模糊数学与模糊识别

成都电訊工程学院应用物理研究所

一 九 八 四 年 六 月

前　　言

人们熟悉的统计数学，是用数学方法研究和处理具有随机性现象的数学。随机性现象是指某事件有明确的定义，但其发生与否是不确定的，即事件出现是偶然的。统计数学，也称为随机数学。其任务就是：从表面的偶然性中找出规律性。统计数学的出现，使数学应用范围，从必然现象扩大到偶然现象的领域。使人类认识和改造客观世界的能力提高了一步。

由于客观世界存在着大量随机现象，由此产生了随机数学。同样，由于客观世界存在着许许多多模糊现象，模糊数学也因此而生。

经常人们在谈论"高个子与矮个子"、"清洁与污染"、"美与丑"、"好听与不好听"、"冷与热"、"冰与水"等。这些概念都具有模糊性。模糊性是指客观事物差异的中间过渡中的"不分明性"，即"亦此亦彼"性。模糊数学是用数学方法研究和处理具有模糊性现象的数学。模糊数学的出现，使数学应用范围，从必然现象和偶然现象（随机现象），扩大到模糊现象的领域，进一步提高了人类认识和改造客观世界的能力

1965年，美国加里福尼亚大学教授查德（L.A.Zadeh）在论文"模糊集合"里给出模糊概念的定量表示法以来，模糊数学已有了很大的发展。目前，人们公认模糊数学已成为近代数学的一个重要分支。在理论上正在不断完善，其应用也将日益广泛。

模式识别、聚类分析和人工智能，是近代发展起来的新学科。模糊数学在这些领域中，已得到广泛应用。因为，这些学科的主要任务，是利用电子计算机模拟人的思维活动，综合和处理模糊信息，从而识别事物和得到正确结论，或者完成一些功能。模糊数学是描述人类思维活动的工具。

在模糊集合概念提出来以后，很快就用于模式识别。到1973年，模糊聚类分析法的资料已经很多。此后，模糊识别理论有较快的发展，特别是其应用范围已相当广泛，其应用效果也较显著。

目前，有关模糊识别的论文有数千篇，可是，关于模糊识别专著的书籍，国内大概只有两、三本外文版。有关的中文专著还没有。这本讲义是作为硕士研究生的教材。内容包括模糊数学的基本理论和模糊识别两大部分。侧重于基本理论和方法，以及工程应用，将难于掌握的一些问题，如收敛性证明等，根据教学实践情况，采取补充讲解方式。另外，以模糊语言，模糊逻辑为数学工具的识别方法，如有需要，可进行补充。已掌握模糊数学基本理论者，可从第三章开始阅读。

因时间仓促，来不及让其他老师审阅和修改，错误不少，请指正。

目　录

第一章　模糊集合的基本知识

§1 模糊子集的定义与表示方法

集合论是现代数学的基础。集合可以表现概念。在说明有哪些事物符合某个概念时，实际上这些事物就是一个"集合"。在考虑一个具体问题时，总是把议题局限在某一个范围内，这就是所谓的"论域"。亦即将被讨论的全体对象称为论域。常用大写字母如：U、X表示。论域中的每个对象，叫做元素，以相应的小写字母：u、x表示。

给定论域X，其中某一部分元素的全体叫做该论域的一个集合，常用A、B、C…、表示。对X中任一元素x及任意一个集合A，在x与A之间，要么x属于A（$x \in A$），要么x不属于A（$x \notin A$），二者必居其一，这是普通集合的基本特性。

集合的表示法：

1.若是n个有限元素时，用列举法表示成：

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \tag{1-1-1}$$

如在正整数域X内，小于10的奇数集合：

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

2.若是无限多元素时，用描述法表示成：

$$A=\{x / p(x)\} \tag{1-1-2}$$

其中p(x)是构成集合A的元素必须满足的条件。这式子当然也适于元素为有限的情况。例如：

$$A=\{x / x \text{ 为正奇数}, x<10\}$$

3.特征函数表示法：

$\mu_A(x)=$

$$u_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases} \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

通过元素的特征函数值和元素的一一对应，就能清楚地勾画一个集合。例如：一个五人的家庭成员记作x_1，x_2，x_3，x_4，x_5．在这一论域中，"男的"与"女的"集合可分别表示为：

男的$=0/x_1+1/x_2+1/x_3+0/x_4+1/x_5$

女的$=1/x_1+0/x_2+0/x_3+1/x_4+0/x_5$

注意：式中加号仅表示列举，而不是相加，每项分式不表示相除，其分母表示元素的名称，分子为该元素对应的特征函数值。

下面先介绍集合论的几个基本运算和符号。

设A、B是论域X上的两个集合，如果对任意$x\in X$，都有：

$x\in A\Rightarrow x\in B$（若$x\in A$则$x\in B$）

便称B包含A，记作$A\subseteq B$，且A叫做B的子集。

如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A、B相等。记作：

$A=B$

不包含论域X中任何元素的集合，叫做空集，记作ϕ。对于X的任意子集A，都有：

$\phi\subseteq A\subseteq X$

论域X的一切子集的集合，叫做集合的幂集，记作$P(x)$。

定义：

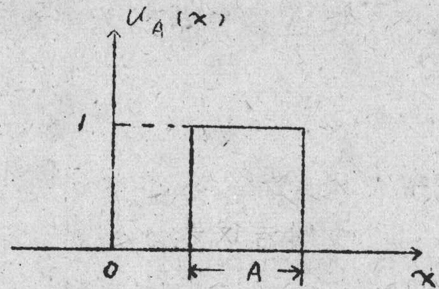
设A，$B\in P(x)$

$$A\cup B\triangleq\{x/x\in A\text{ 或 }x\in B\} \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

$$A \cap B \triangleq \left\{ x / x \in A \text{ 且 } x \in B \right\} \qquad (1-1-5)$$

$$\bar{A} \triangleq \left\{ x / x \notin A \right\} \qquad (1-1-6)$$

以上三式分别叫做A与B之并集、交集和余（补）集。而且，还可以导出集合运算的一些基本性质。可参阅有关集合论的书籍。在此，仅由定义得知特征函数有下列性质：



图(1-1-1) 集合A的特征函数

(1) $U_{\bar{A}}(x) = 1 - U_A(x)$

其中：$U_{\bar{A}}$ 是补集 $\bar{A}$ 的特征函数。

(2) $U_{A \cup B}(x) = max(U_A(x), U_B(x))$

即A和B并集的特征函数 $U_{A\cup B}(x)$，等于对A、B两特征函数取最大值。

(3) $U_{A \cap B}(x) = min(U_A(x), U_B(x))$

即A和B交集的特征函数 $U_{A\cap B}(x)$，等于对A、B两特征函数取最小值。

(4) $U_A(x) \equiv 0$　　仅当 $A = \phi$

(5) $U_A(x) \equiv 1$，　　仅当A等于论域U。

(6) 若 $A \subseteq B$，则对 $\forall x \in U$，有 $U_A(x) \leq U_B(x)$。

反之亦成立。

(7) 若 $A = B$，则对 $\forall x \in U$，有 $U_A(x) = U_B(x)$。

反之亦成立。

其中：$\forall x$ 表示"对于所有的x"。

普通集合只能表达确切概念，要表达模糊概念，需用模糊集合。

在现实中有很多概念，对于每一个对象（元素）是否符合它，不能作出完全肯定的回答。在符合与不符合之间，容许有中间状态，人们把这一概念称为模糊概念。它没有明确的外延，不能用普通集合表示。打破普通集合论中，元素对集合的绝对隶属关系。考虑到在 $x \in A$ 和 $x \notin A$ 之间的中间状态，提出"隶属程度"描述的想法，亦用隶属函数代替普通集合论特征函数。

定义

设给定论域X，X到〔0，1〕闭区间的任一映射：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: X \to [0, 1]$$
$$x \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

这确定了X的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$。μ_A 称做 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数。将 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 称作 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度。

模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所刻划。当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$ 时，说明元素 x 没有 $\underset{\sim}{A}$ 的属性，x 不从属于 $\underset{\sim}{A}$ 子集。而 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$，说明元素 x 具备 $\underset{\sim}{A}$ 的全部属性，从属于 $\underset{\sim}{A}$。而当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \frac{1}{2}$，说明 x 是否属于 $\underset{\sim}{A}$ 最模糊。

当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 值取0或1时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 变成普通集合的特征函数，模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 退化为一个普通集合。可见，普通集合是模糊子集的特殊情况。

另外，隶属度不反映元素 x 出现可能性的大小，所以它和概率有本质的区别。

例1-1-1；某小组有五个同学，亦即 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5。设论域：

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

现分别给每个同学的性格稳重度打分，按百分制给分，再

都除以100 。这实际上就是给定一个从论域X到［0，1］闭区间的映射。例如：

x_1	85分	即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)=0.85$
x_2	75分	即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)=0.75$
x_3	98分	即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3)=0.98$
x_4	30分	即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4)=0.30$
x_5	60分	即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_5)=0.60$

这样就确定了一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ ，它表示小组的同学对“性格稳重”这个模糊概念的符合程度。

如果论域X是由有限元素组成，叫有限论域。在有限论域上的模糊子集，可以用向量来表示。对于上例可写成：

$\underset{\sim}{A}=(0.85，0.75，0.98，0.30，0.60)$

在一般情况下，模糊子集：

$$\underset{\sim}{A}=(\mu_1，\mu_2，\cdots，\mu_n) \qquad (1-1-7)$$

其中：$\mu_i=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)=[0，1]，(i=1，2，\cdots，n)$ 是第 i 个元素对模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度。

模糊子集表示法——查德记号

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i/x_i \qquad (1-1-8)$$

也可记作：

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{i=1}^{n}\mu_i/x_i \qquad (1-1-9)$$

注意：查德记号决不是分式求和，只是一种符号而已。其“分母”是论域X中的元素，“分子”是相应元素的隶属度。当隶属度 [illegible] 为零时，那一项可以不写入。

还有另一种写法：

$$\underset{\sim}{A}_n=\{(\mu_i，x_i)^n\}=\{(\mu_1，x_1)，(\mu_2，x_2)，(\mu_3，x_3)，\cdots，(\mu_n，x_n)\} \qquad (1-1-10)$$

这些表示法只限于论域是有限的情况。若论域是无限的，就需将查得记号从有限域推广到一般情况。不管论域X是有限或连续，都可以表示为：

$$\underset{\sim}{A} = \int_{x \in X} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) / x \qquad (1-1-11)$$

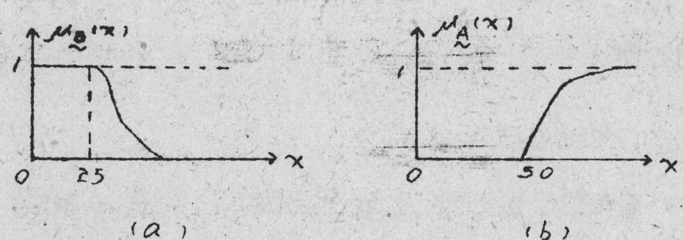
这积分号不是普通的积分，也不是求和，而是表示各个元素与隶属度对应关系的一个总括。

例：1-1-2：以年令为论域，取 X = [0, 100]，查德曾给出"年老" $\underset{\sim}{A}$ 与"年轻" $\underset{\sim}{B}$ 两个模糊子集的隶属函数如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 50 \\ \left[1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50 < x \leq 100 \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 25 \\ \left[1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25 < x < 100 \end{cases}$$

它们分别表示在图（1-1-2）中。



图（1-1-2） (a) "年轻"的隶属函数

(b) "年老"的隶属函数

同普通集合的幂集相对应，在模糊情况下，我们把论域X上的全体模糊子集所组成的集合，称作X的幂集，记作：F(X)。

由于模糊集合往往是某一论域的子集，所以在谈论模糊集合时，常々称它为"模糊子集"。以后我们都采用"模糊子集"或"模糊集合"。表示模糊子集的大写字母 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、… 有时写成 A、B、…。

§2、模糊集合的运算

普通集合的基本运算，如并、交、补、包含关系等，可以用特征函数表示。对于模糊集合同样有类似的基本运算。

设两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$，对其进行运算，实际上，就是对其逐点的隶属度作相应的运算。有：

(1) $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$　　对 $\forall x\in X$　　(1-2-1)

称其中的 $\bar{\underset{\sim}{A}}$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 的补集。而 $\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)$ 是补集 $\bar{\underset{\sim}{A}}$ 的隶属函数。

(2) $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$　　对 $\forall x\in X$　　(1-2-2)

其中：$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$ 称 $\underset{\sim}{C}$ 是两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的并集。$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的并集的隶属函数，它等于对 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 两子集的隶属函数取最大值。

(3) $\mu_{\underset{\sim}{D}}(x)=min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$　　对 $\forall x\in X$　　(1-2-3)

其中：$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 称 $\underset{\sim}{D}$ 是两模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的交集。$\mu_{\underset{\sim}{D}}(x)$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 交集的隶属函数。它等于对 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 两子集的隶属函数取最小值。

(4) $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$　　对 $\forall x\in X$　　仅当 $\underset{\sim}{A}=\phi$。

如果对所有 $x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$，则称 $\underset{\sim}{A}$ 为空集。

(5) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$　　对 $\forall x\in X$　　(1-2-4)

如果对任意 $x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，称 $\underset{\sim}{A}$ 是 $\underset{\sim}{B}$ 的子集，记为：$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$。

(6) $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$　　对 $\forall x\in X$　　(1-2-5)

如果对所有的 x，有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ 称两个模糊子集相等。其中符号 $\forall x$ 仍表示"对于所有的 x"。

以后为了运标方便起见，常用符号“∨”代替max，用符号“∧”代替min，分别称为最大，最小运标。

以上关于两个模糊子集的运标，和普通集合的运标相对应。如果隶属度的取值为0或1时，则$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$分别用特征函数代替，模糊集合也退化为普通集合。这些运标关系变成了前述的普通集合的运标。所以普通集合运标可视为模糊集合运标的特殊情况。

以连续的隶属函数为例，可用图（1-2-1）说明以上各种运标关系。

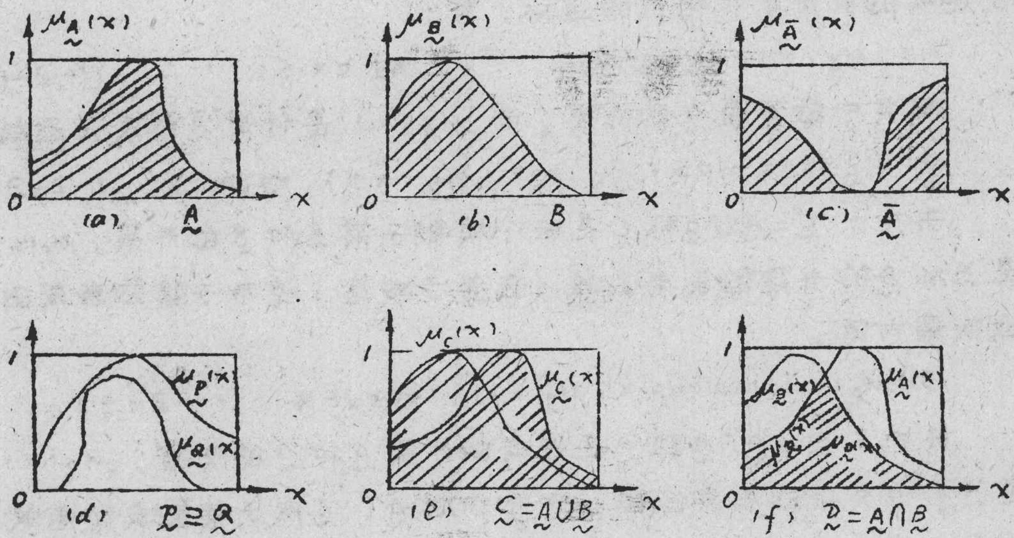


图 1-2-1

例：1-2-1

设论域：

$$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$\underset{\sim}{A}=0.2/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.5/x_5$$

$$\underset{\sim}{B}=(0.5/x_1+0.3/x_2+0.1/x_4+0.7/x_5)$$

则：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\frac{0.2\vee0.5}{x_1}+\frac{0.7\vee0.3}{x_2}+\frac{1\vee0}{x_3}+\frac{0\vee0.1}{x_4}+\frac{0.5\vee0.7}{x_5}$

$$=0.5/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.1/x_4+0.7/x_5$$

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\frac{0.2\wedge0.5}{x_1}+\frac{0.7\wedge0.3}{x_2}+\frac{1\wedge0}{x_3}+\frac{0\wedge0.1}{x_4}+\frac{0.5\wedge0.7}{x_5}$$

$$=0.2/x_1+0.3/x_2+0.5/x_5$$

根据例1-1-2的隶属函数解析表达式和模糊集合的运算法则得：

"年轻或年老"的隶属函数$\mu_{(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})}(x)$为：

$$\mu_{(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})}(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq 25\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 25<x\leq 51\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 51<x\leq 100\end{cases}$$

"又老又年轻"的隶属函数$\mu_{(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})}(x)$为：

$$\mu_{(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})}(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq 50\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<x\leq 51\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 51<x\leq 100\end{cases}$$

一般情况下，设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$是论域X的任意两个模糊集合，利用查德的表示法和运算规则有：

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\int_{x\in X}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x))/x \qquad (1-2-6)$$

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\int_{x\in X}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x))/x \qquad (1-2-7)$$

$$\overline{\underset{\sim}{A}}=\int_{x\in X}(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))/x \qquad (1-2-8)$$

3 模糊集合运标的基本性质

设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$和$\underset{\sim}{C}$是论域X的模糊子集，有：

1. 交换律

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A} \qquad (1-3-1)$$

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$$

2、结合律：

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C}) \qquad (1-3-2)$$

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$$

3、分配律：

$$(\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C}) \qquad (1-3-3)$$

$$(\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})$$

4、幂等律：

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A} \qquad (1-3-4)$$

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$$

5、同一律：

$$\underset{\sim}{A}\cap\phi=\phi$$

$$\underset{\sim}{A}\cup\phi=\underset{\sim}{A} \qquad (1-3-5)$$

$$\underset{\sim}{A}\cap X=\underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A}\cup X=X$$

其中：ϕ —— 空集，X —— 全集。

6、吸收律：

$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$

(1-3-6)

$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$

7．复归律：

$\overline{(\overline{\underset{\sim}{A}})}=\underset{\sim}{A}$ (1-3-7)

8、德、摩根律：

$\overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cup\overline{\underset{\sim}{B}}$

(1-3-8)

$\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}$

9．相補律：

$\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}=X$

(1-3-9)

$\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}=\phi$

一般说来，相补律未必一定成立。因为 $min[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]$ 在一般情况下，并不为易。同样，$max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]$ 在一般情况下也并非为 1 。

另外，除相补律模糊集合不一定满足外，共它的运标性质对普通集合和模糊集合是一样的。而且，如将性质 1 至 8 的表示式中的模糊子集，分别用它们的隶属函数代替，且把运标符号 $\cup$ 和 $\cap$ 分别用 $\vee$ 和 $\wedge$ 代替，共关系式仍然成立。

§4 模糊集合的代数运标：

对于模糊集合，除了并、交、補运标外，常用到的运标还有：

1. 代数积．

模糊集合的代数积记为：$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$。共隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\ ,\qquad \forall x\in X \qquad (1-4-1)$$

显然有：$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$

2、代数和：

模糊集合的代数和记为：$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}$。其隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}}(x)=\begin{cases}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x), & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\leq 1\\ 1 & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)>1\end{cases}\qquad(1-4-2)$$

3、逻辑和（环和）：

模糊集合的逻辑和记为：$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}$。其隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}(x),\quad\forall x\in X\qquad(1-4-3)$$

逻辑和可用集合的代数积及补运算表示成：

$$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}=\overline{(\overline{\underset{\sim}{A}}\cdot\overline{\underset{\sim}{B}})}$$

4、绝对差：

模糊集合的绝对差用 $|\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}|$ 表示。其隶属函数：

$$\mu_{|\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}|}(x)=|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)|,\quad\forall x\in X\qquad(1-4-4)$$

可以证明这些代数运算具有如下常用的性质：

1、交换律：

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{A}$$
$$(1-4-5)$$
$$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\oplus\underset{\sim}{A}$$

2、结合律、

$$(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})\cdot\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cdot(\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{C})$$
$$(1-4-6)$$
$$(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})\oplus\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\oplus(\underset{\sim}{B}\oplus\underset{\sim}{C})$$

3、常数运算法则：