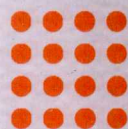


高等学校教材



XINHAO YU XITONG

信号与系统

范世贵 令前华 郭 婷 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

信号与系统

范世贵 (11) 目 录 献 词 序

范世贵 令前华 郭 婷 编著



西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部颁布的高等工业学校“信号与系统课程教学基本要求”编写的。全书内容共九章:信号与系统的基本概念、连续系统时域分析、连续信号频域分析、连续系统频域分析、连续系统 s 域分析、 s 域系统函数与系统 s 域模拟、离散信号与系统时域分析、离散信号与系统 z 域分析、状态变量法。每章后有习题。书后附录给出习题参考答案和两套试题及其解答。

本书可作为高等工业学校电子、通信、自动化、自控、计算机、信号检测、电力等专业的信号与系统课程的教材,也可供其他专业选用和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

信号与系统/范世贵,令前华,郭婷编著. —西安:西北工业大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5612-2731-2

I. 信… II. ①范… ②令…③郭… III. 信号系统 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 209500 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpu.com

印刷者:陕西向阳印务有限公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:25.75

字数:630 千字

版次:2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

定价:38.00 元

前言

信号与系统课程是电子、通信、自控、信息处理等专业的一门重要技术基础课,主要研究信号分析与系统分析的基本理论、方法与应用,在教学计划中起着承前启后的作用。本课程以工程数学和电路分析为基础,同时又是后续的技术基础课和专业基础课的基础,是学生合理知识结构中的重要组成部分,在发展智力、培养能力和良好的非智力素质方面,均起着极为重要的作用。

本书在编写中考虑了以下的原则和特点:

讲究教学法,遵循学生接受知识的规律,深入浅出,循序渐近。教材的宏观体系是,先连续,后离散;先信号,后系统;先时域,后变换域;先输入输出法,后状态变量法,并自始至终贯彻辩证思维的思想方法,突出应用和实用的原则,不搞烦琐哲学和形而上学。

坚持传授知识、发展智力与培养能力相统一的教学原则。在培养能力方面,着重培养学生的科学思维能力、创新思维能力、分析问题和解决问题的能力以及研究问题的方法论。注意培养学生良好的非智力素质,严谨的活学态度和科学作风,激励学生的学习精神。

注意与工程数学、电路基础、数字信号处理、通信原理、自动控制原理等课程的分工与协作,既体现了信号与系统课程自身的“相对独立性”,也体现了其“相对服务性”。

在讲述方式与内容结构上适合于学生自学,也适合于教师施教,努力做到主题突出,思路清晰,理论与实践结合,精选典型例题,以掌握基本理论、基本概念、基本方法和学会应用为目标。

在举例上以通信工程和自动控制工程为实际应用背景选材,重点内容是信号与系统的频域、 s 域、 z 域分析;加强了系统的系统函数与频率特性及其应用的分析;加强了系统的稳定性的分析与判定;对于离散信号与系统,加强了双边 z 变换与非因果系统的分析。

努力做到:物理描述与数学描述、信号分析与系统分析并重,输入输出法与状态变量法并重,时域分析法与变换域分析法并重,连续时间系统与离散时间系统并重,学理论、做习题与做实验并重。

适合于不同层次的学校使用。一本、二本、三本学校可以使用,在筛选一些内容后,高职、大专院校也可使用,不会给教师的施教和学生的自学造

成困难。

书中标有“*”号的内容不计在计划学时之内,为选学内容,供学有余力或有不同专业要求的学生自学,以拓宽知识面。

西北工业大学出版社出版的《信号与系统重点·难点·考点辅导与精析》一书,是与本书配套的教学与学习的参考书,此参考书对本书中的习题做了全部解答,并附有全国重点大学研究生招生信号与系统课程考试题及其详解(共七套)。

本书的编写与出版,得到了西北工业大学明德学院的支持和帮助。在编写中参阅了大量的国内外书籍、资料及试题库试题,编者在此一并致诚挚的谢意。

编 者

2009年10月

目 录

第一章 信号与系统的基本概念	1
1.1 信号的定义与分类	1
1.2 基本的连续信号及其时域特性	4
1.3 信号时域变换	17
1.4 信号时域运算	21
* 1.5 信号时域分解	24
1.6 系统的定义与分类	27
1.7 线性时不变系统的性质	30
1.8 线性系统分析概论	33
习题一	34
第二章 连续系统时域分析	38
2.1 连续系统的数学模型——微分方程与传输算子	39
* 2.2 系统微分方程的解——系统的全响应	43
2.3 系统的零输入响应及其求解	45
2.4 系统的单位冲激响应与单位阶跃响应及其求解	47
2.5 卷积积分	52
2.6 求系统零状态响应的卷积积分法	60
2.7 求系统全响应的零状态-零输入法	63
2.8 连续系统的时域模拟与框图	67
* 2.9 可逆系统与不可逆系统	70
习题二	73
第三章 连续信号频域分析	77
3.1 非正弦周期函数展开成傅里叶级数	77
3.2 非正弦周期信号的频谱	84
3.3 非周期信号的频谱	89
3.4 傅里叶变换的性质	94
3.5 周期信号的傅里叶变换	109
* 3.6 傅里叶正变换与反变换之间的对称性	115

* 3.7 功率信号与功率谱,能量信号与能量谱·····	117
习题三·····	122
第四章 连续系统频域分析·····	126
4.1 频域系统函数 ·····	126
4.2 非周期信号激励下系统的零状态响应及其求解 ·····	129
4.3 无失真传输系统及其条件 ·····	131
4.4 理想低通滤波器及其响应特性 ·····	136
* 4.5 其他类型的理想滤波器及其单位冲激响应 ·····	139
4.6 调制与解调系统 ·····	142
4.7 系统的正弦稳态响应及其求解 ·····	151
* 4.8 非正弦周期信号激励下系统的稳态响应 ·····	154
4.9 抽样信号与抽样定理 ·····	159
习题四·····	167
第五章 连续系统 s 域分析 ·····	173
5.1 单边拉普拉斯变换 ·····	173
5.2 电路基尔霍夫定律的 s 域形式 ·····	184
5.3 电路元件伏安关系的 s 域形式 ·····	184
5.4 s 域阻抗与 s 域导纳·····	189
5.5 连续系统 s 域分析法 ·····	190
* 5.6 用单边拉普拉斯变换法求解系统的微分方程 ·····	193
* 5.7 双边拉普拉斯变换 ·····	195
习题五·····	198
第六章 s 域系统函数与系统 s 域模拟 ·····	202
6.1 s 域系统函数 ·····	202
6.2 系统函数的一般表示式及其零、极点图·····	203
* 6.3 系统的 s 域模拟图与框图 ·····	207
6.4 系统的信号流图与梅森公式 ·····	215
6.5 系统函数 $H(s)$ 的应用 ·····	224
6.6 系统的稳定性及其判定 ·····	237
* 6.7 全通函数与最小相移函数 ·····	243
* 6.8 互为逆系统的系统函数 ·····	247
* 6.9 反馈系统 ·····	249
习题六·····	252
第七章 离散信号与系统时域分析·····	258
7.1 离散信号及其时域特性 ·····	258

7.2 离散系统及其数学模型——差分方程	269
7.3 线性时不变离散系统的性质	273
7.4 离散系统的零输入响应及其求解	274
7.5 离散系统的单位序列响应及其求解	276
7.6 离散系统的零状态响应及其求解——卷积和法	278
7.7 求离散系统全响应的零状态-零输入法	279
7.8 离散系统的稳定性在时域中的充要条件	283
习题七	283
第八章 离散信号与系统 z 域分析	288
8.1 离散信号 z 域分析—— z 变换	288
8.2 离散系统 z 域分析法	300
8.3 z 域系统函数 $H(z)$	301
8.4 离散系统的 z 域模拟图与信号流图	306
8.5 离散系统函数 $H(z)$ 的应用	309
* 8.6 离散系统的稳定性及其判定	327
习题八	331
第九章 状态变量法	337
9.1 状态变量法的基本概念与定义	337
9.2 连续系统状态方程与输出方程的列写	340
9.3 连续系统状态方程与输出方程的 s 域解法	350
9.4 连续系统状态方程与输出方程的时域解法	356
9.5 离散系统状态变量分析	360
* 9.6 由状态方程判断系统的稳定性	370
习题九	372
附 录	378
一、习题参考答案	378
二、西北工业大学明德学院信号与系统课程期末考试题及解答	394
三、西北工业大学信号与系统课程期末考试题及解答	399
参考文献	404

第一章 信号与系统的基本概念

内容提要

本章讲述信号与系统的基本概念。信号的定义与分类,基本的连续信号及其时域特性,信号的时域变换,信号的时域运算,信号的时域分解。系统的定义与分类,线性时不变系统的性质,线性系统分析概论。

1.1 信号的定义与分类

一、信号的定义

广义地说,信号就是随时间和空间变化的某种物理量或物理现象。例如在通信工程中,一般将语言、文字、图像、数据等统称为消息,在消息中包含着一定量的信息。通信就是从一方向另一方传送消息,给对方以信息。但传送消息必须借助于一定形式的信号(光信号、电信号等)才能传送和进行各种处理。因而,信号是消息的载体,是消息的表现形式,是通信的客观对象,而消息则是信号的内容。

若信号表现为电压、电流、电荷,则称为电信号,它是现代科学技术中应用最广泛的信号。本书将只涉及电信号。

信号通常是时间变量 t 的函数。信号随时间变量 t 变化的函数曲线称为信号的波形。

应当注意,信号与函数在概念的内涵与外延上是有区别的。信号一般是时间变量 t 的函数,但函数并不一定都是信号,信号是实际的物理量或物理现象,而函数则可能只是一种抽象的数学定义。

本书对信号与函数两个概念混用,不予区分。例如正弦信号也说成正弦函数,或者相反;凡提到函数,指的均是信号。

信号的特性可从两方面来描述,即时域特性与频域特性。信号的时域特性指的是信号的波形,出现时间的先后,持续时间的长短,随时间变化的快慢和大小,重复周期的长短等。信号时域特性的这些表现,反映了信号中所包含的信息内容。信号频域特性的内涵,我们将在第三章中阐述。信号的特性还有它的功率和能量。

二、信号的分类

按不同的分类原则,信号可分为:

(1) 确定信号与随机信号。按信号随时间变化的规律来分,信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号是指能够表示为确定的时间函数的信号。当给定某一时间值时,信号有确定的对应数值,其所含信息量的不同是体现在其分布值随时间或空间的变化规律上。电路基础课程中研究的正弦信号、指数信号、各种周期信号等都是确定信号的例子。

随机信号不是时间 t 的确定函数,它在每一个确定时刻的分布值是不确定的,只能通过大量试验测出它在某些确定时刻上取某些值的可能性的分布(概率分布)。空中的噪音,电路元件中的热噪声电流等,都是随机信号的例子。

实际传输的信号几乎都是随机信号。因为若传输的是确定信号,则对接收者来说,就不可能由它得知任何新的信息,从而失去了传送消息的本意。但是,在一定条件下,随机信号也会表现出某种确定性,例如在一个较长的时间内随时间变化的规律比较确定,即可近似地看成是确定信号。

随机信号是统计无线电理论研究的对象。本书中只研究确定信号。

(2) 连续时间信号与离散时间信号。按自变量 t 取值的连续与否来分,信号有连续时间信号与离散时间信号之分,分别简称为连续信号与离散信号。

连续信号自变量 t 的取值是连续的,电路基础课程中所引入的信号都是连续信号。离散信号自变量 t 的取值不是连续而是离散的,其定义与内涵,在本书第七、八两章中介绍。

(3) 周期信号与非周期信号。设信号 $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$,若存在一个常数 T ,使得

$$f(t - nT) = f(t) \quad n \in \mathbf{Z} \quad (1-1)$$

则称 $f(t)$ 是以 T 为周期的周期信号。由此定义看出,周期信号有三个特点:

- 1) 周期信号必须在时间上是无始无终的,即自变量时间 t 的定义域为 $t \in \mathbf{R}$ 。
- 2) 随时间变化的规律必须具有周期性,其周期为 T 。
- 3) 在各周期内信号的波形完全一样。

不满足式(1-1)关系或上述特点的信号即为非周期信号。

(4) 正弦信号与非正弦信号。

(5) 功率信号与能量信号。

(6) 一维信号、二维信号与多维信号。电视图像是二维信号的例子。

本书主要讨论的时间信号是一维信号,用 $f(t)$ 表示。表示 $f(t)$ 的曲线,称为信号的波形。

三、有关信号的几个名词

以下用 $f(t)$ 表示信号。

1. 有时限信号与无时限信号

若在有限时间区间 $(t_1 < t < t_2)$ 内信号 $f(t) \neq 0$,而在此时间区间以外,信号 $f(t) = 0$,则此信号为有时限信号,简称时限信号,否则为无时限信号。

2. 有始信号与有终信号

设 t_1 为实常数。当 $t < t_1$ 时 $f(t) = 0$,当 $t > t_1$ 时 $f(t) \neq 0$,则 $f(t)$ 为有始信号,其起始时刻为 t_1 。设 t_2 为实常数。当 $t > t_2$ 时 $f(t) = 0$,当 $t < t_2$ 时 $f(t) \neq 0$,则 $f(t)$ 为有终信号。

其终止时刻为 t_2 。

3. 因果信号与反因果信号

当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$, 当 $t > 0$ 时 $f(t) \neq 0$, 则 $f(t)$ 为因果信号, 可用 $f(t)U(t)$ 表示。其中 $U(t)$ 为单位阶跃信号。因果信号为有始信号的特例。当 $t > 0$ 时 $f(t) = 0$, 当 $t < 0$ 时 $f(t) \neq 0$, 则 $f(t)$ 为反因果信号, 可用 $f(t)U(-t)$ 表示。反因果信号为有终信号的特例。

现将信号的主要分类形式汇总于表 1-1-1 中, 以便复习和记忆。

表 1-1-1 信号的主要分类形式

序 号	分 类	定 义
1	连续时间信号	自变量 t 的取值是连续的, 即 $t \in \mathbf{R} \quad f(t), t \in \mathbf{R}$
	离散时间信号	自变量 k 的取值是离散的, 即 $k \in \mathbf{Z} \quad f(k), k \in \mathbf{Z}$
2	周期信号	具有周期性, 周期为 T , 无始无终 $f(t+nT) = f(t)$
	非周期信号	不具有周期性 $f(t+nt) \neq f(t)$
3	模拟信号	即连续时间信号
	数字信号	对连续时间信号先离散化, 再对离散信号进行量化后的信号, 为数字信号
4	非量化信号	未经过量化的信号
	量化信号	经过量化后的信号
5	因果信号	$t < 0$ 时, $f(t) = 0$; $t > 0$ 时, $f(t) \neq 0$ 的信号
	反因果信号	$t < 0$ 时, $f(t) \neq 0$; $t > 0$ 时, $f(t) = 0$ 的信号
	非因果信号	$t < 0$ 时, $f(t) \neq 0$ 的信号
6	功率信号	若信号的平均功率 $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) ^2 dt = \text{有限值}$, 能量 $W = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^2 dt \rightarrow \infty$, 则为功率信号
7	能量信号	若信号的平均功率 $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) ^2 dt = 0$, 能量 $W = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^2 dt = \text{有限值}$, 则为能量信号
8	非功率非能量信号	若信号的平均功率 $P \neq \text{有限值}$, 能量 $W \neq \text{有限值}$, 则为非功率非能量信号

说明:

(1) 数字信号是离散信号, 但离散信号不一定是数字信号; 离散信号经过量化后才是数字信号, 而且数字信号的幅度不一定只取 1 和 0, 可以取任意的整数值。

(2) 两个连续周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的和信号 $f(t)$ 不一定是周期信号, 只有当这两个周期信号的周期之比 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ 为有理数时, 和信号 $f(t)$ 才是周期信号, 其周期 T 等于 T_1, T_2 的最小公倍数, 即 $T = nT_1 = mT_2$ 。

(3) 两个离散周期信号 $f_1(k)$ 与 $f_2(k)$ 的和信号 $f(k)$ 一定是周期信号, 其周期 N 等于 N_1, N_2 的最小公倍数, 即 $N = nN_1 = mN_2$ 。

(4) 直流信号和有界的周期信号均为功率信号; 阶跃信号和有始周期信号也是功率信号; 有界的非周期信号均为能量信号; 无界的周期信号 (例如 $\delta_T(t)$ 信号) 和无界的非周期信号 (例如 $\delta(t)$ 信号) 均为非功率非能量信号。一个信号只能是功率信号和能量信号两者中之一, 不会两者都是, 但可以两者都不是, 这就是非功率非能量信号。

(5) 关于各种信号的严格定义与性质, 随着课程的进行, 将会一一介绍。

1.2 基本的连续信号及其时域特性

所谓基本信号,是指在工程实际与理论研究中经常用到的信号。这些信号的波形及其时间函数表达式都十分简洁,用这些信号还可以组成一些比较复杂波形的信号。本节中仅介绍基本的连续信号,离散信号在第七章中介绍。

一、直流信号

直流信号的函数定义式为

$$f(t) = A \quad t \in \mathbf{R}$$

式中, A 为实常数,其波形如图 1-2-1 所示。若 $A=1$,则称为单位直流信号。直流信号也称常量信号。

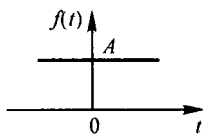


图 1-2-1

二、正弦信号

正弦信号的函数定义式为

$$f(t) = A \cos(\omega t + \psi) \quad t \in \mathbf{R}$$

式中, A , ω , ψ 分别称为正弦信号的振幅、角频率、初相角,均为实常数。

三、单位阶跃信号

单位阶跃信号一般用 $U(t)$ 表示*,其函数定义式为

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

其波形如图 1-2-2 所示。

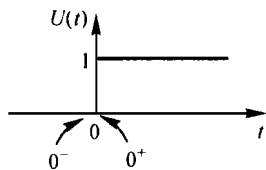


图 1-2-2

可见, $U(t)$ 在 $t=0$ 时刻发生了阶跃,从 $U(0^-)=0$ 阶跃到 $U(0^+)=1$,阶跃的幅度为 1。

单位阶跃信号 $U(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能,即将 $f(t)$ 乘以 $U(t)$,所得 $f(t)U(t)$ 即成为因果信号,如图 1-2-3 所示。

例 1-2-1 试画出下列函数的波形。

(1) $f(t) = U(t^2 + 3t + 2)$;

(2) $f(t) = U(\sin \pi t)$ 。

解 (1) $f(t) = U(t^2 + 3t + 2) =$

$$\begin{cases} 0 & t^2 + 3t + 2 < 0 \\ 1 & t^2 + 3t + 2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ 1 & t < -2, t > -1 \end{cases}$$

$f(t)$ 的波形如图 1-2-4 所示。

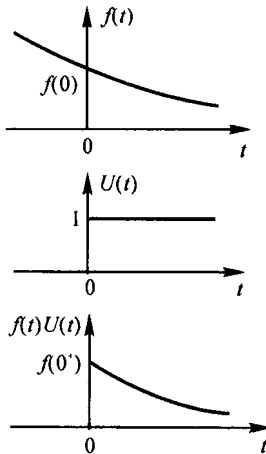


图 1-2-3

* 有的书上用 $\varepsilon(t)$ 表示单位阶跃信号。

$$(2) \quad f(t) = U(\sin \pi t) = \begin{cases} 1 & \sin \pi t > 0 \\ 0 & \sin \pi t < 0 \end{cases}$$

$f(t) = U(\sin \pi t)$ 的波形如图 1-2-5 所示。可见, $f(t)$ 为一周期信号, 其周期 $T=2$ 。

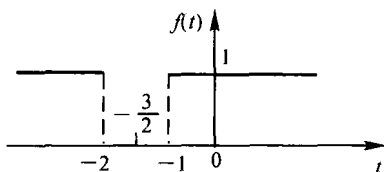


图 1-2-4

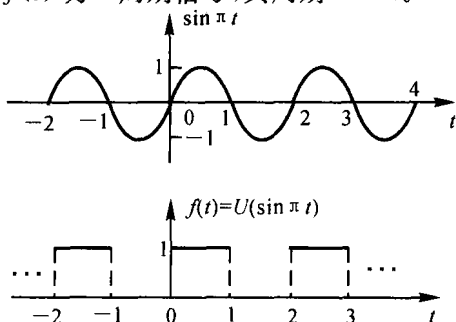


图 1-2-5

四、单位门信号

门宽为 τ 、门高为 1 的单位门信号常用符号 $G_\tau(t)$ 表示, 其函数定义式为

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & t > \frac{\tau}{2}, t < -\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

其波形如图 1-2-6(a) 所示。

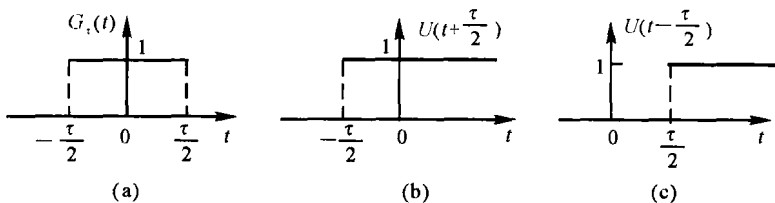


图 1-2-6

单位门信号可用两个分别在 $t = -\frac{\tau}{2}$ 和 $t = \frac{\tau}{2}$ 出现的单位阶跃信号之差表示, 如图 1-2-6(b), (c) 所示。即

$$G_\tau(t) = U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

五、单位冲激信号

1. 定义

单位冲激信号用 $\delta(t)$ 表示, 其函数定义式为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

且面积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

其图形如图 1-2-7(a) 所示,即用一粗箭头表示,箭头旁标以(1),表示 $\delta(t)$ 图形下的面积为 1,称为冲激函数的强度,简称冲激强度。

单位冲激信号可理解为门宽为 τ 、门高为 $\frac{1}{\tau}$ 的门函数 $G_\tau(t)$ (见图 1-2-7(b)) 在 $\tau \rightarrow 0$ 时的极限,即

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} G_\tau(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

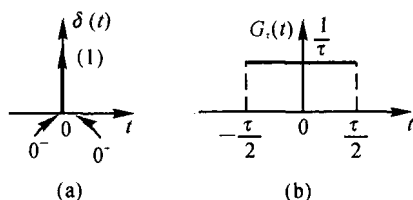


图 1-2-7

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau \rightarrow 0} G_\tau(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau(t) dt = 1$$

推广

(1) 设 t_0 为正实常数,则有

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1$$

其图形如图 1-2-8(a) 所示,即 $\delta(t)$ 在时间上延迟了 t_0 。

(2) 若冲激函数图形下的面积为 A ,则可写为

$$A\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t - t_0) dt = A \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = A$$

即冲激强度为 A ,其图形如图 1-2-8(b) 所示,箭头旁标以 (A) 。

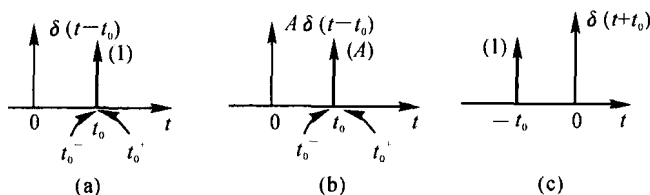


图 1-2-8

(3) 若 $\delta(t)$ 在时间上超前了 t_0 ,则应写为 $\delta(t + t_0)$,其图形如图 1-2-8(c) 所示。

例 1-2-2 试画出 $f(t) = \delta[\sin \pi t]$ 的波形。

$$\text{解 } f(t) = \delta[\sin \pi t] = \begin{cases} \infty & \sin \pi t = 0 \\ 0 & \sin \pi t \neq 0 \end{cases}$$

其波形如图 1-2-9 所示。

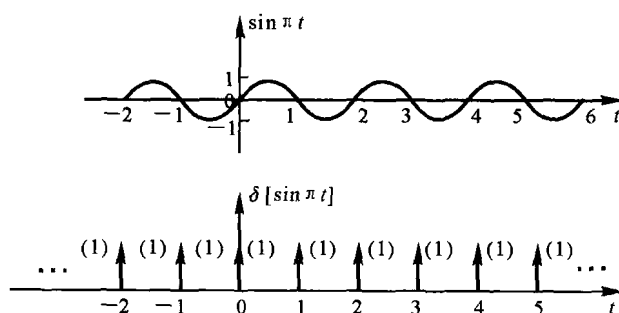


图 1-2-9

2. 性质

(1) 设 $f(t)$ 为任意有界函数, 且在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 时刻连续, 其函数值分别为 $f(0)$ 和 $f(t_0)$, 则有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

即时间函数 $f(t)$ 与单位冲激函数相乘, 就等于单位冲激函数出现时刻, $f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$ 与单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 相乘, 亦即使冲激函数的强度变为 $f(t_0)$, 如图 1-2-10 所示。

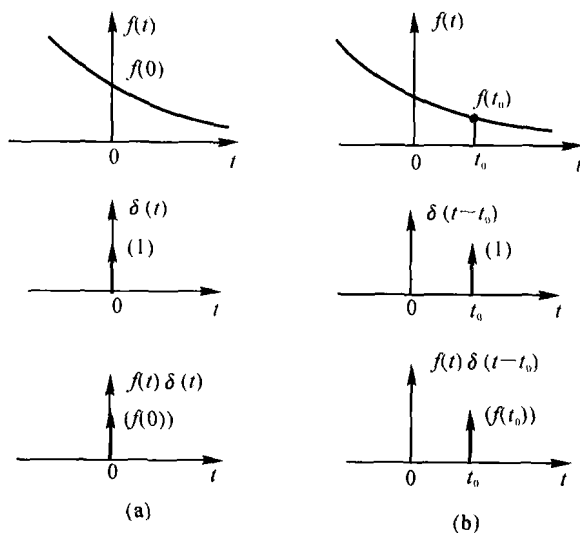


图 1-2-10

(2) 抽样性(筛选性)。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

即任意有界时间函数 $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_0)$ 相乘后, 在无穷区间 ($t \in \mathbf{R}$) 的积分值, 等于单位冲激函数出现时刻 $f(t)$ 的函数值 $f(t_0)$ 。此即为冲激函数的抽样性, 也称筛选性, $f(0)$ 或 $f(t_0)$ 即为 $f(t)$ 在抽样时刻的抽样值, $f(t)$ 为被抽样的函数。

(3) $\delta(t)$ 为偶函数, 即有

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

证明 给上式等号两端同乘以 $f(t)$ 并进行积分, 即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t) f(t) dt &= \int_{\infty}^{-\infty} \delta(t') f(-t') d(-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') f(-t') dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') f(0) dt' = f(0)\end{aligned}$$

又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

故得

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (\text{证毕})$$

推广

$$\delta(t - t_0) = \delta[-(t - t_0)] = \delta(t_0 - t)$$

$$(4) \delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t) \quad (a \text{ 为大于零的实常数})$$

证明 令 $t' = at$, 则 $t = \frac{1}{a}t'$, $dt = \frac{1}{a}dt'$; 且当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $t' \rightarrow -\infty$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $t' \rightarrow \infty$ 。

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') dt' = \frac{1}{a}$$

又

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \delta(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{a}$$

故得

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t) \quad (\text{证毕})$$

推广

$$\textcircled{1} \delta(at - t_0) = \delta\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] = \frac{1}{a} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(at) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{1}{a} \delta(t) dt = \frac{1}{a} f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{a} f(0)$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(at - t_0) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{a} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t_0}{a}\right) \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right) dt = \frac{1}{a} f\left(\frac{t_0}{a}\right)\end{aligned}$$

3. $\delta(t)$ 与 $U(t)$ 的关系

$\delta(t)$ 与 $U(t)$ 互为微分与积分的关系, 即

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad \delta(t) = \frac{dU(t)}{dt}$$

现证明前一式: 当 $t < 0$ 时有 $\delta(t) = 0$, 故有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t 0 \times d\tau = 0$$

当 $t > 0$ 时有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 0 \times d\tau + \int_0^{0^+} \delta(\tau) d\tau + \int_{0^+}^t 0 \times d\tau = 0 + 1 + 0 = 1$$

故得

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = U(t) \quad (\text{证毕})$$

式 $\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt}$ 的成立是不言而喻的, 无须证明。

推广

$$U(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{dU(t - t_0)}{dt}$$

例 1-2-3 求下列积分。

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt;$$

$$(2) \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{t-2} \delta(\tau) d\tau;$$

$$(4) \int_t^{+\infty} \delta(\tau) d\tau;$$

$$(5) \int_{t-2}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau.$$

解 (1) 原式 $= U(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = U(\infty) - U(-\infty) = 1 - 0 = 1$

(2) 原式 $= U(\tau) \Big|_{-\infty}^t = U(t) - U(-\infty) = U(t) - 0 = U(t)$

(3) 原式 $= U(\tau) \Big|_{-\infty}^{t-2} = U(t-2) - U(-\infty) = U(t-2) - 0 = U(t-2)$

(4) 原式 $= U(\tau) \Big|_t^{+\infty} = U(\infty) - U(t) = 1 - U(t) = U(-t) + U(t) - U(t) = U(-t)$

(5) 原式 $= U[-(t-2)] = U(2-t)$

例 1-2-4 求下列积分。

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 2t + 3) \delta(1 - 2t) dt;$$

$$(2) \int_{-\infty}^t (\tau^2 + 2\tau + 3) \delta(1 - 2\tau) d\tau;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{t-2} (\tau^2 + 2\tau + 3) \delta(1 - 2\tau) d\tau;$$

$$(4) \int_t^{+\infty} (\tau^2 + 2\tau + 3) \delta(1 - 2\tau) d\tau;$$

$$(5) \int_{t-2}^{+\infty} (\tau^2 + 2\tau + 3) \delta(1 - 2\tau) d\tau.$$

解 (1) 原式 $= \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 2t + 3) \delta\left[-2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 2t + 3) \delta\left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] dt =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 2t + 3) \times \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 3\right] \times \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt =$$

$$\frac{17}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{17}{8}$$

(2) 原式 $= \frac{17}{8} \int_{-\infty}^t \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right) d\tau = \frac{17}{8} \left[U\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\right]_{-\infty}^t = \frac{17}{8} \left[U\left(t - \frac{1}{2}\right) - U\left(-\infty - \frac{1}{2}\right)\right] =$