于相关函数相位差的频率估计方法	251
7.7 基于 DFT 相位的频率和初相估计方法	257
7.7.1 单一正弦信号的 DFT 及频率粗估计	257
7.7.2 利用 DFT 相位估计频率和初相的原理	258
7.7.3 利用 DFT 相位估计频率和初相的精度分析	259
7.7.4 信号中间点相位的估计	262
7.8 DFT 幅度插值法频率估计原理及精度分析	265
7.8.1 Rife-Jane 方法频率估计原理	265
7.8.2 Rife-Jane 方法频率估计精度分析	266
7.8.3 Quinn 频率估计方法	271
7.9 FMCW 液位测量雷达测距原理	274
7.9.1 FMCW 雷达信号	274
7.9.2 FMCW 雷达距离估计的方差下限	275
7.9.3 FMCW 雷达距离测量原理	276
7.9.4 FMCW 雷达距离测量精度分析	279
7.10 离散实正弦信号参数的 ML 估计及 Cramer Rao 方差下限	281
7.10.1 离散实正弦信号参数估计的 Cramer Rao 方差下限	281
7.10.2 实正弦信号序列参数的 ML 估计	284
7.10.3 加窗对实正弦信号频谱泄漏的抑制作用	285
参考文献	287
第 8 章 维纳滤波器在逆滤波问题中的应用	289
8.1 逆滤波问题	289
8.2 维纳滤波器在图像复原中的应用	291
8.3 维纳滤波器在信道均衡中的应用	294
参考文献	299
附录 A	300
附录 A.1 利用重要采样技术计算标准正态分布 $Q(Y)$ 的 Matlab 程序	300
附录 A.2 二元调制最佳接收机的 Matlab 仿真程序	302
附录 A.3 匹配滤波器对正弦信号的响应的 Matlab 仿真程序	305
附录 A.4 雷达信号检测的 Matlab 仿真程序	307
附录 A.5 维纳滤波器的 Matlab 仿真程序	311
附录 A.6 雷达运动目标跟踪 α - β 滤波和 Kalman 滤波的 C 程序	316
附录 A.7 复正弦信号频率频率估计的 Matlab 程序	325

第 1 章 随机过程与噪声基本知识

1.1 引言

客观世界中有些事情的结果是确定的，树上的苹果掉下来肯定要落到地下（假设中间没有障碍物）。俗语“种瓜得瓜，种豆得豆”说的也是这个道理。这样的现象是确定性现象或称为必然现象。另外一些事情的结果却无法事先确定。例如，投一枚硬币落地后是正面朝上还是反面朝上，明天下午 9 时某大学校园是否会下雨等，都是事先无法准确知道的，正所谓“天有不测风云”。这类现象称为随机现象。确定性现象的因果关系可以用函数来明确表示。例如，一个电阻器的阻值为 R ，通过该电阻的瞬时电流为 $i(t)$ ，则电阻上的瞬时压降为 $u(t)=R \cdot i(t)$ 。随机现象的结果虽然不能事先确定，但其结果也并非毫无规律可言。由常理可知，一枚普通硬币落地时正面和反面出现的可能性一样大，一枚普通色子掷出后数字 1 到 6 出现的可能性也是一样的。如果改变色子的内部结构使其重心偏移，则可以使某些数字出现的可能性增大（或减小）。虽然事先无法准确知道某个特定时刻某地是否会下雨，但是现代科学技术已经可以做到比较准确地对一定范围的天气进行短期预报。由此可见，随机现象的结果也是有一定规律的。

为什么像日食这样复杂的现象（至少在普通百姓看来如此）可以准确地事先预测，如 2009 年 7 月 22 日发生在我国长江流域的日全食，实际发生的时间与事先预测的分秒不差，而像刮风下雨这些现象却无法准确预测？导致日食发生的天体（太阳、地球、月球）的运动规律虽然复杂，但是人类已经完全掌握；而在投硬币试验和刮风下雨这些看起来很简单现象中，影响最后结果的因素却是非常复杂的，众多因素当中某一个因素的细微变化都有可能使结果发生变化。因此百分之百准确地预测其结果几乎是不可能的。

由此可见，第一，由于随机现象结果的不确定性，不能用描述确定现象的方法来描述随机现象；第二，随机现象也是有一定规律的，因此也是可以用数学方法来描述的。但是，与确定事件不同的是，随机现象的规律需要多次反复地试验才能表现出来。例如，投掷硬币次数越多，正面和反面出现的频率越接近。概率论及随机过程理论就是研究随机现象的数学工具。

一个现象究竟是随机的还是确知的并不完全由事物本身决定，而是由人对客观世界的认识能力决定的。例如，利用现代科学技术可以准确预测的日食等天文现象对远古人类来说是无法事先准确预测的。如果在一个小的完全密封的环境中模拟一个地球的环境，温度、湿度、振动等因素均可严格控制，则刮风下雨也有可能做到准确预测。

1.2 随机变量的基本知识

1.2.1 随机事件与概率

1) 随机试验与事件

对自然现象进行观察或一次观测称为试验。可以在相同条件下重复、每次试验之前

不能事先预测结果的试验称为随机试验，通常用符号 E 表示。某一次随机试验的具体结果事先无法确定，但其全部可能出现的结果是确知的。随机试验的每一个可能的结果称为随机事件或事件。不能再进一步分割的最简单的随机事件称为基本事件。不能同时发生的事件为互不相容事件。事件 A 与事件 B 至少有一个发生称为 A 与 B 的和，记为 $A \cup B$ 。事件 A 与事件 B 同时发生称为 A 与 B 的积，记为 $A \cap B$ 。随机试验的所有可能结果（全部基本事件）的集合称为样本空间，通常用符号 Ω 表示。样本空间包含了全体事件，所以也称为必然事件。

2) 概率

虽然随机试验每一次的结果是不可预测的，但是通过多次试验可以发现每个事件出现的可能性是有一定规律的。概率就是描述随机事件出现的可能性大小的量。概率具有如下性质。

设 A 为随机事件， $P(A)$ 为事件 A 发生的概率，则有：

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 设 $A_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 为互不相容随机事件，则

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

3) 条件概率与独立性

设 A 和 B 是两个随机试验，且 $P(B) \neq 0$ ，则在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率定义为

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1.2.1)$$

其中， $P(AB) = P(A \cap B)$ 表示 A 和 B 同时发生的概率，称为联合概率。条件概率的样本空间比联合概率的样本空间小。一般情况下， $P(A/B) > P(AB)$ 。

根据式(1.2.1)可得到事件 A 和事件 B 同时发生的概率的计算公式， $P(AB) = P(A/B)P(B)$ 。该式也称为概率的乘法公式。

4) 事件的独立性

如果一个事件的发生对另一个事件发生的概率没有影响(反之亦然)，即 $P(A/B) = P(A)$ 和 $P(B/A) = P(B)$ ，则称两个事件是独立的。对于独立事件 A 和 B 有

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (1.2.2)$$

式(1.2.2)虽作为独立事件的定义，但在实际当中很难用其判断两个事件是否独立，因为在 A 和 B 不独立的情况下，求 $P(AB)$ 是很困难的。

1.2.2 随机变量的分布函数

1. 随机变量及其分布函数

为了对随机试验的结果进行量化研究，本文引入随机变量的概念。若用一个量来描述前面讨论的掷色子、投硬币等试验的结果，则这样的量与普通意义的变量不同，其取值具有随机性，称为随机变量。像掷色子、投硬币试验等取值可以逐一列举的随机变量

称为离散型随机变量；可能的取值占满一个连续区间的随机变量称为连续型随机变量。

随机变量的取值虽然不能事先确定，但其取值是有规律的。对于（有限个取值的）离散型随机变量可以列出随机变量取每个值的概率。例如，投硬币试验，正面和反面出现的概率均为 0.5， $P(\text{正面}) = P(\text{反面}) = 0.5$ 。而对于连续型随机变量则无法列出取每个值的概率。为此，通常用分布函数来描述随机变量的取值规律。

设 ξ 为随机变量， x 为任意实数， ξ 的取值不大于 x 的概率，即

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} \quad (1.2.3)$$

称为随机变量 ξ 的分布函数。由分布函数的定义和概率的性质，很容易看出 $F(x)$ 具有下列性质：

- (1) $F(x)$ 是一个不减函数；
- (2) $0 \leq F(x) \leq 1$ 。

2. 连续型随机变量的概率密度函数

为了用类似离散随机变量概率分布的方式描述连续型随机变量的取值规律，定义概率密度函数。

设 $F(x)$ 为 ξ 的分布函数， $f(x)$ 为非负函数，且对于任意实数 x ，满足

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (1.2.4)$$

则称 $f(x)$ 为连续型随机变 ξ 的概率密度函数。根据概率密度函数的定义及分布函数的性质可知，概率密度函数具有下列基本性质：

- (1) $f(x) \geq 0$ ；
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$ 。

另外，若 $f(x)$ 处处连续，则有

$$f(x) = F'(x) \quad (1.2.5)$$

有些文献习惯用 $p(x)$ 表示概率密度函数。有时为了强调是某个特定随机变量的概率密度函数，采用脚标的方式，例如， $f_{\xi}(x)$ 和 $f_{\zeta}(x)$ 分别表示 ξ 和 ζ 的概率密度函数。文献中有时用英文 “probability density function” 的缩写 pdf 表示概率密度函数。

3. 常用概率分布函数

1) 均匀分布

若随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

则称 ξ 服从 $[a, b]$ 区间上的均匀分布。由分布函数的定义，可得均匀分布变量的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (1.2.7)$$

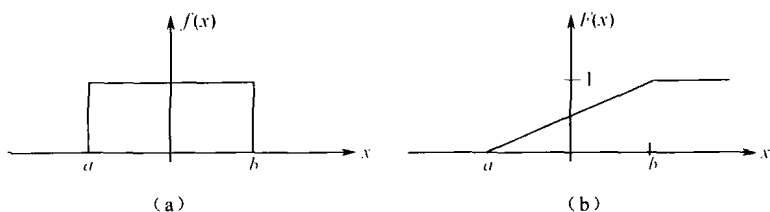


图 1.2.1 均匀分布概率密度函数 (a) 及分布函数 (b)

模数转换器的量化噪声一般用均匀分布来描述。

2) 正态分布

若随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.2.8)$$

则称 ξ 服从均值为 μ , 方差为 σ^2 的正态分布, 也称为高斯分布 (见图 1.2.2), 记作 $N(\mu, \sigma^2)$ 。
 $\mu=0, \sigma^2=1$ 的正态分布称为标准正态分布, 记作 $N(0, 1)$ 。

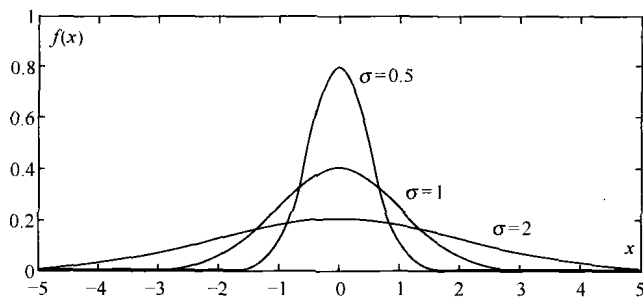


图 1.2.2 不同方差的正态分布概率密度函数 ($\mu=0$)

正态分布的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \quad (1.2.9)$$

标准正态分布的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (1.2.10)$$

式 (1.2.10) 称为正态概率积分, 并记为 $\Phi(x)$ 。

与正态概率积分有关的两个常用的特殊函数分别为误差函数

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (1.2.11)$$

和补误差函数

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) \quad (1.2.12)$$

在通信系统中分析数字调制的错误率时经常用到误差函数和补误差函数。Matlab 中提供了计算误差函数和补误差函数的函数 `erf()` 和 `erfc()`。

正态概率积分和补误差函数的关系为

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.2.13)$$

根据式 (1.2.13) 可以利用补误差函数来计算正态概率积分。

正态分布是一种重要分布，在通信、雷达、导航及信号处理领域经常用来描述各种噪声。正态分布具有很多有用的性质，后面将具体介绍。另外，多个独立的非正态分布随机变量之和有趋于正态分布的趋势。从图 1.2.3 可以大概看出正态分布函数和误差函数的变化规律及两者之间的关系。

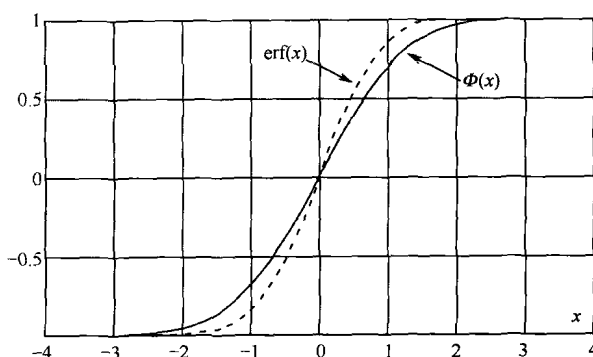


图 1.2.3 正态分布函数与误差函数

3) 瑞利分布

服从正态分布的调幅噪声经过包络检波之后服从瑞利分布，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.2.14)$$

瑞利分布在通信中用来描述信道特性，雷达视频信号中的杂波和噪声也经常用瑞利分布来描述。瑞利分布概率密度函数 ($\sigma=0.5, 1, 2$) 如图 1.2.4 所示。

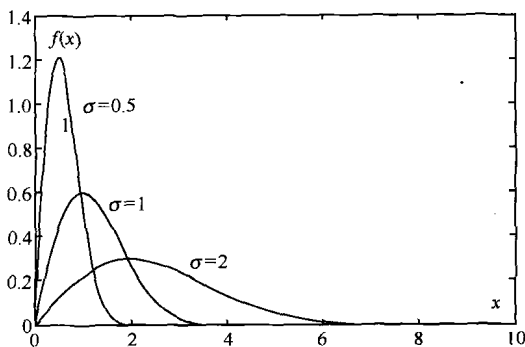


图 1.2.4 瑞利分布概率密度函数 ($\sigma=0.5, 1, 2$)

4. 二维随机变量

前面介绍的是单个随机变量及其分布函数，在实际当中有时需要用多个随机变量对多个观测量进行描述。常用的是两个随机变量的情况。例如，卫星定位系统中需要用两个随机变量分别来描述纬度和经度方向的定位误差。这里仅简单介绍二维随机变量及其

分布函数。

设 ξ, ζ 均为随机变量, (ξ, ζ) 称为二维随机变量。 $F(x, y) = P(\xi \leq x, \zeta \leq y)$ 称为 (ξ, ζ) 的联合分布函数。 $F_{\xi}(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$ 和 $F_{\zeta}(y) = F(\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$ 称为边缘 (边沿) 分布函数。

对于连续型的二维随机变量, 若对于任意实数 x 和 y , 存在二元函数 $f(x, y)$, 满足

$$(1) f(x, y) \geq 0;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

$$(3) F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy。$$

则称 $f(x, y)$ 为 (ξ, ζ) 的二维联合概率密度函数。

$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ 和 $f_{\zeta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ 称为边缘概率密度函数, 即 ξ 和 ζ 各自的概率密度函数。

类似随机事件的定义, 若 $f(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\zeta}(y)$, 则称随机变量 ξ 和 ζ 相互统计独立。

1.2.3 随机变量的统计特征

随机变量的分布函数或概率密度函数完整地描述了随机变量的统计特性。但在实际问题中有时很难获得随机变量的分布函数, 或者没必要知道随机变量的全部统计特性, 只需要其部分特征。随机变量的数字特征就是用来描述随机变量特征的一些数值。下面仅介绍连续型随机变量的数字特征, 离散型随机变量的数字特征见文献[1~3]。

1) 数学期望

设 ξ 为连续型随机变量, 其概率密度函数为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ 收敛, 则称

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (1.2.15)$$

为随机变量 ξ 的数学期望, 也称为均值。有时也用 $\bar{\xi}$ 表示 ξ 的均值。

2) 方差

数学期望描述了随机变量取值的统计平均情况, 但均值相同的两个随机变量还可能有很大的差别。图 1.2.5 所示为两个正态分布随机变量的 100 个样本值的记录, 两个随机变量的均值都等于 5, 但很明显, 它们的样本值的发散程度不同。方差就是描述随机变量的在其均值周围发散程度的度量。

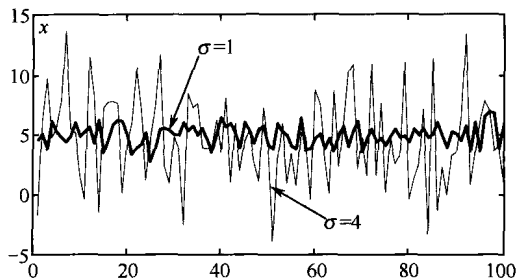


图 1.2.5 不同方差的正态分布随机变量的样本值 ($\mu=5$)