强化 深化 系列化

数学高考前第二轮复习

SHU XUE GAO KAO QIAN DI ER LUN FUXI

江西科学技术出版社

强化
深化
系列化

● 数学高考前第二轮复习

杨圣宏　邹兴平　张敬文　冯　韬

江西科学技术出版社

强化·深化·系列化
——数学高考前第二轮复习
杨圣宏等编著
江西科学技术出版社出版、发行
（南昌市新魏路）
江西新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张17.25 字数40万
1990年7月第1版 1990年7月第1次印刷
印数 1—6,000
ISBN 7—5390—0336—7/G·46 定价：5.30元

前　言

在第一轮全面复习的基础上，进行第二轮重点复习，搞好强化、深化、系列化训练，是提高数学水平、增强应试能力的有效方法。我们基于多年教学的经验，从数学教育学的角度进行分析和组织材料，编写了此书。献给希望学好中学数学知识的读者，为加强基础教育尽绵薄之力。

学好数学关键在理解，而对数学的理解应抓住三个环节，即数学概念的深化、数学方法与技巧的应用推广、数学知识的系列化。本书各单元的内容都是按这三个层次来安排的。从正反二面入手，深化数学概念；从典型问题引出方法与技巧，分析问题与方法的本质联系，进而推广到其它问题，培养灵活运用数学方法的能力；心理学认为，对理解的高层次要求是使所学知识同化于原有的知识系统之中，本书通过一些典型知识系列化的举例，启发思维，培养系列化知识的能力，使所学的数学知识同化于原有的知识系统中，获得扩充了的新的数学知识系统，达到理解的高层次要求。

本书编写注意了“启发式”的应用。通过提出问题，引导思考，再分析解答，引伸发挥。本书求精、求深、不求全，旨在突出重点、突破难点，宜于高考前的第二轮复习使用。本书由杨圣宏同志统稿，不少数学教师对本书的编写给予了热情关怀，在此我们谨表衷心的感谢。

作　者

目 录

1　集合与函数

1.1 概念的深化

1　问题

1.1　判断下列各式是否正确？

A）$\phi\in\phi$；B）$\phi\subseteq\phi$；C）$\phi\in\{\phi\}$；

D）$\phi\in A$；E）$\phi\subset A$；F）$\phi\subseteq A$。

1.2　已知$\sqrt{\sin x-1}+\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{4}\right)^2=0$　$x\in[0,2\pi]$的解集是 M，$N=\left\{0,\ 1,\ 2,\frac{\pi}{2},\ -1,\ 4\right\}$.则下列关系式中正确的是（　　）.

A）$M\subset N$；B）$M\cap N=\phi$；C）$M\in N$；

D）$M\cap N=\left\{\frac{\pi}{2},-1\right\}$.

1.3　集合$M=\{1,\ 0,\ x\}$，$N=\{|x|,\ y,\ \lg(x,\ y)\}$且$M=N$求$x$，$y$.

1.4　已知$P=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots\}=Z$，$Q=\{\ 0,\ 1,\ 2\cdots\cdots\}$，$P$的元素$x$与$Q$的元素$y$的对应法则是$f$：$y=x^2$，则$f$（　　）.

A）不是P到Q的映射；B）是P到Q的一一映射；C）是

P到Q的映射，但不是一一映射，由f可确定P与Q的函数关系；D）是P到Q的映射，但不是一一映射，由 f 不可确定P与Q的函数关系。

1.5 下列命题正确的是（　　）。

A） $y=\sin x\left(x=n\pi+\dfrac{\pi}{2},n\in N\right)$是奇函数；B）$y=\cos x$ $(x\in[-100\pi,\ 100\pi])$是周期函数；C）定义域关于原点对称的函数$f(x)$总可以表成一个奇函数与一个偶函数之和；D）任意函数$f(x)$不可表成二个取非负值的函数之差。

1.6 下列命题正确的是（　　）。

A）至少存在两个既是奇函数又是偶函数的函数；B）若$a<b<c$，函数$f(x)$在区间$(a,\ c)$上有定义，则$f(x)$在区间$(a,\ b)$与区间$(b,\ c)$上都是单调增是$f(x)$在区间$(a,\ c)$上单调增的充要条件；C）互为反函数的两个函数的奇偶性必相同；D）在定义域上单调增的函数其反函数在定义域上不一定单调增。

1.7 作出函数$y=|x-1|+|x^2+x-2|$的图像。

2 分析与解答

1.1解 此题可加深对集合与元素之间的关系及空集概念的理解。

A）$\phi\in\phi$，∵ϕ是不含任何元素的集合，而此式表示ϕ是ϕ的元素，∴此式不正确；

B）$\phi\subseteq\phi$，∵ϕ是任何集合的子集，而此式表示ϕ是ϕ的子集，∴此式正确；

C）$\phi\in\{\phi\}$ ∵$\{\phi\}$表示以空集为元素的集合，而此式表示ϕ是$\{\phi\}$的元素，∴此式正确；；

D）$\phi \in A$，若A不是含有ϕ为元素的集合，则此式不正确；

E）$\phi \subset A$，若$A=\phi$，则ϕ不是A的真子集，∴此式不正确；

F）$\phi \subseteq A$　∵ϕ是任意集合A的子集，∴此式正确。

1.2解　此题可加深对由不同的元素类组成的集合各不相同的概念的理解。

由题设可知$\begin{cases}\sin x-1=0 & x\in[0,\ 2\pi]\\ \operatorname{arctg} y+\dfrac{\pi}{4}=0\end{cases}$

解上式可得$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}\\ y=-1\end{cases}$

解集$M=\left\{\left(\dfrac{\pi}{2},\ -1\right)\right\}$是以有序数对为元素的集合，而$N$是数集，∴$M\cap N=\phi$，故正确的关系式是B）。

1.3解　此题可加深对集合表示法与集合相等概念的理解。

∵$M=N$，又$0\in M$，∴$0\in N$，但N中元素$|x|$与y都不可能为0，否则$\lg(xy)$无意义。

∴　$\lg(xy)=0$，$xy=1$……①

又$1\in M$，∴N中元素$y=1$或$|x|=1$，把$y=1$代入①得

$$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

把$|x|=1$代入①得

$$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$$

∵集合列举表示法中的元素是互不相同的，故

$$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\text{不合}$$

而$\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$是原题之解。

1.4解　此题可以加深对映射、一一映射与函数等概念的理解。

∵任意$x\in P$，由对应法则f：$y=x^2$得到Q中唯一确定的元素，∴f是P到Q的映射．又∵对于P中的不同元素± 1，由映射f：$y=(\pm 1)^2=1$得到Q中相同的元素（即对于Q中的像1，在P中有不只1个原像）。∴f不是P到Q的一一映射。

虽然P和Q均为数集，但对于P中任何数通过映射f：$y=x^2$不可能得到Q中的数2，∴f不可确定P到Q的函数，而D)："f是P到Q的映射，但不是一一映射，且不可确定P到Q的函数"，故D)正确。

1.5解　此题可加深对函数性质与定义域关系的理解。

A）函数$y=\sin x$　$\left(x=n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\in N\right)$的定义域D为正数集的子集，对应的点集不关于原点对称。当$x\in D$时，$f(x)=\sin x$，而$-x\overline{\in}D$，$f(-x)$没有意义，∴此函数不是奇函数，命题A)不正确；

B）函数$y=\cos x(x\in[-100\pi,\ 100\pi])$的定义域是有界点集（因为周期函数的定义域D必是无界点集。事实上若D有界，即存在数M使任意$x\in D$都有$|x|<M$，对任意最小正周期T和任意$x\in D$当n充分大时必有$x+n\cdot T>M$，∴$x+nT\overline{\in}D$，$f(x+n\cdot T)$无意义，等式$f(x+nT)=f(x)$不成立。）∴$y=\cos x$　$x\in[-100\pi,\ 100\pi]$不是周期函数；

C）对于任意定义域D关于原点对称的函数$f(x)$，若$x\in D$则$-x\in D$，∴$f(x)$与$f(-x)$均有意义。设

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$，则$g(x)$为偶函数

$$\phi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$，则$\phi(x)$为奇函数

显然$f(x)=g(x)+\phi(x)$，$\therefore f(x)$能表成一个奇函数与一个偶函数之和，命题C)正确；

D）对任意函数$f(x)$，可作如下取非负值的函数

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当}f(x)\geqslant 0\text{时} \\ 0 & \text{当}f(x)<0\text{时} \end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} 0 & \text{当}f(x)\geqslant 0\text{时} \\ -f(x) & \text{当}f(x)<0\text{时} \end{cases}$$

显然$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，$\therefore$任意函数$f(x)$总可表成两个取非负值的函数之差，命题D)不正确。

1.6解　此题可加深对函数、反函数的性质及其之间关系的理解。

A）当$f(x)\equiv 0$，$x\in R$时，此函数既是奇函数又是偶数。把定义域D改为任意关于原点对称的点集，例如$D=\{-1, 1\}$得到新的函数$f(x)\equiv 0$，$x\in\{-1, 1\}$也既是奇函数又是偶函数，$\therefore$命题A)正确；

B）$\because a<b<c$，函数$f(x)$在区间(a, c)上单调增$\Rightarrow$函数$f(x)$在区间(a, b)与区间(b, c)上单调增。但函数$f(x)$在区间(a, b)与(b, c)上单调增时，函数$f(x)$在区间(a, c)上不一定单调增，$\therefore$命题B)不正确；

C）互为反函数的两个函数，如有一个函数$f(x)$是奇函数则其反函数$f^{-1}(x)$也为奇函数，而当函数$f(x)$为偶函数时，f不是一一映射，反函数不存在，$\therefore$命题C)不正确；

D）设函数$y=f(x)$在定义域D上单调增，其值域为D'，

则反函数$f^{-1}(y)$的定义域为D'，值域为D，若$f^{-1}(x)$在定义域不一定单调增，即存在y_1，$y_2\in D'$，且$y_1<y_2$，有$x_1=f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)=x_2$，则由$f(x)$单调增，有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，即$y_1\geqslant y_2$，这与$y_1$，$y_2$的假设矛盾，∴命题D）不正确。

1.7解　此题可加深对绝对值、分段函数及其图像的理解。

由$y=|x-1|+|x^2+x-2|$

当$x\leqslant-2$时，$y=1-x+x^2+x-2=x^2-1$

当$-2<x\leqslant1$时，$y=1-x-x^2-x+2=-x^2-2x+3$

当$x>1$时，$y=x-1+x^2+x-2=x^2+2x-3$

此函数为分段函数

$$y=\begin{cases}x^2-1, & \text{当}x\leqslant-2\text{时}\\ -x^2-2x+3, & \text{当}-2<x\leqslant1\text{时}\\ x^2+2x-3, & \text{当}x>1\text{时}\end{cases}$$

其函数图像如图1—1

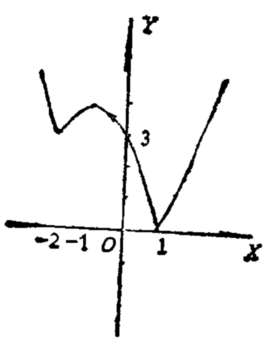

图1—1

1.2 方法与技巧的推广

1. 问题

1.1 (1)已知$f(x+1)=x^2-3x+2$，求$f(x)$；(2) 已知$af(2x-3)-bf(3-2x)=2x$，且$a^2\neq b^2$，求 $f(x)$；△(3) 已知除$x=0$与$x=1$外，函数$f(x)$都有定义，且 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x$，求$f(x)$.

1.2 已知定义在实数集R上不恒为0的函数$f(x)$对任意实数x_1与x_2有：

$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

(1)求$f(0)$，$f(\pi)$；(2)证明$f(x)$是周期函数，并判断奇偶性。

1.3 求函数 $y=\frac{2x-1}{x+3}$的反函数并作出图像，讨论这两个函数的单调性。

1.4 求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$的单调区间。

1.5 (1)求证 $f(x)=(2^x-2^{-x})\sin\frac{6x}{x^2+1}\geqslant 0$；(2) 已知偶函数$f(x)$在(2，4)上单调递减，比较$a=f(\log_{\frac{1}{2}}8)$与$b=f[\arccos(-1)]$的大小。

1.6 有一块边长为50cm的正方形铁片，在它的四角各剪去一个小正方形，把它折成一个无盖的盒子，问剪去的小正方形边长为多少时盒子的体积最大？

1.7 判断函数$y=\log_x(x+1)$在区间$(1,+\infty)$的单调性。

2．解答与推广

1.1解　题中三个小题都是由给定的关系式求$f_{(x)}$的解析式的问题。

（1）可用配方法或换元法求解

配方法：$f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$

$\therefore\quad f(x)=x^2-5x+6$

换元法：令$t=x+1$，则$x=t-1$

$\therefore\quad f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6$

（2）用换元法后再迭代一次得到以$f(t)$为变元之一的二元方程组后求出$f(t)$。

设$2x-3=t$，以$3-2x=-t$代入已知式得

$af(t)-bf(-t)=t+3$……①

再以$-t$代t代入①得

$af(-t)-bf(t)=-t+3$……②

由①×a+②×b得

$a^2f(t)-b^2f(t)=t(a-b)+3(a+b)$

由$a^2\neq b^2$得

$$f(t)=\frac{t}{a+b}+\frac{3}{a-b}$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{x}{a+b}+\frac{3}{a-b}$$

（3）此题迭代二次得到以$f(x)$为变元之一的三元方程组，再求$f(x)$。

$\because\quad x\neq 0,\ x\neq 1$

$\therefore\quad x$ 与$\dfrac{x-1}{x}$都可为除数，

$$\because\quad f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x\cdots\cdots①$$

用 $\frac{x-1}{x}$代①式中的x，得

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}\right)=\frac{x-1}{x}$$

即 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{x-1}{x}\cdots\cdots②$

再用$\frac{-1}{x-1}$代①式中的x，得

$$f\left(\frac{-1}{x-1}\right)+f\left(\frac{\frac{-1}{x-1}-1}{\frac{-1}{x-1}}\right)=\frac{-1}{x-1}$$

即 $f\left(\frac{-1}{x-1}\right)+f(x)=\frac{-1}{x-1}\cdots\cdots③$

解①、②、③式组成的以$f(x)$、$f\left(\frac{x-1}{x}\right)$、$f\left(\frac{-1}{x-1}\right)$为未知数的三元方程组。

由 $\frac{1}{2}$(①+②+③)－②得

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x-1}{x}+\frac{-1}{x-1}\right)$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-1}{2x(x-1)}$$

值得研究的是在用迭代法解(2)与(3)时有不同的处理：对(2)，①式中原有两个未知数$f(t)$ 和$f(-t)$一次迭代后没有增加新的未知数；而对(3)，①式中原有两个未知数$f(x)$与$f\left(\frac{x-1}{x}\right)$

经过一次迭代后又增加了一个未知数 $f\left(\frac{-1}{x-1}\right)$，需进行第二次迭代。一般说第二次迭代后可能增加新的未知数，但题中由于 $y=\frac{x-1}{x}$ 与 $y=\frac{-1}{x-1}$ 恰好互为反函数，没有增加新的未知数，可由三元方程组求解得 $f(x)$。

例1.1 考虑线性分式的一般情形，若给出 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{ax+b}{x+c}\right)$ 的关系式①，那么 a、b、c 在什么条件下经过两次迭代后即可由三元方程组求出 f 呢？(x)

解　设线性分式为 $g_{(x)}=\frac{ax+b}{x+c}$，则

$$g^{-1}(x)=\frac{-cx+b}{x-a}$$

以 $g(x)$ 代 x，得

$$g[g(x)]=\frac{a\cdot\frac{ax+b}{x+C}+b}{\frac{ax+b}{x+c}+c}=\frac{\frac{a^2+b}{a+c}x+b}{x+\frac{b+c^2}{a+c}}$$

当　$g[g(x)]=g^{-1}(x)$ 时，即

$$\begin{cases}\frac{a^2+b}{a+c}=-c\\ \frac{b+c^2}{a+c}=-a\end{cases}$$

两式重合为　$b=-(a^2+ac+c^2)\cdots\cdots(*)$

当 a、b、c 满足 $(*)$ 式时，原式经两次迭代后，可由三元方