



写给中学生看的
大通数学书

数学

玛奇朵

维尔纳·
传神



YZLI 0890092971



上海科技教育出版社

维尔纳·蒂基·库斯滕马歇尔等 著

传神 翻译

写给中学生看的卡



YZLI 0890092971

数学 玛奇朵

图书在版编目(CIP)数据

数学玛奇朵/(德)蒂基等著;传神译.—上海:上海
科技教育出版社,2010.12

ISBN 879-7-5428-5139-0

I. ①数… II. ①蒂… ②传… III. ①数学课—高
中—课外读物 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第238868号

目 录

前 言	1
在我们真正开始之前……	
第1章 数	7
轻松起步	
第2章 变量、算子和表达式	25
皆有章法	
第3章 几何	45
运动的点	
第4章 函数、坐标和图形	65
依数画图	
第5章 方程	87
求出未知量	
第6章 离散的和连续的增长过程	107
如何增长	
第7章 三角函数	129
摘星星	

第 8 章 数列	149
眺望无穷大	
第 9 章 微分入门	169
细窥无穷小	
第 10 章 例题与解答	183
测试一下	

前 言

在我们真正开始 之前……



① π 与英语的 pie 音相同,后者意为馅饼。PISA 是国际学生项目评估的缩写,与 Pizza 音相似,后者意为匹萨。——译者

为什么本书值得期待？

本书书名源自那些享受生活的中欧人所喜爱的一种饮料拿铁玛奇朵，它由牛奶泡沫和浓烈的咖啡调制而成。同样地，取这样的书名，我们希望把数学和娱乐强有力地结合在一起，在数字和秘密的数学王国里，让本书唤起您一个又一个顿悟，并带给您快乐！

拿铁玛奇朵的字面意思是“掺杂了的牛奶”。“掺杂了的数学”是特意与“无杂质的数学”相区别开来的数学。我们要给索然无味的科学配上深褐色但令人食欲大振的实践之汤。我们知道：只有把学到的知识运用到实际生活中，才能最大程度地提高学生对于科学的兴趣。

在这里，有些解题方法和公式您可能找不到，例如我们在本书中解一元一次方程和一元二次方程时，就没有采用那些专门用来为解题而人为设计的高次方程的方法。取而代之的是，我们会介绍在大多数数学教学方案中没有的几种方法。我们把解决实际问题放在第一位！我们发现，在数学课上，学生的时间常常被浪费掉！运用“无杂质的数学”这一教学理念的国家的学生，在国际学生评估项目(PISA-Studie)中成绩惊人地差！这一点毫不奇怪，传统的数学课一直有一个雄心，让所有的学生都为数学专业学习做准备，尽管其实只有一小部分学生在将来的学习中会应用到数学。大多数人需要的是在实际生活中解决实际问题的计算能力。如果您属于这里所说的大多数人中的一员，那么您来对地方了。通过阅读这本新颖而富有乐趣的《数学玛奇朵》，您的大脑细胞会被激活！

谁写了这本书？

12年前，伊姆加德·瓦格纳(Irmgard Wagner)和蒂基·库斯滕马歇尔(Tiki Küstenmacher)两人编写了本书的早期版本。现在，因斯布鲁克的海因茨教授也加入了进来。本书是经瓦格纳和海茵茨这两位具有多年中学和大学教学经验的数学家多次讨论后诞生的。蒂基是一位接受过良好教育的基督教牧师，他的畅销书《简化你的生活》使成千上万的读者的生活得以简化。他们将用自己所拥有的趣题和知识，使对数学感兴趣的学生在学习上来个彻底的简化！

三位作者衷心感谢支持本书出版的出版社。瓦格纳要将本书献给她的

父亲,12岁的时候,瓦格纳在她父亲的书柜里发现了一本书,埃格蒙特·科莱鲁斯的《从1乘以1到积分》,这本书激发了她对数学的热爱,也激发了她写您手上这本书的愿望。

本书为何用“你”称呼?

书中的对话是在“无杂质的数学”的代表——数学小姐和以电脑形象出现的实践者之间进行的。他们两个希望把您带到他们的世界中去,和您交朋友。因此他们用“你”来称呼“您”。您将会感受到,用“你”来称呼数学,将是一种多么美妙的感觉!

本书为谁和为何而写?

本书不能代替数学教科书。您可以把本书当作消遣,当作数学课或相应课程的补充材料来读。当您对自己忘了数学课上学到的内容而不快时,对学习最好的同学却无法解决实际问题而生气时,您就可以来看看本书了。也许您只想再次弄明白学生时代的数学问题,那么本书也可以让您回想起那些遗忘的知识,使您能够再次运用它们。本书尤其适合作为数学课的课外辅导书,书中涉及的例题或许能够填补您的知识漏洞。如果您是一位教育工作者,您的教授能力也会因本书而引人注目。

本书后为何附实战训练?

在普通教科书里叫做练习,在我们这叫做实战训练,因为作为读者,您必须练习。我们会找实际生活中的例子来激发您的潜力,因此,不是每个练习都与数学——相对应。与数学相对应的练习,您在其他数学教科书上都能找到。我们要促成的是顿悟。

为了不影響您的阅读快感,我们把训练部分附在本书的最后,同时附上了参考答案。如果您觉得这些参考答案还不充足的话,则可以浏览网页 www.pearson-studium.de,这个网站上有非常详细的解答方法。

特别鸣谢

本书把数学抽象简化成了数学小姐这样一个人物形象,但做成这件事

还是极其繁复的,要找出逻辑关系,要把枯燥的数学知识和诙谐的语言协调起来,要努力使图片和文本融洽配合、撤消、改正,让三位作者的观点达成一致……很高兴,我们最终成功地完成了这项艰巨的工作!正是在众多令人印象深刻并负责任的工作人员的共同努力下,我们才完成这项任务。所以,我们的致谢页几乎与好莱坞电影片尾的鸣谢名单一样长。

感谢培生教育出版社,它不仅是我们这个项目的发动者,而且从审校到销售,他们的人员都保持着极大的热情。尤其是多丽丝·林卡(Doris Linka)和米奇拉·海恩(Michaela Heine),她们印出了最棒的书。

感谢马廷娜·梅瑟(Martina Messer),没有她所具有的排版上的专业能力以及在最后工作阶段全天候的奉献,本书不会赶在2003学年开学前完工。

感谢12年前出版《数学PC》的系统出版社。《数学玛奇朵》是对《数学PC》进行了彻底修订,进行了大扩容的新版本。但是,如果没有当初编辑拉尔夫·莫勒(Ralph Möller)的巨大干劲,数学小姐也不会有机会和大家见面了。

感谢托比亚斯·拉文斯(Tobias Ravens)和彼得·泽斐尔(Peter Zöfel)两位专家审阅了原稿,并给予了精辟的意见和极大的鼓励。

感谢校对安吉拉·斯塔莫夫(Andrea Stumpf)和皮特拉·肯恩勒(Petra Kienle),是她们确保了数学小姐说的德语没有犯错。若书中还留有错误,那不是她们的错,而是交付印刷太匆忙的缘故。

非常感谢我们的亲朋好友。处于创作过程中的作者常常很难被外部世界所理解,但我们的亲朋好友做到了,并且远不止这些;在那段时间,他们全心全意地支持着我们这群神经质的人。

而我们最想感谢的是您,亲爱的读者。若您想重新发现数学,请阅读本书并且抽出时间来浏览一下致谢页,这对我们是一种特别的嘉奖,而对您来说也会有所收获。

如果您在阅读过程中产生了乐趣,获得了新的认识和成功的经验,请转告您身边的人。若没有,请反馈给我们。我们期待倾听您的声音。您知道,在互联网时代,图书编撰者和您只有鼠标轻轻一点的距离。

热身已经够了,现在我们开始吧。衷心祝愿您获得更多的乐趣和更多的数学知识。



作者联系方式:

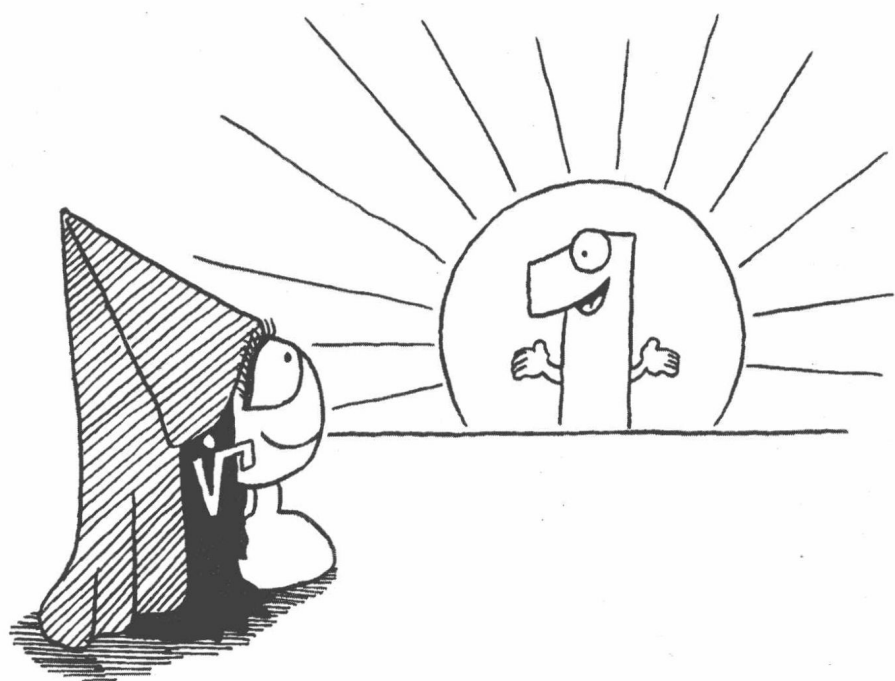
维尔纳·蒂基·库斯滕马歇尔: tiki@tiki.de

伊姆加德·瓦格纳: irmwagner@t-inline.de

海因茨·帕托勒: h.partoll@chello.at

第1章

轻松起步



数

两头都是无穷

早在原始社会就有了数,或者更简单地说,有了某种计数的东西。



人们可以非常方便地数到 10, 因为一般来说人人都有 10 根手指。因此, 10 这个数在我们看来还具有一种特殊的地位。它是第一个两位数。



但这种记数法并不是最早的。比如, 罗马数字就是另外一种记数法, 它尤其看重用单手计数, 从而把 5 这个数放在特殊的地位。

这种罗马数字就不能以我们的方式来进行计算。把 CXXVIII 和 MCIX 相加或者相乘是极其繁琐的。即便是最简单的计算题, 也会成为大难题。

要进行计算, 还缺少什么呢?

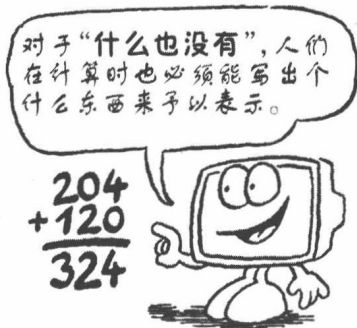




印度人早就认识了零。在第一个千年快要结束的时候，零从印度传入了阿拉伯地区。阿拉伯数学家花拉子米写了一本怎样用采用位值制的印度数字来进行计算的基础性读物。结果就使得我们今天把这种记数法称为“阿拉伯数字”。

通过各种不同的途径，例如，通过塞维利亚和托莱多^①的大学，这种知识传到了欧洲。到这时，人们才能进行真正意义上的“计算”。罗马人为了数得更多，不得不在他们的数制中一而再、再而三地引入新的数字符号，而我们的位值制只要反复运用 10 个数字符号就足够了。

但是，为什么零到那么晚才发现呢？



人们到底能数到多远呢？

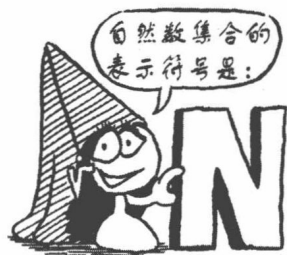
要多远就多远！没有尽头，因为每一个数后面都紧跟着一个比它大的数。

^① 塞维利亚和托莱多均为西班牙的城市。——译者



我们用这些数就能一直“数下去”。

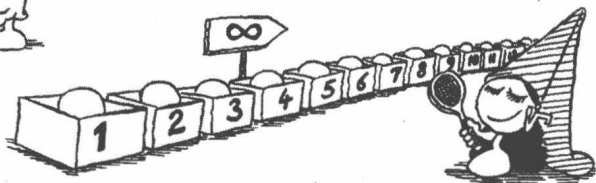
除了这些数之外,还存在着很多很多的数,因此我们要让数的世界具有某种系统性:通过计数产生的数,在数学上被可以理解地称为自然数。由于我们能够要多远就多远地数下去,因此说:存在着无穷多的自然数。



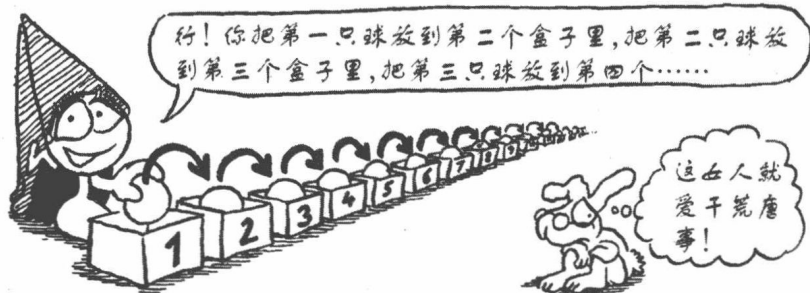
对于无穷大,我们平时的规则不再适

用。有着各种各样的事例,用来说明这一点真是很不错。

请设想一下,你有无穷多个盒子,每个盒子里放着一只网球(再放一只就不行)。也就是说,所有的盒子都放满了。



但是现在你还有一只网球,而且很想把它放在你这些盒子中最前面的那个盒子里。这行得通吗?



这样就可以再放进任意多个球,因为你有着无穷多个盒子。



只有把计数的无穷性浓缩在某几个一目了然的数字上,而且只有把“什么也没有”——即数零——友好地接纳进来,才可能有我们今天的数学。因为只有有了零,才能让我们今天的数制得以建立;在这种数制下,一个数中每个数字的位置跟这个数字本身完全同样重要。这就是我们的“位置式”数制的精彩之处。那么,怎样用这种数制来表示数呢?

我们用以拼合成一个数的数字有一种位值。于是最右边数字的位值是1,它左边数字的位值是10,再左边是100,然后是1000,等等。

数1234只是下列表示式的简写:

$$1234 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1^{①}.$$

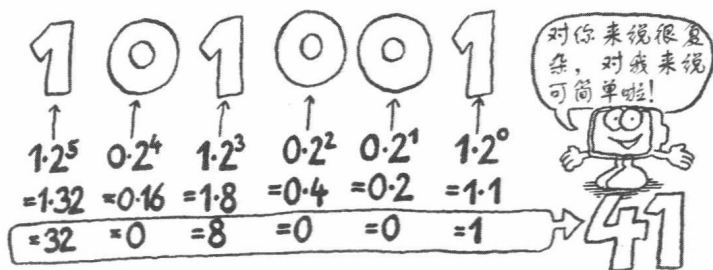
因此,我们只用10个符号就可以写出任意大的数,而且还可以进行运算!但对于一般的位值制来说,我们这种数制可能并不是唯一的!它只是最适合于我们的10根手指而已。



计算机没有10根手指,但它有两种状态——电流的输入和输出,因此它最适于在“二进制”下计算。

它只采用两个数字符号“0”和“1”,其余的数通过位值制处理,当然是按照另一种赋值机制:最右边数字的位值是1,它左边的是2,然后是4,8,16,等等。

因此,二进制数101001相当于:



① 本书中乘号用“·”,除号用“:”,故统称“点状算子”。——译者