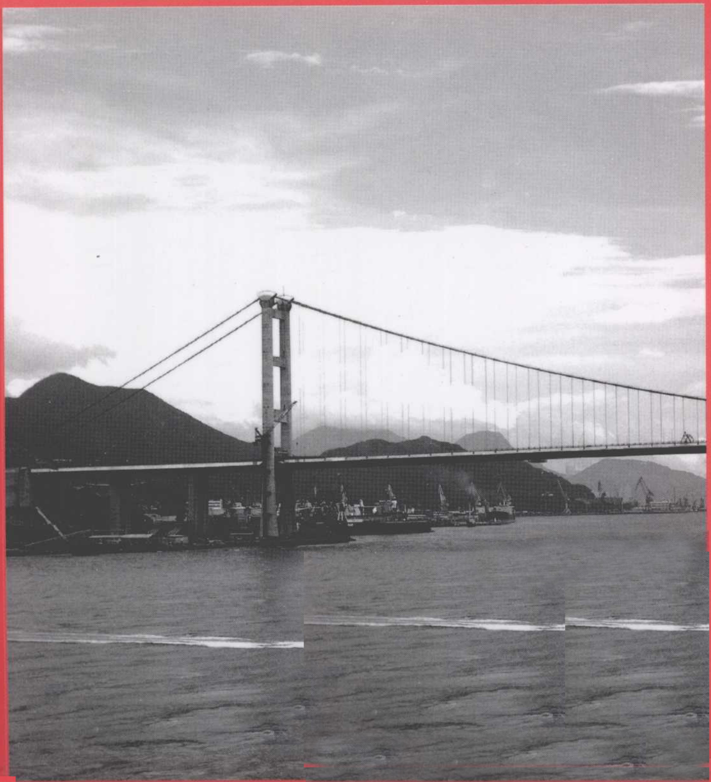
普通高等教育“十二五”规划教材

DISCRETE MATHEMATICS 离散数学

第2版

邱学绍　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

离散数学

第 2 版

主　编　邱学绍
副主编　李建民　吕红杰

机械工业出版社

本书系统地介绍了离散数学的经典内容，全书分为9章，分别介绍了命题逻辑、谓词逻辑、集合论、关系、函数、图论基础、特殊图类、代数系统、格和布尔代数。每节都有精选习题，书后有部分习题参考答案与提示。

本书在内容安排上循序渐进、通俗易懂、结构严谨、便于自学，适合计算机及相关专业本、专科学生作为教材，也可供一般科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/邱学绍主编．—2版．—北京：机械工业出版社，2010.10

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-32233-7

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①邱…　Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第200473号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　孙志强
版式设计：张世琴　责任校对：李秋荣
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2011年1月第2版第1次印刷
169mm×239mm・18.25印张・352千字
标准书号：ISBN 978-7-111-32233-7
定价：30.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	门户网：http://www.cmpbook.com
销 售 一 部：(010)68326294	
销 售 二 部：(010)88379649	教材网：http://www.cmpedu.com
读者服务部：(010)68993821	封面无防伪标均为盗版

第 2 版前言

离散数学是计算机科学与技术专业（计算机科学、计算机工程、软件和信息技术等专业）的核心课程，是教育部 2009 年《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》中 8 门核心课程之一，在专业教学体系中起到重要的基础理论支撑作用。

本书自 2005 年 9 月出版以来，在将近五年的时间里，得到了广大读者的支持和关注，也承蒙许多高等学校的厚爱，选作教科书。期间，广大同仁提出了许多宝贵意见，编者在多次的讲授中积累了更多经验，在此基础上编写了第 2 版。

本书在内容安排上仍然秉承以下特点：其一，由浅入深，循序渐进；其二，在引入概念时力求用学生熟悉的例子引入抽象的数学概念，使初学者对抽象的数学概念有亲近感，以方便他们理解和接受；其三，在每章节结尾安排的例题解析使学生能够及时巩固和深化所学知识。

由于离散数学有内容抽象、概念多、定理多等特点，为了使离散数学知识更易于接受，也希望学生不为这些特点所困惑，编者对本书在以下方面作出调整：

(1) 对代数结构的内容作了较大的调整。将原书中的代数系统与特殊的代数系统合并为一章，并减少了较难的一些内容，以使代数系统内容更通俗，更便于教与学。

(2) 对原书的章节作了一些调整。为了使知识更系统，将原书的第 2、3 两章放在最前面作为第 1、2 章，而将原书第 1 章改成了第 3 章，使本书的章节依次是：命题逻辑、谓词逻辑、集合论、关系、函数、图论基础、特殊图类、代数系统、格和布尔代数。

(3) 增加了习题答案与提示。本书初版中编有习题，但未提供答案，一些同仁和读者曾向主编索取未公开出版的习题题解。本次修订，经编者讨论后，除对习题作了一些调整和补充外，同时也附上了部分习题参考答案与提示。在此想强调一点，虽然书后附有部分习题

参考答案，但希望读者一定要先独立思考，这对于学习离散数学尤为重要。

第2版由邱学绍任主编，李建民、吕红杰任副主编，参加编写的还有黄松奇、张广开、辛向军。这次出版得到了郑州轻工业学院、郑州师范学院、平顶山学院和机械工业出版社的支持和鼓励，在此一并致谢。

由于水平有限，加之时间仓促，书中不当之处在所难免，敬请同行和广大读者不吝赐教。联系方式：qiuxueshao@126.com。

编　者

目　　录

第1章 命题逻辑

逻辑学主要分为辩证逻辑学和形式逻辑学，前者是以辩证法认识论的世界观为基础的逻辑学，而后者是以思维形式结构及其规律进行研究的类似语法的一门工具性学科。

思维的形式结构包括概念、判断和推理。其中，概念是思维的基本单位；判断是通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答；由一个或者几个判断推出另一个判断的思维过程就是推理。研究推理有很多方法，其中用数学方法来研究推理的规律的科学统称为数理逻辑，这里所谓的数学方法就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑也叫符号逻辑。

数理逻辑与数学的其他分支、计算机科学与技术、人工智能、语言学等学科均有密切联系。本书主要介绍数理逻辑最基本的内容：命题逻辑和谓词逻辑。本章介绍命题逻辑。

1.1 命题与命题联结词

1.1.1 命题

凡具有真假的陈述句就称为**命题**。命题通常用小写英文字母表示。

例如，“2是素数”是命题，可用符号表示为 p：2是素数。

作为命题的陈述句所表达的判断结果称为该命题的**真值**。一个命题的真值为“真”，用“T”或“1”表示，此时称该命题为**真命题**；一个命题的真值为“假”，用“F”或“0”表示，此时称该命题为**假命题**。

例 1-1 判断下列语句是否为命题。

(1) 5是素数。

(2) 3能被2整除。

(3) C++是一门计算机高级程序语言。

(4) 请关上门！

(5) 你好吗？

(6) 火星上有水。

(7) 我正在说假话。

(8) $x+y>5$。

(9) 3 是素数，而 6 是合数。

解 (4) 是祈使句，(5) 是疑问句，即都不是陈述句，故都不是命题；(8) 是陈述句，但由于 x、y 不确定，使得整个句子可真可假，即没有确定的判断结果，故不是命题。

(1)，(2)，(3)，(6)，(9) 是命题。(1) 是真命题；(2) 是假命题；(3) 是真命题；(6) 虽然至今还不知道火星上是否有水，但火星上是否有水是客观存在的，并且要么有，要么没有，只是现在人类还不知道，也就是说(6) 的真值是客观存在，而且是唯一的，因此它是命题。

因为(7) 既不能是真，也不能是假，所以它不是命题。像(7) 一样既不能为真，也不能为假的陈述句称为一个**悖论**，悖论不是命题。

例 1-2 (1) 太阳系外有宇宙人。

(2) 1962 年 2 月 3 日晚郑州市金水区成立。

注意 要把“已知其真假”与“本身具有真假”区别开来。在判断一个陈述句是否为命题时必须明确：只要能分辨出真假的语句就是命题。

(1) 是命题。虽然目前尚无法确定其真假，但从事物的本质而论，是可分辨真假的。

(2) 是命题。虽然一时难辨其真假，但其本身是有真假的，若能查到相关资料，结果自然就明了了。

容易看出，例 1-1、例 1-2 中给出的是命题的陈述句都不能进一步分解，类似这种不能再分的简单命题，称为**原子命题**。原子命题是命题逻辑中最基本、最小的单位。由作为原子命题的简单陈述句通过连词联结而成的命题，称为**复合命题**。

例 1-3 (1) 林刚和林强是三好学生。

(2) 离散数学是计算机专业的一门核心课程。

(3) 如果 $3+2<4$，那么太阳早上将由西边出来。

其中(1)、(3) 是复合命题，(2) 是原子命题。判断一个命题是否为复合命题的关键是看分解后各部分是否仍为命题。特别指出，有些在表面上互不相干的命题语句通过连词可组成复合命题，如本例中的(3)。

1.1.2 命题联结词

复合命题是用自然语言中的连词联结命题所组成的。为了便于研究，我们还需要对自然语言中的各种连词也用符号表示出来，以便得到形式化了的复合命题。在数理逻辑中，我们将这种自然语言连词的形式符号称为**命题逻辑联结词**。

1. 否定

定义 1-1 设 p 是命题，“非 p”称为 p 的否定式，记作 $\neg p$，称符号 $\neg$ 为**否定**

联结词。并规定，$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

例如，设 p 表示“3 是偶数”，则 p 的否定，即“3 不是偶数”可用符号表示为 $\neg p$。由于 p 的真值为 0，所以 $\neg p$ 真值为 1。

为了更好地理解联结词所代表的含义，引入一种表格方法——真值表。

表 1-1 就是否定联结词的真值表。

表 1-1 中的“1”、“0”分别表示标记在该列顶端的命题取值为真或假。

表　1-1

p	$\neg p$
0	1
1	0

2. 合取

定义 1-2　设 p、q 都是命题，复合命题“p 并且 q”称为 p 与 q 的**合取式**，记作 $p \wedge q$，称符号 $\wedge$ 为**合取联结词**。并规定，$p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

合取联结词的真值表见表 1-2。

例如，设 p 表示“2 是素数”，q 表示“2 是偶数”，则“2 是素数并且是偶数”可用符号表示为 $p \wedge q$。由于 p、q 真值均为 1，故 $p \wedge q$ 真值为 1。

3. 析取

定义 1-3　设 p、q 都是命题，复合命题“p 或者 q”称为 p 与 q 的**析取式**，记作 $p \vee q$，称符号 $\vee$ 为**析取联结词**。并规定，$p \vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少有一个为真。

析取联结词的真值表见表 1-3。

表　1-2

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表　1-3

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例如，设 p 表示“王燕学过英语”；q 表示“王燕学过法语”，则“王燕学过英语或法语”可用符号表示为 $p \vee q$。

4. 蕴含

定义 1-4　设 p、q 都是命题，复合命题“如果 p，那么 q”称为 p 与 q 的**蕴含式**，记作 $p \rightarrow q$，其中 p 称为其前件，q 称为其后件，称符号 $\rightarrow$ 为**蕴含联结词**。并规定，$p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假。

蕴含联结词的真值表见表 1-4。

例如，设 p 表示“我是老师”；q 表示“我年龄大了”，则“如果我是老师，那么我年龄大了”可用符号表示为 $p\rightarrow q$。若我是一名年轻教师，则此时 p 为真，q 为假，故 $p\rightarrow q$ 为假。

5. 等价

定义 1-5 设 p、q 都是命题，复合命题“p 当且仅当 q”称作 p 与 q 的**等价式**，记作 $p\leftrightarrow q$，称符号$\leftrightarrow$为**等价联结词**。并规定，$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p、q 同真假。

等价联结词的真值表见表 1-5。

表 1-4

p	q	$p\rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表 1-5

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如，设 p 表示“两圆的面积相等”；q 表示“两圆的半径相等”，则“两圆的面积相等当且仅当其半径相等”可用符号化表示为 $p\leftrightarrow q$。

为了叙述方便，我们将用符号表示命题及其联结词的过程称为**命题的符号化**。

对于命题的符号化我们有必要指出以下几点：

① 同一个命题联结词在自然语言中可能有不同的表达方法。

例 1-4 将下列命题符号化。

(1) 离散数学并非难学的一门课程。

(2) 明天我可能看电影也可能逛公园。

(3) 尽管他有病但他仍坚持工作。

(4) 倘若他病了他就不参加这次会议。

(5) 一个数是偶数的充要条件是该数能被 2 整除。

解 (1) 设 p：离散数学是难学的一门课程，则命题符号化为$\neg p$。其中“…并非…”逻辑含义上表示否定。

(2) 设 p：明天我看电影；q：明天我逛公园，则命题符号化为 $p\vee q$。其中“…可能…也可能…”在逻辑上具有析取的含义。

(3) 设 p：他有病；q：他坚持工作，则命题符号化为 $p\wedge q$。其中“尽管…但…”具有合取的逻辑含义。

(4) 设 p：他病了；q：他不参加这次会议，则命题符号化为 $p\rightarrow q$。其中“倘

若…就…”与逻辑上的蕴含具有相同的含义。

(5) 设 p：一个数是偶数；q：一个数能被 2 整除，则命题符号化为 $p \leftrightarrow q$。其中“…的充要条件是…”在逻辑上表示等价的含义。

② 两个逻辑上完全没有联系的命题可以加联结词以形成复合命题。

例 1-5 (1) p：2＋3＝5；q：有的人可以长生不老，则 $p \wedge q$ 仍是一个命题，它表示的含义是：“2＋3＝5”并且有的人可以长生不老。虽然 p 是真命题，但显然 q 的真值为假，所以根据合取联结词的定义 $p \wedge q$ 是一个假命题。

(2) 在例 1-3(3) 中，令 r 表示“3＋2＜4”，s 表示“早上太阳将从西边出来”，则该语句符号化为 $r \rightarrow s$。由于 r 真值为假，所以整个命题的真值为真。

③ 自然语言中的“或”应注意加以区别。自然语言中的“或”有“可兼或”和“不可兼或”之分，前者在逻辑上就是析取，后者可转换后符号化。

例 1-6 符号化下列命题。

(1) 今天打雷或下雨。

(2) 他明天到北京或到广州。

解 设 p：今天打雷；q：今天下雨；r：他明天到北京；s：他明天到广州。

(1) 中的“或”是“可兼或”，也就是说可以打雷，也可以下雨，还可以既打雷又下雨，所以命题符号化为 $p \vee q$。

(2) 中的“或”是“不可兼或”，因为他只能到一个地方，所以不能用逻辑联结词 $\vee$ 来符号化，我们可以转换为“他明天到北京且不到广州或者他明天到广州且不到北京”来符号化 $(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$。

④ 对蕴含要注意区分前件与后件。

例 1-7 符号化下列命题。

(1) 只要天下雨，我就坐公共汽车上班。

(2) 只有天下雨，我才坐公共汽车上班。

(3) 我是坐公共汽车上班的，因为天下雨了。

解 设 p：天下雨；q：我坐公共汽车上班。

(1) 符号化为 $p \rightarrow q$，因为 p 是 q 的充分条件。

(2) 符号化为 $q \rightarrow p$，因为 p 是 q 的必要条件。

(3) 符号化为 $q \rightarrow p$，原因同(2)。

⑤ 在符号化命题时，需要注意复合命题和原子命题的区别。

例 1-8 符号化下列命题。

(1) 张刚和张强都是三好学生。

(2) 张刚和张强是同桌。

解 (1) 是应用合取联结词联结“张刚是三好学生”和“张强是三好学生”组成的复合命题，若设 p：张刚是三好学生；q：张强是三好学生，则可符号化为

$p \wedge q$。

(2) 仅是原子命题，“和”在这里连接的是“张刚”和“张强”，因为若对语句进一步分解，“张刚是同桌”、“张强是同桌”都不再是命题，故可符号化为 r。

⑥　逻辑联结词也称为逻辑运算符，可以规定相应的运算次序。

规定逻辑联结词的优先级从高到低依次为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，并可以用“(　)”来改变运算的优先次序。求复合命题的真值时，先运算括号内的部分，没有括号限制的按优先级从高到低的顺序运算。对于同一优先级或同一个联结词，按从左到右的顺序运算。

例 1-9　符号化下列命题，并按照逻辑运算顺序求其真值。

(1) 如果飞机速度没有汽车快，并且在二进制数运算中 01＋10＝11，那么地球是静止的或者人是可以长生不老的。

(2) 如果人可以长生不老或者在二进制数运算中 01＋10＝11，那么汽车比飞机速度快或者地球是静止的。

解　设 p:飞机比汽车速度快；q:在二进制数运算中 01＋10＝11；r：地球是静止的；s：人可以长生不老。

(1) 符号化为$(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$。因为 p、q 真值为 1，所以$\neg p$ 真值为 0，$\neg p \wedge q$ 真值为 0，故$(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$的真值为 1。

(2) 可符号化为$(s \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r)$。因为 p、q 真值为 1，r、s 真值为 0，所以 $s \vee q$ 真值为 1，$\neg p$ 真值为 0，$\neg p \vee r$ 真值为 0，故$(s \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r)$的真值为 0。

习题 1.1

1. 判断下列语句是否为命题，为什么？若是命题请说明是真命题还是假命题？

(1) $a+b$。

(2) $x>0$。

(3) 你说什么？

(4) 今天天气多好呀！

(5) 我明天或者后天去郑州。

(6) 我明天去郑州或后天去郑州是谣传。

(7) 一个整数为偶数当且仅当它能被 2 整除。

(8) 这个命题是假的。

(9) 太阳是不会发光的。

2. 判断下列语句是否为命题，为什么？若是命题判断是原子命题还是复合命题，并把复合命题符号化，要求符号化到原子命题。

(1) 他们明天或者后天去百货公司。

(2) 你能告诉我，我什么时候一定会死吗？你不能！

(3) 如果这个语句是命题，那么它就是个假命题。

(4) 李刚和李春是兄弟。

(5) 王海和李春在学习。

(6) 只要努力学习，就一定能取得优异成绩。

(7) 李春对李刚说："今天天气真好呀！"

(8) 你知道这个是真命题还是假命题就请告诉我！

(9) 王海不是女孩子。

3. 设 p 表示命题"李春迟到了"，q 表示命题"李春错过了考试"，r 表示命题"李春通过了考试"。请将下列命题翻译成自然语言(汉语)。

(1) $p \to q$。(2) $p \vee q \vee r$。(3) $p \leftrightarrow q$。(4) $(p \wedge q) \to \neg r$。

4. 设 p 表示命题"天下大雨"，q 表示命题"他乘公共汽车上班"，r 表示命题"他骑自行车上班"。请将下列命题符号化。

(1) 如果天不下大雨，他乘公共汽车上班或者骑自行车上班。

(2) 只要天下大雨，他就乘公共汽车上班。

(3) 只有天下大雨，他才乘公共汽车上班。

(4) 除非天下大雨，否则他不乘公共汽车上班。

1.2　命题公式及其分类

1.2.1　命题公式

上节我们讨论了命题的符号化，如果讨论的原子命题的真值是确定，即其真值或者是真(1)，或者是假(0)，我们称这样的原子命题为**命题常元**，相当于初等数学中的常数。初等数学中还有变量，相应的这里也有命题变元。取值 1(真)或 0(假)的变元称为**命题变元**。可用命题变元表示真值可以变化的陈述句，但命题变元不是命题。命题变元与命题常元的关系相当于初等数学中变量与常量的关系。今后也用小写字母 p，q，r，…表示命题变元。这样，p，q，r，…既可表示命题常元，又可表示命题变元，通常可以由上下文区别确定。

在符号形式的命题中，代表原子命题的符号有的代表命题常元，有的代表命题变元，因此对应的命题符号串就不一定是命题了，我们称之为**命题合式公式**，当使用联结词集{$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$}时，合式公式定义如下：

定义 1-6　(1) 单个命题常元(0，1)或单个变元 p，q，r，…，p_i，q_i，r_i，…是命题合式公式，并称之为**原子命题合式公式**。

(2) 若 A 是命题合式公式，则$\neg A$ 也是命题合式公式。

(3) 若 A、B 是命题合式公式，则 $A\wedge B$，$A\vee B$，$A\rightarrow B$，$A\leftrightarrow B$ 也是命题合式公式。

(4) 只有有限次地应用(1) ～(3) 构成的符号串才是命题合式公式。

今后，我们将命题合式公式称为**命题公式**或简称**公式**。

例如，$\neg(p\vee q)$，$(p\rightarrow r)\rightarrow q$ 等是公式；但 $pr\rightarrow q$，$\neg(p\vee q)\rightarrow\rightarrow r$ 等不是公式。

1.2.2 公式的赋值与分类

定义 1-7 设 A 是一个命题公式，p_1，p_2，…，p_n 为出现在 A 中的全部命题变元，给 p_1，p_2，…，p_n 各指定一个确定的真值，称为公式 A 关于 p_1，p_2，…，p_n 的一组**真值指派**，也称为对公式 A 的一个**赋值**或**解释**。若指定的一个赋值使 A 的真值为 1，则称该赋值为公式 A 的**成真赋值**；若使 A 的真值为 0，则称该赋值为公式 A 的**成假赋值**。

例如，公式$(p_1\vee\neg p_2)\wedge p_3$ 中，001(p_1，p_2，p_3 分别指派 0，0，1)，101，111 都是其成真赋值，而 000，010，011，100，110 都是其成假赋值。公式$(p\rightarrow q)\leftrightarrow q$ 中，01(p_1，p_2 分别指派 0，1)，10，11 都是其成真赋值，而 00 是其成假赋值。

由定义易知，含有 $n(n\geqslant 1)$个命题变元的命题公式，共有 2^n 组不同的赋值。将命题公式 A 在所有赋值下的取值情况列表，用类似于联结词真值表的形式表示出来，称之为命题公式 A 的**真值表**。

下面给出命题公式真值表具体的构造步骤：

(1) 找出公式 A 中含有的所有命题变元 p_1，p_2，…，p_n，列出所有可能的赋值(共 2^n 种)，建议按二进制数从小到大的顺序，即按照从 00…0 开始到 11…1 的顺序列出，以避免漏写或多写。

(2) 按由低到高的顺序写出各层次。

(3) 对应每一个赋值，计算公式 A 各层次公式的真值，直到计算出公式 A 的真值。

例 1-10 求下列命题公式的真值表。

(1) $A=(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$。

解 公式 $A=(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ 的真值表见表 1-6。

(2) $A=\neg(p\rightarrow q)\wedge q$。

解 公式 A 的真值表见表 1-7。

(3) $A=p\wedge(q\vee\neg r)$。

解 公式 A 的真值表见表 1-8。