高级中学

代数下册（必修）

教学参考书

人民教育出版社

说　　明

本书是由人民教育出版社数学室将高级中学代数（甲种本）第二册教学参考书、高级中学代数（甲种本）第三册教学参考书和高级中学微积分初步（甲种本）全一册教学参考书的有关章节合并和删节而成的.

目　　录

第五章　不等式

I　教学要求

1. 使学生系统地掌握不等式的性质，并通过这些性质的证明，培养学生逻辑推理论证的能力．

2. 使学生掌握证明不等式的几种基本方法，掌握两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一重要定理，并能运用它们去解决一些有关的问题，从而进一步培养学生逻辑推理论证的能力，培养学生分析问题、解决问题的能力．

3. 在复习、总结一元一次不等式、一元一次不等式组和一元二次不等式的解法的基础上，使学生掌握一些其他不等式的解法．

4. 使学生掌握含有绝对值的不等式的基础知识，为今后进一步学习数学打好基础．

5. 通过不等式在各方面的广泛应用，使学生理解现实世界中的量，不等是普遍的，绝对的，而相等则是局部的，相对的，从而对学生进行辩证唯物主义教育．

II　教材分析和教学建议

本章教材是在初中介绍了不等式的概念，学习了一元一次不等式、一元一次不等式组和一元二次不等式的解法的基

础上，研究了不等式的证明，对不等式解法作了系统的复习和整理，并且加以充实和提高.

本章教材内容分为五部分. 第一部分讲不等式的基本概念. 第二部分讲不等式的性质，一共讲了五个定理和三个推论，并给出了严格的证明. 不等式的其他性质，都可由它们推导出来. 第三部分讲不等式的证明，通过九个例题，分别介绍了证明不等式时一些常用的基本方法——比较法、综合法和分析法. 在这里，还介绍了 n 个正数的算术平均数和几何平均数这一重要概念，并就 $n=2,3$ 时，对算术平均数不小于几何平均数进行了证明. 第四部分讲不等式的解法. 在这里，首先对一元一次不等式、一元一次不等式组和一元二次不等式的解法进行了复习、总结，然后分别介绍了分式不等式、无理不等式和简单的超越不等式的解法. 第五部分讲含有绝对值的不等式. 在这一部分里，首先复习了绝对值的有关基本知识，然后介绍了含有绝对值的不等式的两个基本定理（在“复数”一章中还可以看到，它们可以推广到复数中去）. 在例题中，还介绍了含有绝对值的不等式的解法和证明.

本章教材中，不等式的证明和解不等式是重点，同时也是一个难点. 不等式的性质和含有绝对值的不等式是本章的又一个难点. 掌握不等式的意义及实数运算的符号法则，是学好这一章的关键. 本章练习、习题数量较多，有的又有一定难度. 教学时，应根据学生实际情况选用.

本章教学约需 22 课时，具体分配如下（仅供参考）：

5.1　不等式　　约 2 课时

5.2　不等式的性质　　约 3 课时

5.1　不等式

1. 这一节内容不多，但比较重要，是学本章的出发点. 一开始指出："我们已经学过一些简单的不等式"，并列举了四个不等式. 既然是已经学过的内容，那么，根据实际情况，可以把不等式的有关知识复习一下，使之起到承上启下的作用. 在这里，还以列举的四个不等式为例，介绍了同向、异向不等式的意义. 接着指出：

对于任意两个实数 a,b 来说，当且仅当 $a-b>0$ 时，$a>b$；当且仅当 $a-b<0$ 时，$a<b$；当且仅当 $a-b=0$ 时，$a=b$. 这就是说：

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$
$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b;$$
$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b.$$

应该看到，上式中的左边部分反映的是实数的运算性质，而右边部分反映的则是实数的大小顺序，合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系. 它是本章整个内容的基础，是不等式的证明和解不等式的主要依据. 因此，在教学中必须给予高度的重视.

2. 由于判断两个实数 a 与 b 的大小，归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号（注意是指差的符号，至于差本身究竟是多少，在这里无关紧要）. 因此，如果设 $a-b=m$，而 m 又可表示为某

些实数运算的结果，那么要确定 m(即 $a-b$)的符号，必然又要归结到实数运算的符号法则. 因此，在不等式的教学中，实数运算的符号法则，是一个很重要的基础知识，可以根据实际情况作简要的复习.

5.2 不等式的性质

1. 定理 1(对称性)和定理 2(传递性)，学生是容易理解的. 但对它们进行证明，却是比较困难的. 一是学生可能认为没有必要进行证明，二是学生可能不知道如何证明. 为了引起重视，养成学生用逻辑推理进行数学证明的习惯，教学时可以向学生提出如下问题："如果 $a>b$，$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$谁大？"针对学生回答中可能出现的错误，来说明证明的必要性. 然后，可以让学生回顾一下实数的运算性质与大小顺序之间的关系，以及实数运算的符号法则，最后再引导学生进行证明. 这里要提醒学生注意：定理 1 中的箭头是双向箭头，而定理 2 中的箭头是单向箭头，它们的含义是不同的.

2. 定理 3 及其推论，学生也是容易理解的. 在这里应该着重向学生指出：定理 3 是不等式移项法则的根据，它的推论则是同向不等式相加法则的根据. 此外，定理 3 的逆命题也是真的.

3. 定理 4 是不等式的一个很重要的性质，但学生不易理解，使用时容易出错. 讲解时，可先用具体数字，让学生分析比较，得出结论后，再一般地给予证明. 对于定理 4 还必须注意以下两点：

(1) 要强调 c 的符号，因为符号不同，结论也不同；

（2）其中 a,b 是任意实数，不要在强调 c 的符号时，又使学生误解，从而限制了 a,b，缩小了定理的应用范围.

4. 定理4的两个推论也很重要. 必须向学生强调指出，在这里，所有字母都表示正数和 n 为大于1的整数这类条件是必要的. 例如，仅有 $a>b, c>d$（而不是 $a>b>0, c>d>0$），就推不出 $ac>bd$ 的结论来；仅有 $a>b>0$，而无 n 为大于1的整数这个条件，就推不出 $a^n>b^n$ 的结论来（例如 $a>b>0\Rightarrow a^{-1}<b^{-1}$）.

5. 定理5的证明，用的是反证法. 因为反面有两种情形，即 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 和 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就"归谬"了事，而必须进行"穷举". 把定理4的推论2和定理5结合起来，还很容易把这一性质推广到正有理指数幂的情形，即如果 $a>b>0$，s 为正有理数，那么 $a^s>b^s$.

5.3 不等式的证明

1. 由于不等式的形式是多种多样的，所以不等式的证明方法也就不同. 在证明不等式的各种方法中，比较法是一种最基本、最重要的方法. 在这之前，证明不等式的性质时，已经用过这种方法. 但是在那里，问题比较简单，不等式两边的差的符号容易判断；而在这里，不等式两边的差的符号，一般地，必须在对它变形后才能判断. 因此，变形是比较法的一个步骤，但在这里，变形的目的，全在于判断它的符号，它与一般的化简有所不同. 至于怎样变形，教材中不仅作了说明，而且作了示范：教材上的例1，用的是配方法；教材上的例2，用的是因式分解法. 用比较法证明不等式的步骤大体是：作差——变形——判断符号. 它常用于两边的差是一个次数较高的多

项式或分式这一类不等式的证明.

2. 证明不等式,也可根据不等式定理来进行. 教材介绍了两个基本而又重要的不等式定理以及它们的推论，并通过例题，运用它们证明了一些不等式. 由此指出，证明不等式也可用另一种方法——综合法. 在教学时,要注意以下几点:

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的:前者只要求 a,b 都是实数，而后者则要求 a,b 都是正数；至于 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 和 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，两者的要求都是一样的,即 a,b,c 都是正数. 这些定理成立的条件,应要求学生一一搞清,以免生搬硬套,发生如下的一些错误:

$$\frac{(-1)+(-4)}{2}\geqslant\sqrt{(-1)\cdot(-4)}=2$$

(2) 这些公式都是带有等号的不等式,因此对定理中"当且仅当……时取'='号"这句话的理由也要搞清楚.

(3) 两个推论十分重要. 由它们不仅可以引出算术平均数和几何平均数这两个重要概念，而且可以进一步引伸出定理"n 个(n 是大于 1 的整数)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数"(见附录，不要向学生证明). 其中 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 是基础,因为它不仅应用广泛,而且 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ 也可由它推出. 现证明如下:

设 a,b, c 都是正数,$A=\frac{a+b+c}{3}$,那么 A 也是正数，且 $a+b+c=3A$,于是

$$A=\frac{a+b+c+A}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+A}{2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cA})$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cA}}$$

$$=\sqrt[4]{abcA}.$$

$\therefore\quad A^4\geqslant abcA,\ A\geqslant\sqrt[3]{abc}.$

$\therefore\quad \frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$

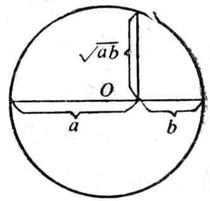

图 5-1

可以看出，当且仅当$a=b$，$c=A$，且$\sqrt{ab}=\sqrt{cA}$即$a=b=c(=A)$时取“=”号.

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的几何意义是“半径不小于半弦”(图 5-1).

(4) 当用上述公式来证明不等式时，应该使学生认识到，它们本身也是根据不等式的意义、性质或比较法证出的. 因此，凡是用它们可以获证的不等式，一般也可以直接根据不等式的意义、性质或比较法来证明. 教学时，可以根据实际情况，用不同的方法证明同一个问题，以开阔学生的思路.

3. 分析法是证不等式时一种常用的基本方法. 在证题不知从何下手时，有时可以运用分析法而获得解决. 对于恒等式的证明，同样可以运用.

用分析法论证“若 A 则 B”这个命题的模式是：

欲证命题 B 为真，

只需证命题 B_1 为真，从而又

只需证命题 B_2 为真，从而又

……… ………

只需证命题 A 为真.

今已知 A 真，故 B 必真.

可见分析法是执果索因，步步寻求上一步成立的充分条件. 写成简要的形式就是:

$$B \Longleftarrow B_1 \Longleftarrow B_2 \Longleftarrow \cdots \Longleftarrow B_n \Longleftarrow A.$$

教材上的例7，虽显示了分析法的优越性，但不十分突出，因为也可改用比较法证明如下:

因为 a, b, m 为正数，且 $a<b$，所以

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+m)-a(b+m)}{b(b+m)}$$

$$=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0,$$

所以

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

但是，对于教材上的例8，如果不用分析法，就不知应从何处下手了.

分析法和综合法是对立统一的两个方法，为了进行对比，教材中多次对于同一个命题，分别用这两种方法加以证明.

4. 证明不等式的方法，除教材中所介绍的一些基本方法外，还有其他一些方法. 教学中，主要应着眼于培养学生的能力，使学生能针对具体问题，进行具体分析，灵活地运用各种证法. 各种证明方法，只是为了教学的需要，才把它们分开来讲. 但在运用时，不仅可以考虑实际情况灵活选择，而且必要时，也可以综合运用它们去证明同一个问题.

5. 教材中介绍了几个(当 $n=2,3$ 时)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数. 这是一组重要的不等式,此外,还有一些重要的不等式,如柯西(Cauchy)不等式,n 个正数的调和平均数不大于它们的几何平均数,以及平方平均数不小于它们的算术平均数等等(请参看本章附录);都是以特例的形式,安排在习题中,用以培养学生分析问题和解决问题的能力. 这些名称和它们的一般性证明,都不要求向学生讲解.

6. 利用正数的算术平均数与几何平均数之间的关系,我们可以求某些非二次函数的最大值、最小值. 如教材第 11 页练习中的第 3 题,题中的函数 $x+\frac{16}{x}$ 不是二次函数,要求它在定义域 $(0,+\infty)$ 内的最小值,仅用学生过去学过的二次函数的知识是无法解决的,现在从 x 与 $\frac{16}{x}$ 的积为常数(即它们的几何平均数为常数)这一点出发,问题就很容易解决了.

在利用算术平均数与几何平均数的关系求某些函数的最大值、最小值时,应该使学生注意以下两点:

(1) 函数式中,各项(必要时,还要考虑常数项)必须都是正数. 例如对于函数式 $x+\frac{1}{x}$,当 $x<0$ 时,绝不能错误地认为关系式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 成立,并由此得出 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值是2. 事实上,当 $x<0$ 时,$x+\frac{1}{x}$ 的最大值是 -2,这是因为

$$x<0 \Longrightarrow -x>0,\ -\frac{1}{x}>0$$

$$\Longrightarrow -\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\geqslant 2$$

$$\Longrightarrow x+\frac{1}{x}\leqslant -2.$$

可以看出，最大值是-2，它在$x=-1$时取得.

(2) 函数式中，含变数的各项的和或积必须是常数，并且只有当各项相等时，才能利用算术平均数与几何平均数的关系求某些函数的最大值或最小值.

以上两点都是学生容易疏忽的地方，必须予以注意.

7. 证明不等式同证明其他数学命题一样，只要因果关系清楚，可以用“$\Longrightarrow$”来代替“因为……，所以……”，并省去加注理由的步骤. 为了方便，教材中有的证明用箭头，有的证明仍用传统格式，教学时可以根据具体情况，灵活运用.

5.4 不等式的解法

1. 等与不等是对立统一的两个概念. 研究等量关系，反映在教学上就是证明恒等式与解方程；研究不等量关系，反映在教学上就是证明不等式与解不等式. 解方程(组)与解不等式(组)有很多类似之处，但也有不少不同之点. 因此教学时，一方面应指出二者类似之处，以便学生从二者的联系上，建立解不等式的有关类似于解方程的概念；但更应指出二者不同之点，以便学生从二者的区别上掌握解不等式的方法.

2. 一元一次不等式(组)和一元二次不等式的解法，是解各种各样的不等式(组)的基础. 这部分内容虽然学生在初中已经学过，但在这里，则应要求学生达到正确、熟练的程度. 教学时不能一带而过，要给予足够的重视.

3. 解其他各种类型的不等式，关键要善于根据有关性质或定理，把它同解变形为一次、二次不等式(组). 同解变形过

程大体是这样的：如果不等式是超越不等式，则把它同解变形为代数不等式；如果代数不等式是无理不等式，则把它同解变形为有理不等式；如果有理不等式是分式不等式，则把它同解变形为整式不等式；如果整式不等式是高次不等式，则把它同解变形为一次、二次不等式(组)．在教学中特别要强调指出，每一步变形，都应是不等式的同解变形．

4．在解不等式 $f(x)>0$(或 <0)时，如果 $f(x)$ 可表示成几个数学式的积或商，那么根据实数运算的符号法则，可以把它化成等价的两个或多个不等式组（由各因子的符号所有可能的组合数决定）．于是原不等式的解集就是各不等式组的解集的并集．解分式(或高次)不等式就是属于这种情形．但在这里，由于各个不等式组的解集又是各该组内各个不等式的解集的交集，计算较烦，且容易出错，所以教材中对于例 4 提出了两种不同的解法，其目的是便于学生进行对比，显示出另一种解法——“表解法”的优点，从而使学生可以根据情况，灵活选择较简捷的解法．

5．在解指数与对数不等式时，其基本思路大体是：

（1）可以考虑把不等式的两边化成同底数的幂或同底数的对数的形式，然后再根据指数与对数函数的单调性，把它化为代数不等式．对于对数不等式还需注意各真数必须为正数．所以一个对数不等式，实际上是和某一不等式组等价．

（2）可以考虑令不等式中某一简单的指数式或对数式为 y，把原不等式代换成关于 y 的代数不等式，然后先对于 y 解不等式，再通过 y 来求出原不等式的解集．这实际上是换元法在解不等式中的应用．这是在教学中常用的一种化复杂为简

单、化难为易、化繁为简的重要方法.

5.5 含有绝对值的不等式

1. 教材首先复习了有关绝对值的基本概念和基础知识，即

$$|a|=\begin{cases}a & (\text{当 } a>0),\\ 0 & (\text{当 } a=0),\\ -a & (\text{当 } a<0),\end{cases}$$

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq0),$$

以及

$$|x|<a,\ |x|>a\quad(a>0)$$

型的不等式的解法.

我们知道：在 $a>0$ 时，

$$|x|<a\Longleftrightarrow x^2<a^2\Longleftrightarrow -a<x<a;$$

$$|x|>a\Longleftrightarrow x^2>a^2\Longleftrightarrow x>a \text{ 或 } x<-a.$$

这种把 $|x|<a, |x|>a(a>0)$ 和与它们等价的不等式及其解集联系起来是很必要的. 这是因为这些知识常常用到，还因为这种等价联系，运用起来也较方便.

以上都是本节的基础知识，必须使学生牢固地掌握好.

2. 定理 1 和定理 2 在形式上虽有不同，但实质上是等价的. 因为这里 a, b 是任意实数，只要用 $-b$ 代替 b，就可以由其中任一个推得另一个. 这里提出两个定理，只是为了运用方便.

3. 应该重点突出定理 1 的证明. 这个证明可能不易被学生接受. 为此，要注意讲清 $|x|=|-x|$ 及 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

定理 1 包括两部分，即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|; \tag{1}$$

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|. \tag{2}$$

而(2)式与$|a|\leqslant|a+b|+|b|$等价，再把它改写成

$$|(a+b)+(-b)|\leqslant|a+b|+|-b|$$

以后，就可发现本质上和(1)式一样，所以主要是证明(1)式.

为了加深学生对定理 1 的理解，可以向学生指出：定理1 的左、中、右三部分中，右边是绝对值的和，肯定是非负的；中间是和的绝对值，可能因为 a, b 一正一负要抵消一部分，但由于有绝对值，仍是非负的；左边是绝对值的差，当$b\neq0$时，肯定要抵消一部分，而且还可能是负的. 这样大、中、小的关系也就容易理解与记忆了. 至于其中的等号在什么情况下成立，问题比较复杂(特别是(2)式中的等号)，不必要求学生掌握，以免增加负担.

还应该看到定理 1 在后面学习的复数中可以得到推广，并有其几何意义.

4. 教材上的例 1 和例 2，主要是讲含有绝对值的不等式的解法. 解含有绝对值的不等式，关键的一步，就是要把它化为与之等价的不含绝对值的不等式. 迈出了这一步，以后就好办了.

还应该注意到，绝对值和算术根是有紧密联系的. 因此有些无理不等式，也可化为含有绝对值的不等式来解. 例如 $\sqrt{x^2-6x+9}<2$ 与 $|x-3|<2$ 等价.

5. 教材上的例 3 和例 4，主要是讲含有绝对值的不等式的证明. 在例 3 中，还有意使用了字母“ε”，其目的是为学