弹性力学基础

下　册

重庆大学
南京航空学院　合编

重庆大学承印

一九八〇年三月

下册目录

第十三章　弹性力学问题的变分原理及其解法

第十四章　弹性力学问题的有限单元法

第九章　柱体的扭转

第五章中讨论园截面杆扭转问题所得的结论是：

(1) 扭转变形后，截面仍保持为平面；

(2) 截面上任意点处的剪应力与该点至园心的距离成正比，其作用方向与径线垂直。

以上结论对非园等截面柱体的扭转问题并不正确。例如对图9—1所示矩形截面柱体来说，设其边界上A点处的剪应力τ仍与径线OA垂直，则可将它分解成两个分量τ_{xz}及τ_{yz}，由于柱体侧面上无外力作用，故必$\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$，因此，边界上任意点处剪应力的方向必与边界相切。同时，实验表明，非园等截面柱体扭转后，截面将发生翘曲，不再保持为平面。因此，对非园等截面柱体的扭转问题，须另寻求解答。本章分别用位移法和应力法求解等截面柱体扭转时的变形和应力，并对薄膜比拟法和开口、闭口薄壁杆的扭转问题进行了讨论。

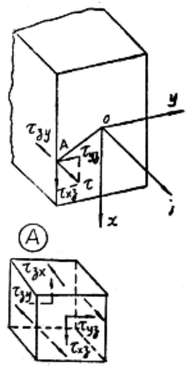

图　9—1

§9—1　任意等截面柱体的扭转　扭转函数

图9—2示一长为l的等截面柱体，左端固定，右端面上作用有扭矩M_z。这里，我们先用位移法求解，并采用圣维南所提出的半逆解法。

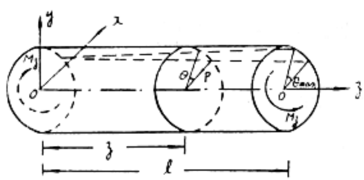

图　9—2

在扭矩M_z的作用下，柱体表面上的母线将被扭成螺旋线。今考察距固定端为z的任意截面。在小变形假设下，该截面的扭转角θ可认为与距离成正比，即

$$\theta=\alpha z \qquad (a)$$

式中 α 为单位长度扭转角（或称单位扭角）。

设任意截面上(图9—3)的任意点 $p(x,y,z)$，变形后移到点 $p'(x+u,\ y+v,\ z+w)$。由于变形，截面发生翘曲，点 p' 在 xoy 平面上的投影以 p_1' 表示；点 p 到 p_1' 所转动的角度即为 θ，因 θ 很小，故可近似取为

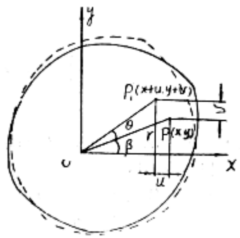

图 9—3

$$op=op_1'=r,\quad sin\theta=\theta,\quad cos\theta=1$$

因为

$$u=rcos(\beta+\theta)-rcos\beta=rcos\beta cos\theta-rsin\beta sin\theta-rcos\beta$$

$$v=rsin(\beta+\theta)-rsin\beta=rsi\beta cos\theta-rcos\beta sin\theta-rsin\beta$$

故得

$$\left.\begin{aligned} u&=-y\theta \\ v&=x\theta \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

将（a）代入（b）得

$$\left.\begin{aligned} u&=-\alpha yz, \\ v&=\alpha xz。 \end{aligned}\right\} \qquad (9—1)$$

由此可见，位移 u，v 的表达式与园截面杆受扭时相同，不同的是位移 w。

非园截面柱体受扭后截面将发生翘曲，沿 z 轴向要发生位移。如各截面沿 z 轴向能自由伸缩，则可认为各截面翘曲情况相同，亦即位移 w 与 z 无关只是 x、y 的函数，由此可设

$$w=\alpha\varphi(x,\ y)。 \qquad (9—2)$$

式中，$\varphi(x,\ y)$ 为一待定函数，称为**扭转函数**。因为 w 反映了截面的翘曲，所以也称 $\varphi(x,\ y)$ 为**翘曲函数**。

由几何方程（5—2）可得与（9—1）、（9—2）相应的应变分量为

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=0, \\ &\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right), \\ &\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)。 \end{aligned}\right\} \qquad (9—3)$$

再由物理方程（5—4，b）可得与（9—3）相应的应力分量为

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0\ , \\ &\tau_{xz}=G\gamma_{xz}=G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right), \\ &\tau_{yz}=G\gamma_{yz}=G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)。\end{aligned}\right\} \qquad (9-4)$$

由此可知，如确定了扭转函数$\varphi(x,\ y)$，则由（9—4）可求截面上的两个未知应力分量τ_{xz}和τ_{yz}。

下面讨论如何确定扭转函数$\varphi(x,\ y)$。因用位移法求解，故位移分量应满足用位移分量表示的平衡微分方程（5—10）。因不计体力，即

$$f_x=f_y=f_z=0$$

又由（9—3）知

$$\theta=\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=0\ 。\qquad (9-5,a)$$

再由（9—1）和（9—2）可得

$$\nabla^2u=0\ ,\qquad \nabla^2v=0\ ,\qquad \nabla^2w=\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)。\qquad (9-5,b)$$

故（5—10）中的前两式恒能满足，而其第三式成为

$$\nabla^2w=0。$$

因而，由（9—5，b）可得

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\ 。\qquad (9-6)$$

由上式得知，扭转函数$\varphi(x,\ y)$应是一调和函数。

因在柱体的侧面上无外力作用，$X_N=Y_N=Z_N=0$，且$l\neq0$，$m\neq0$，$n=0$。故边界条件（5—5）的前两式恒能满足，而其第三式成为

$$\tau_{xz}l+\tau_{yz}m=0\ 。\qquad (c)$$

上式表示，在柱体的侧面边界上，剪应力分量τ_{xz}和τ_{yz}在法线N上的投影之和应等于零。因此，剪应力分量的合成剪应力（或称总剪应力）在边界上应与边界相切。

将（9—4）代入（c）得

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)l+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)m=0\ ,\qquad (9-7,a)$$

或

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\frac{dy}{ds}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\frac{dx}{ds}=0\ 。\qquad (9-7,b)$$

这样，用位移法求解柱体的扭转问题就归结为寻求扭转函数$\varphi(x,y)$，它应满足调和方程（9—6）和边界条件（9—7，a）或（9—7，b）。

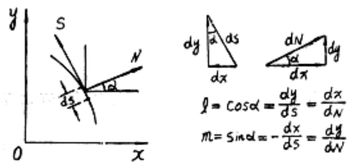

图　9—4

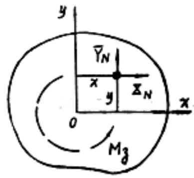

图　9—5

在柱体的两端面上（$z=0$，$z=l$），要求沿x轴向和y轴向面力的合力应等于零，且其合力矩应等于已知扭矩M_z。例如对$z=l$的端面（图9—5）的方向余弦为

$$l=m=0,\quad n=1。$$

由边界条件（5—5）可知，$X_N=\tau_{xz}$，$Y_N=\tau_{yz}$。因此，在$z=l$的端面上要求满足下列三式

$$\iint X_N dxdy=\iint\tau_{xz}dxdy=0, \tag{9—8,a}$$

$$\iint Y_N dxdy=\iint\tau_{yz}dxdy=0, \tag{9—8,b}$$

$$\iint(xY_N-yX_N)dxdy=\iint(x\tau_{yz}-y\tau_{xz})dxdy=M_z。 \tag{9—8,c}$$

以（9—4）代入（9—8，a）的左端可得

$$\iint\tau_{xz}dx\,dy=G\alpha\iint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)dxdy。 \tag{d}$$

为了将（d）右端转换成线积分，可把它改写成下式

$$G\alpha\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\right)dxdy=G\alpha\iint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\right]\right\}dxdy, \tag{e}$$

应用格林公式

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint(Pdx+Qdy), \tag{9—9}$$

故（e）成为

$$G\alpha\iint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)dxdy=G\alpha\oint\left\{\left[-x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\right]dx\right.$$
$$\left.+\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]dy\right\},\tag{f}$$

又因在边界上有 $l=\frac{dy}{ds}$，$m=-\frac{dx}{ds}$，并因满足边界条件（9—7，a），故由（f）可得

$$G\alpha\iint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)dxdy=G\alpha\oint x\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)l\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)m\right]ds=0,$$

从而证明了（9—8，a）成立。同理可证明（9—8，b）也成立。

再以（9—4）代入（9—8，c）可得

$$M_z=\iint\left(x\tau_{yz}-y\tau_{xz}\right)dxdy=G\alpha\iint\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right.$$
$$\left.-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy,\tag{9—10}$$

令

$$D=\iint\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy,\tag{9—11}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&M_z=G\alpha D\\&\alpha=\frac{M_z}{GD}\end{aligned}\right\}\tag{9—12}$$

式中 D 称为**抗扭刚度**或抗扭常数。

对 $z=0$ 的端面，同样可得上述结论。

此外，还可用扭转函数 $\varphi(x,y)$ 的共轭函数 $\psi(x,y)$ 来求解柱体的扭转问题。因为 $\varphi(x,y)$ 满足调和方程（9—6），所以 $\varphi(x,y)$ 是调和函数，因此可引入它的共轭函数 $\psi(x,y)$ 来组成解析函数

$$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)。\tag{9—13}$$

由于 $f(z)$ 是解析函数，它的实部和虚部应满足柯西——黎曼条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\\&\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\end{aligned}\right\}\tag{9—14}$$

所以，也可用φ的共轭函数来求解柱体的扭转问题：

第一 ψ是调和函数，它满足调和方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0。\qquad(9-5)$$

第二 可用ψ来表示边界条件。以（9—14）代入（9—7，b）得

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\right)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\right)\frac{dx}{ds}=0。$$

展开上式得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds},$$

或

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)。$$

积分上式得

$$\psi=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c,\qquad（在边界上）\qquad(9-16)$$

式中，c为任意常数。显然（9—16）所表示的就是柱体截面的边界方程。

因此，求解柱体的扭转问题，又可归结为在柱体截面域内寻求调和函数$\psi(x, y)$，它在边界上应满足边界条件（9—16）。

以（9—14）代入（9—4）可得用调和函数$\psi(x, y)$表示的剪应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=G\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\right),\\ \tau_{yz}&=G\alpha\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}+x\right)。\end{aligned}\right\}\qquad(9-17)$$

此时，单位扭转角α仍用（9—12）计算，但用来计算抗扭刚度D的（9—11）应改为

$$D=\iint\left(x^2+y^2-x\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy。\qquad(9-18)$$

§9—2 椭园截面柱体和等边三角形截面柱体的扭转

因扭转函数φ和它的共轭函数ψ都是调和函数，且满足柯西——黎曼条件（9—14），圣维南提出了由复变解析函数来寻求调和函数φ和ψ的简单方法，从而解决了一系列特殊问题。

取复变数

$$z = x + iy$$

则任一复变函数 $f(z)$ 可写成

$$f(z) = U(x,\ y) + iV(x,\ y) \qquad (a)$$

如 $f(z)$ 是 D 域内的解析函数，则它的实部 U 和虚部 V 满足柯西——黎曼条件：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x}。 \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

就是说 V 是 U 的共轭调和函数，以（9—14）与（b）比较可知，在解析函数（a）中，扭转函数 φ 和其共轭函数 ψ 分别与 $f(z)$ 的实部 U 和虚部 V 相对等，因此，第一种取法是：

$$\varphi = U, \qquad \psi = V, \qquad (9—19,a)$$

而边界方程（9—16）则成为

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C。 \qquad (9—19,b)$$

上式表示 D 域的边界方程，也就是柱体截面的边界方程。如这个方程表示一条闭合曲线，那么，此闭合曲线所表示的截面形状的柱体扭转问题就算解决。

因为，如 $U + iV$ 是在 D 域内的解析函数，则 $V - iU$ 也是 D 域内的解析函数，故第种取法是

$$\varphi = V, \qquad \psi = -U。 \qquad (9—20,a)$$

此时，柱体截面边界方程为

$$-U(x,\ y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C。 \qquad (9—20,b)$$

由于 $V - iU$ 是在 D 域内的解析函数，自然 $-V + iU$ 也是 D 域内的解析函数，故第三种取法可选

$$\varphi = -V, \qquad \psi = U, \qquad (9—21,a)$$

此时，柱体截面边界方程成为

$$U(x,\ y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C。 \qquad (9—21,b)$$

由以上讨论可见，选取扭转函数 φ 和其共轭函数 ψ 时，可从选解析函数 $U + iV$ 出发，注意它们间的对应关系及符号即可。下面举例说明上述方法的应用。

1．椭园截面柱体的扭转

因椭园为二次曲线，故可选解析函数为

$$f(z)=mz^2=m(x+iy)^2=m(x^2-y^2)+i2mxy, \qquad (c)$$

式中，m为实常数。

由（9—20,a）可取扭转函数φ及其共轭函数ψ为

$$\varphi=V=2mxy, \qquad \psi=-U=-m(x^2-y^2)。 \qquad (d)$$

于是截面的边界方程为

$$-m(x^2-y^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C,$$

上式可化为

$$\frac{x^2}{\dfrac{-2C}{1+2m}}+\frac{y^2}{\dfrac{-2C}{1-2m}}=1。 \qquad (e)$$

上式中如选取适当的C值则可表示一椭园方程，所以椭园截面的柱体的扭转问题可由此得到解决。

如设椭园截面的长半轴为a，短半轴为b（图9—6），其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。 \qquad (9—22)$$

将上式与（e）比较可得

$$\left.\begin{aligned}(1+2m)a^2&=-2C,\\(1-2m)b^2&=-2C。\end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

联解以上两式得

$$\left.\begin{aligned}m&=\frac{b^2-a^2}{2(a^2+b^2)},\\C&=-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}。\end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

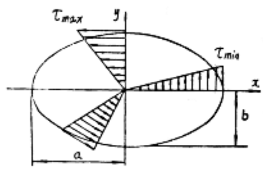

图 9—6

于是由（d）可得扭转函数

$$\varphi=2m\,xy=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy。 \qquad (9—23)$$

由（9—11）得抗扭刚度

$$D=\iint\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy$$

$$=\frac{2}{a^2+b^2}\quad(b^2x^2+a^2y^2)dxdy。$$

因积分

$$\iint x^2dxdy=I_y=\frac{\pi}{4}a^3b\ ,$$

$$\iint y^2dxdy=I_x=\frac{\pi}{4}ab^3。$$

故

$$D=\frac{2}{a^2+b^2}\left(\frac{\pi a^3b^3}{4}+\frac{\pi a^3b^3}{4}\right)=\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}。\qquad(9-24)$$

由（9—12）得单位扭转角

$$\alpha=\frac{M_z}{GD}=\frac{(a^2+b^2)M_z}{G\pi a^3b^3},\qquad(9-25)$$

由（9—4）得剪应力分量

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)=-\frac{2M_z}{\pi ab^3}y,\\ \tau_{yz}&=G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)=\frac{2M_z}{\pi a^3b}x。\end{aligned}\right\}\qquad(9-26)$$

由（9—2）得沿 z 轴向的位移

$$w=\alpha\varphi(x,y)=-\frac{(a^2-b^2)M_z}{G\pi a^3b^3}xy。\qquad(9-27)$$

再由（9—26）可得椭园截面上任意点处的合成剪应力为

$$\tau=\sqrt{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2}=\frac{2M_z}{\pi ab}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$$

$$=\frac{2M_z}{\pi a^3b^3}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}。\qquad(9-28)$$

合成剪应力 τ 的方向则由下式确定

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}=-\frac{b^2}{a^2}\quad\frac{x}{y}。\qquad(h)$$

因过椭园截面中心 0 的径线上各点的 x/y 值为常数，故由（h）可知，径线上各点

合成剪应力具有相同的方向（互相平行），如图 9 — 6 所示。

由椭园截面的边界方程（ 9 —22 ）可得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\ \frac{x}{y}。\qquad (i)$$

比较（ h ）和（ i ）两式可知，椭园截面边界上任意点处的合成剪应力 τ 与椭园的边界相切。

又由（ 9 —28 ）可知，椭园截面中心 0（ $x=0$, $y=0$ ）处的剪应力为零，最大剪应力则应发生在椭园截面的边界上。因沿椭园截面的边界有

$$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2。\qquad (j)$$

以（ j ）代入（ 9 —28 ）可得沿椭园边界各点的合成剪应力表达式为

$$\tau=\frac{2M_z}{\pi a^3b^2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}。\qquad (9-29)$$

显然，当 $x=0$ 时，（ 9 —29 ）取最大值，这说明合成剪应力 τ 的最大值发生在椭园短半轴两端的边界上，其值为

$$\tau_{max}=\frac{2M_z}{\pi ab^2}。\qquad (9-30)$$

当 $x=\pm a$ 时，（ 9 —29 ）取最小值，这说明合成剪应力 τ 的最小值发生在椭园长半轴两端的边界上，其值为

$$\tau_{min}=\frac{2M_z}{\pi a^2b}。\qquad (9-31)$$

又由（ 9 —27 ）可知，椭园截面柱体受扭后，截面上各点沿 z 轴向将发生不同的位移，由此可知，截面不再保持为平面而发生翘曲，我们称

$$w=C\qquad（常数）\qquad (k)$$

为等高线方程。由（ 9 —27 ）可知，椭园截面柱体受扭后的等高线方程为

$$w=-\frac{(a^2-b^2)M_z}{G\pi a^3b^3}xy=C。\qquad (9-32)$$

上式表明，椭园截面翘曲后的等高线在xoy平面上的投影为一双曲线，它以 x 轴和 y 轴为渐近线（图 9 — 7 ， a ），在 $a>b$ 的情况下，图 9 — 7 ，a 中的实线表示突出，虚线表凹入，翘曲后的形状示如图 9 — 7 ， b 。如端面可沿 z 轴向自由伸缩，则各截面的翘曲情况相同，此时，截面上不产生正应力，称为自由扭转。如端面固定不允许截面有翘曲，则截面上将产生正应力，称为约束扭转，此种情况，这里不作讨论。

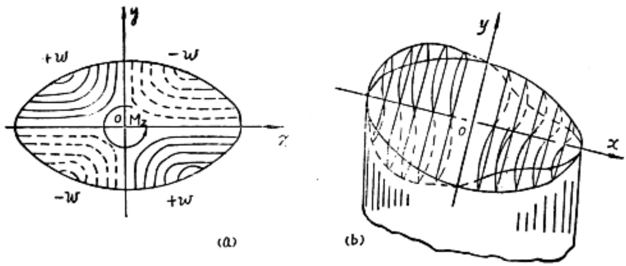

图　9—7

2．等边三角形截面柱体的扭转

设等边三角形ABC的高为$3a$，坐标原点取在三角形的形心0上（图9—8）。

由于等边三角形截面的边界是由三条直线所组成，而此三条直线方程的乘积应是三次多项式，因此可选解析函数为

$$f(z)=n(x+iy)^3=n(x^3-3xy^2)+in(3x^2y-y^3), \qquad (l)$$

式中，n为实常数。

由（9—21，a）可取扭转函数φ及其共轭函数ψ为

$$\varphi=-V=-n(3x^2y-y^3),$$

$$\psi=U=n(x^3-3xy^2)。\qquad (m)$$

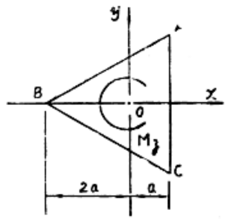

图　9—8

于是截面的边界方程为

$$n(x^3-3xy^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+C。\qquad (n)$$

如适当选取常数n和C的值，则（n）可表示一等边三角形的边界方程。以图9—8所示等边三角形为例，其三条周边方程为

AC边　　$x-a=0$；

AB边　　$x-\sqrt{3}y+2a=0$，

BC边　　$x+\sqrt{3}y+2a=0$。

因此，等边三角形ABC的边界方程为

$$(x-a)(x-\sqrt{3}y+2a)(x+\sqrt{3}y+2a)=0,$$

或

$$\frac{1}{3a}(x^3-3xy^2)+(x^2+y^2)-\frac{4}{3}a^2=0\,。\tag{o}$$

将（ n ）和（ o ）进行比较可得

$$-2n=\frac{1}{3a},\qquad 2c=-\frac{4}{3}a^2。$$

因此，由（ m ）得扭转函数为

$$\varphi=-n(3x^2y-y^3)=\frac{1}{6a}(3x^2y-y^3)。\tag{9—33}$$

将（ 9—33 ）代入（ 9—11 ）得抗扭刚度

$$D=\iint\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy=$$
$$\iint\left[x^2+y^2+\frac{x}{2a}\left(x^2-y^2\right)-\frac{xy^2}{a}\right]dxdy=\frac{9\sqrt{3}}{5}a^4。\tag{9—34}$$

由（ 9—12 ）得单位扭转角

$$\alpha=\frac{M_z}{GD}=\frac{M_z}{\frac{9\sqrt{3}}{5}Ga^4}=\frac{5\sqrt{3}}{27}\frac{M_z}{Ga^4}。\tag{9—35}$$

由（ 9—4 ）得剪应力分量

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)=\frac{5\sqrt{3}M_z}{27a^5}(x-a)y,\\ \tau_{yz}&=G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)=\frac{5\sqrt{3}M_z}{54a^5}(x^2+2ax-y^2)。\end{aligned}\right\}\tag{9—36}$$

再由（ 9—36 ）可得沿 x 轴（ $y=0$ ）上的剪应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=0,\\ \tau_{yz}&=\frac{5\sqrt{3}M_z}{54a^5}x(x+2a)。\end{aligned}\right\}\tag{9—37}$$

沿 x 轴上 τ_{yz} 的分布规律如图 8 — 9 所示。

最大剪应力发生在等边三角形三边上的中点处

$$\tau_{max}=(\tau_{yz})_{x=a}=\frac{5\sqrt{3}M_z}{18a^3}。\tag{9—38}$$

由（ 9—36 ）容易看出，在等边三角形的形心 0（ $x=0$ ，$y=0$ ）处，剪应力为零，且在