经济数学

JINGJI SHUXUE

主　编　吴　强　文　伟
副主编　葛　琳　彭仲元　李婉鸣

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

JINGJI SHUXUE

经济数学

主　编　吴　强　文　伟
副主编　葛　琳　彭仲元　李婉鸣

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是高职高专经济管理类专业系列教材的基础教材,是为了满足高职高专院校培养经济管理类人才的需要,并结合经济管理类各专业对经济数学教学内容的需求编写的.内容包括函数 极限 连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、多元函数微分学、常微分方程、行列式、矩阵、线性方程组与线性规划问题、概率论及数理统计.书后附有简易积分表,标准正态分布函数数值表,t 分布表,χ^2 分布临界值表,泊松分布数值表.

本书可作为高职高专院校经济类及管理类各专业的教学用书,也可供其他专业学生、数学教师及经济管理技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/吴强,文伟主编.—重庆:重庆大学出版社,2010.7

ISBN 978-7-5624-5512-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①吴…②文… Ⅲ.①经济数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 117298 号

经 济 数 学

主 编 吴 强 文 伟

副主编 葛 琳 彭仲元 李婉鸣

责任编辑:李定群 姚 胜 版式设计:李定群

责任校对:张洪梅 责任印制:张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:15.5 字数 387 千

2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5624-5512-7 定价:27.00 元

前　　言

我国近几年的高等教育,在培养高等技术应用型人才方面,高职高专院校起到了主力军的作用．教育部对高职高专院校的培养目标、办学模式和教学管理等,都有了明确的指导思想,为这类院校指明了正确的办学方向．根据教育部的有关指示精神和社会对高职高专毕业生的实际要求,我们为高职高专经济类和管理类各专业编写了这本《经济数学》教材．

在编写的过程中,充分考虑到高职高专经济类和管理类学科有关专业对经济数学的要求,力求用通俗的语言及直观形象的方式向读者介绍经济数学中最基础的知识．让读者了解并掌握经济数学中的重要概念、理论、方法以及它们的实际背景,进而定量地解决经济管理学科中的一些实际问题．本教材内容的选取充分体现了高职高专基础课教学中"以应用为目的,以必需为度"的原则,以"强化概念,注重应用"为依据．因而在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面,我们特别注重以下几点：

1. 本教材适用于经济类各专业大学一年级的学生．考虑到部分高职学生的实际情况,本教材在保持该学科知识体系完整性的基础上,尽量降低难度、注重应用．

2. 教材编写突出重点,分散难点,注意数学知识在经济学上的解释,强调直观描述和几何解释,适度淡化理论证明或推导,重点培养学生的抽象概括能力和实际应用能力．

3. 注重体现启发式教学和直观性教学的原则,注重贯彻由浅入深的教学原则,以有利于不同层次学生对知识的掌握．

4. 注重数学概念与实际问题的联系,特别是与经济问题的联系,着力培养学生用数学知识解决实际问题的能力．

5. 例题和习题内容丰富,布局合理．例题深浅适中,为学生提供理解和模仿的素材;每节后面有大量的习题,为学生提供思考与选择的素材,其中适当增加应用型题目,既为教师结合实际教学提供更大的选择空间,也为一些有意识强化训练自己数学技能的学生提供了方便．

全书以微积分学为核心内容,共分为 13 章,内容包括:函数、极限、连续;导数与微分;导数的应用;不定积分;定积分;定积分应用;多元函数微分学;常微分方程;行列式;矩阵;线性方程组与线性规划问题;概率论;数理统计．

参加本书编写工作的编者,均为广东省茂名职业技术学院多年从事数学教学的一线教师．本书由集体讨论,分章编写．由文伟、吴强任主编,葛琳、彭仲元、李婉鸣任副主编．编写过程中也得到了学院领导的大力支持,在此表示衷心地感谢!

由于编者的水平所限,加之时间仓促,本书的构思和编排难免存在不妥之处,衷心希望广大读者给予建议、批评和指正．

编　者

2010 年 4 月

目　录

第 1 章　函数　极限　连续

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握并运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限和连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

1.1　函数的概念

所谓函数，粗略地讲，就是两个（或多个）变量之间的一种对应关系．为了了解这一点，先看下面的例子．

例　某种商品的市场需求量 q 与该商品的价格 p 满足关系式

$$q=50-2p \tag{1.1}$$

通过这个关系式，根据不同的价格 p，可以知道该商品的市场需求量 q. 如价格 p 为 5 时，由式(1.1)得

$$q=50-2\times5=40$$

得出需求量 q 为 40. 又如价格 p 为 20 时，仍由式(1.1)可知需求量 q 为 10. 显然，p,q 是两个变量，而式(1.1)确定了这两个变量之间的对应关系．

下面给出函数的定义．

1.1.1　函数的定义

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是非空的实数集，如果对于每一个 $x\in D$，按某一对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中，x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域，$M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域．

例 1.1　确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ 的定义域．

解　要使函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ 有意义，必须使 $\begin{cases}1-x^2\geqslant0\\x>0\end{cases}$ 成立，解此不等式组得 $0<x\leqslant1$，所以函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\log_3 x$ 的定义域是 $(0,1]$.

例 1.2　已知函数 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(0)$ 及 $f(t+1)$.

解　只需把 $x=0$ 和 $x=t+1$ 分别代入函数表达式，计算即可．

$$f(0)=0^2-3\times0+1=1$$

$$f(t+1)=(t+1)^2-3(t+1)+1=t^2-t-1$$

另外，有些函数虽然也可用数学式子表示，但它们在定义域的不同范围内有不同的表达式，这样的函数叫分段函数．例如：

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geqslant 0\\ 1-x & x<0\end{cases},g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

例 1.3 设函数$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$,求函数的定义域及$f(0)$,$f(-5)$,$f(5)$的值.

解 显然函数的定义域为

$$(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}$$

$$f(0)=0,f(-5)=-5-1=-6,f(5)=5+1=6$$

从定义 1.1 可以看出,定义域和对应法则是构成函数的两个基本要素.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数是相同的,否则是不同的.

例 1.4 判断下列各组中的两个函数是否相同.

(1)$f(x)=2-x$　　$g(x)=\dfrac{4-x^2}{x+2}$

(2)$f(x)=\ln\sqrt{x-1}$　　$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

解 (1)定义域不同,因此两个函数不是相同的函数.

(2)定义域和对应法则均相同,因此两个函数是相同的函数.

函数的常用表示方法如下:

①表格法:将自变量的值与对应的函数值列成表格表示函数关系的方法,如对数表、三角函数表、企业产值表.其优点是函数值容易查得,缺点是表中所列数值往往不完全.

②图像法:用图像表示函数关系的方法.其优点是直观形象,可清楚看到函数的变化趋势.此法在工程技术上应用较普遍.

③解析法(公式法):用数学式子表示函数关系的方法,也称公式法.前面所列的那些函数例子都是用解析法表示的,优点是便于理论推导与计算,缺点是不直观.根据函数解析表达式的不同,函数也可分为显函数和隐函数两种.

a. 显函数:函数 y 由 x 的解析表达式直接表示.例如,$y=2x+1$.

b. 隐函数:函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定.例如,$\ln y=\sin(x-y)$.

1.1.2 函数的四种特征

1)函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 M,使得对一切 $x\in D$,均有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在 D 内有界;若这样的 M 不存在,则称函数$f(x)$在 D 内无界.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$均有 $|\sin x|\leqslant 1$;函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界的.

2)函数的单调性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义,若对于区间(a,b)内的任意两点 x_1,x_2 有:

①当 $x_1<x_2$ 时,如恒有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在(a,b)内单调递增,区间(a,b)是

$f(x)$ 的单调增区间；

②当 $x_1<x_2$ 时，如恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递减，区间 (a,b) 是 $f(x)$ 的单调增区间．

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增，因此在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数．函数 $y=x^3$ 在区间内 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增．

3）函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即 $x\in D$，必有 $-x\in D$，且对任意的 $x\in D$ 有：

①若 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 上的奇函数；

②若 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 上的偶函数．

注：不满足奇函数和偶函数定义的函数称非奇非偶函数．偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称．

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数．它们的图像都关于原点对称；$y=x^2$，$y=\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，它们的图像都关于 y 轴对称；函数 $y=x+x^2$ 是非奇非偶函数．

4）函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期．通常我们所说的周期是指函数的最小正周期．

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.3　反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M．对于值域 M 中任一数值 y，在定义域 D 内可以确定唯一的 x 值与 y 对应，由此得到以 y 为自变量的函数，该函数叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$.

注：①习惯上，总是用 x 表示自变量，y 表示函数，因此，$y=f(x)$ 的反函数可写为：

$$y=f^{-1}(x)\quad x\in M$$

②在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.4　初等函数

1）基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数：

(1) 常数函数：$y=C$　（C 为常数）；

(2) 幂函数：$y=x^a$　（a 是实数）；

(3) 指数函数：$y=a^x$　（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$　（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\cot x$；

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

关于它们的图形和简单性质，在中学里已作过详细介绍．为了介绍初等函数，下面我们引入复合函数的概念.

2)复合函数

定义 1.3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域内取值时，$\varphi(x)$ 的值均在 $y=f(u)$ 的定义域内，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$.

注:①不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能复合为复合函数，因为前者定义域为$[-1,1]$，而后者值域为$[2,+\infty)$.

②复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例 1.5 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\ln(x^2+3x-10)$；(2) $y=(\sin 5x)^3$.

解 (1) $y=\ln(x^2+3x-10)$ 是由 $y=\ln u, u=x^2+3x-10$ 复合而成；

(2) $y=(\sin 5x)^3$ 是由 $y=u^3, u=\sin v, v=5x$ 复合而成.

3)初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而得到，并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=x^2+\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，$y=3xe^{\sqrt{1-x^2}}+2$ 等都是初等函数，而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$$

不是初等函数，因为它在定义域内不能用一个解析式表示. 本课程所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^3}$；　　(2) $y=\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\ln(4x-3)$；　　(4) $y=\dfrac{1}{4-x^2}-\sqrt{x-1}$；

(5) $y=\dfrac{\ln(5x-4)}{\sqrt{x^2-4}}$；　　(6) $y=\sqrt{x^2+8x+15}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & x\leqslant 0\\ 2^x & x>0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(-3)$，$f[f(-1)]$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$；

(3) $f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

4. 确定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^5+3x^3-2x$;　　(2) $f(x)=x\cos x$;

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;　　(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

(5) $f(x)=\sin x+\cos x$;　　(6) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

5. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin(x+1)$;　　(2) $y=\sqrt{1-2x}$;

(3) $y=5(x+2)^3$;　　(4) $y=\ln[\cos(3x)]$;

(5) $y=\arcsin[\lg(3x-4)]$;　　(6) $y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$.

1.2　常用的经济函数

微积分在经济、管理、金融和财会领域得到广泛应用. 不过,要理解或解释经济现象,必须知道诸如需求、供给、成本、利润等经济量以及它们之间的关系,这是使用微积分的第一步.

1.2.1　需求函数

需求量是指在一定价格条件下,消费者愿意并且有支付能力购买的商品数量.

消费者对某种商品的需求量受到诸多因素影响,如消费者的收入、爱好等,其中最主要的因素是商品的价格. 为讨论问题方便,我们忽略其他因素的影响,假定某种商品的市场需求量 Q 只与该商品的市场价格 p 有关,则需求函数 Q 可以看做价格 p 的一元函数,即

$$Q=Q(p)$$

一般来说,商品价格低,需求量大;商品价格高,需求量小. 因此,需求量 Q 是市场价格 p 的单调递减函数.

1.2.2　供给函数

供给量是指在一定价格条件下,生产者愿意出售并且有可供出售的商品数量.

如果市场的每一种商品直接由生产者提供,供给量也是受多种因素影响的,例如生产者投入的成本与技术、生产者对其他商品和劳务价格的预测等. 在这里我们不考虑其他因素的影响,只是将供给量 S 看做该商品的市场价格 p 的函数. 即

$$S=S(p)$$

由于生产者向市场提供商品的目的是赚取利润,则价格上涨将促使生产者提供更多的商品,从而使供给量增加;反之,价格下跌则使供给量减少. 即供给量 S 是市场价格 p 的单调递增函数.

当某种商品在市场上的需求量和供给量相等时,这种商品就达到了市场均衡. 这时的价格 p_0 为市场均衡价格,需求量 Q_0(或供给量 S_0)为市场均衡数量,而 (Q_0,p_0) 通常称为均衡点(见图 1.1).

当市场价格低于均衡价格时,供给量大于需求量,这时出现"供过于求"的现象;当市场价格高于均衡价格时,需求量大于供给量,此时出现"供不应求"的现象.

例 1.6　(求均衡点问题) 某商品的供给函数和需求函数分别为:

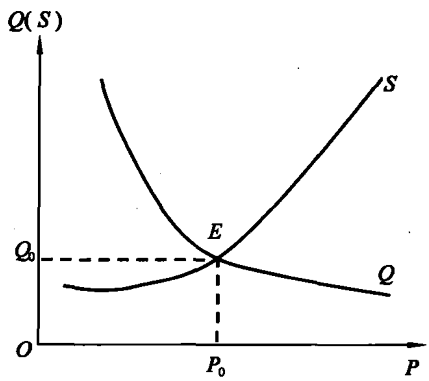

图 1.1

$$S=7.5p-10, Q=40-5p$$

求该商品的均衡点(Q_0,P_0).

解 由供需均衡的条件 $Q=S$,可得

$$7.5p-10=40-5p$$

解得均衡点为$(Q_0,P_0)=(20,4)$.

例 1.7 (消费税问题) 上例中,设某商品的需求函数与供给函数分别为

$$Q=40-5p, \qquad S=7.5p-10$$

如果政府对每一单位的商品征收固定的 T 元消费税,均衡点将会怎样变化?

解 从生产者的角度来看,价格似乎由原来的 P 变成了 $P-T$,供给函数发生了变化,新的供给函数为 $S=7.5(P-T)-10$,而需求函数没有变,则新的均衡点满足方程组

$$\begin{cases} Q=40-5P \\ S=7.5(P-T)-10 \end{cases}$$

解方程组得新的均衡点为$(Q_0,P_0)=(20-3T,4+0.6T)$. 换句话说,征收了消费税后,价格上升了 $0.6T$,需求量减少了 $3T$.

1.2.3 成本函数

凡事总是要付出代价的,也没有天上掉馅饼的好事,这反映了成本存在于一切经济活动中. 某产品的总成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入(劳动、原料、设备等)的价格或费用总额. 因此,生产商品的费用或成本可分为两类. 第一类是厂房、设备等固定资产的折旧,管理者的固定工资等. 这一类成本的特点是短期内不发生变化,即不随商品产量的变化而变化,称为固定成本,用 C_0 来表示;第二类是能源费用、原材料费用、劳动者的工资等. 这类成本的特点是随商品产量的变化而变化,称为可变成本,用 $C_1(q)$ 表示. 这两类成本的总和就是生产者投入的总成本,用 $C(q)$ 来表示,即

$$C(q)=C_0+C_1(q)$$

成本函数是多种多样的,常见的是线性函数、二次函数、三次函数等,它们的共同点是总成本随着产量的增加而增加,即成本是产量的增函数.

只研究总成本,不能看出生产者生产水平的高低,还需要研究单位商品的成本,即平均成本 $\overline{C}$,即

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}$$

称之为平均成本函数.

例 1.8 某产品的成本函数为:$C(q)=a+bq^2$,其中 a,b 为待定常数. 已知固定成本为 400 万元,且当产量 $q=100$ t 时,成本 $C=500$ 万元. 由于生产能力的限制,年产量最多为 700 t. 试求产品的成本 C 与年产量 q 的函数关系.

解 根据题意:$C(q)=a+bq^2$,固定成本为 400 万元,即 $q=0$ 时,

$$C(0)=a=400$$

当 $q=100$ t 时，总成本 $C=500$ 万元，代入 $C(q)=400+bq^2$，得

$$C(100)=400+b\times100^2=500\Rightarrow b=\frac{1}{100}$$

所以，成本函数 $C(q)=400+\frac{1}{100}q^2$.

因为年产量最多为 700 t，所以，此成本函数的定义域 $D=[0,700]$.

1.2.4　收入函数

收入函数是指生产者出售一定数量的产品所得到的全部收入，用 $R(q)$ 表示. 生产者销售某种商品的总收入取决于该商品的销售量 q 和价格 $p(q)$，所以收入函数为

$$R(q)=qp$$

除总收入外，还有平均收入，用 $\overline{R}$ 表示. 它是销售单位商品的收入，即

$$\overline{R}=\frac{R(q)}{q}$$

例 1.9　已知某种商品的需求函数为

$$q=200-5p$$

试求该商品的收入函数，并求出销售 30 件该商品时的总收入和平均收入.

解　由需求函数 $q=200-5p$ 可得

$$p=40-\frac{q}{5}$$

再由公式可得收入函数为

$$R(q)=q\left(40-\frac{q}{5}\right)$$

$$=40q-\frac{q^2}{5}$$

而

$$\overline{R}=\frac{R(q)}{q}=40q-\frac{q}{5}$$

由此可得销售 30 件该商品时的总收入和平均收入分别为

$$R=40\times30-\frac{30^2}{5}=1\ 020$$

$$\overline{R}=40-\frac{30}{5}=34$$

1.2.5　利润函数

在经济学中，收入与成本之差称为利润，用 L 表示. 即

$$L=R-C$$

如果将成本 C 与收入 R 都看做是产量 q 的函数，那么利润 L 也是 q 的函数. 即

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

单位商品所获得的利润称为平均利润，用 $\overline{L}$ 来表示，即

$$\bar{L}=\frac{L(q)}{q}$$

当 $L=R-C>0$ 时，生产者盈利；

当 $L=R-C<0$ 时，生产者亏损；

当 $L=R-C=0$ 时，生产者盈亏平衡，使 $L(x)=0$ 的点 x_0 称为盈亏平衡点(又称为保本点).

例 1.10 已知生产某种产品的总成本函数为

$$C(q)=500+2q(\text{元})$$

其中,q 为该产品的产量. 设该产品每件售价为 6 元. 试求：

①生产 200 件该产品时的总利润和平均利润；

②生产该产品的盈亏平衡点.

解 (1)已知成本函数

$$C(q)=500+2q$$

由题意知收入函数为

$$R(q)=6q$$

所以该产品的利润函数为

$$\begin{aligned}L(q)&=R(q)-C(q)\\&=6q-(500+2q)\\&=4q-500(\text{元})\end{aligned}$$

平均利润函数为

$$\bar{L}=\frac{L(q)}{q}=4-\frac{500}{q}(\text{元})$$

生产 200 件该产品的利润为

$$L(200)=4\times200-500=300(\text{元})$$

而此时的平均利润为

$$\bar{L}=4-\frac{500}{200}=1.5(\text{元/件})$$

即生产 200 件该产品时的利润为 300 元,平均每件利润为 1.5 元.

(2)利用 $L(q)=0$ 得

$$4q-500=0$$

解得

$$q_0=125(\text{件})$$

即盈亏平衡点为 125 件.

例 1.11 已知某商品的成本函数为 $C=12+3q+q^2$,若销售单价定为 11 元/件,试求：

(1)该商品经营活动的无盈亏点；

(2)若每天销售 10 件该商品,为了不亏本,销售单价应定为多少才合适?

解 (1) 利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)$

$$\begin{aligned}&=11q-(12+3q+q^2)\\&=8q-12-q^2\end{aligned}$$

由 $L(q)=0$,即 $8q-12-q^2=0$,解得两个无盈亏点 $q_1=2$ 和 $q_2=6$.

由 $L(q)=(q-2)(6-q)$ 可以看出,当 $q<2$ 或 $q>6$ 时,都有 $L(q)<0$,这时生产经营是亏损的;当 $2<q<6$ 时,$L(q)>0$,生产经营是盈利的. 因此,$q_1=2$ 和 $q_2=6$ 分别是盈利的最低产量和最高产量.

(2)设定价为 p 元/件,则利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=pq-(12+3q+q^2)$. 为生产经营不亏本,须有 $L(10)\geqslant 0$,即 $10p-142\geqslant 0$,也就是 $p\geqslant 14.2$. 所以,为了不亏本,销售单价应不低于 14.2 元/件.

习题 1.2

1. 生产者向市场提供某种商品的供给函数为 $S=\frac{p}{2}-96$,而该商品的需求 Q 满足 $Q=204-p$,试求该种商品的市场均衡价格和均衡数量.

2. 已知生产 q 件某种商品时的总成本为 $C(q)=10+6q+0.1q^2$,如果该商品的销售单价为 9 万元/件,试求:

(1)该商品的利润函数;

(2)生产 10 件该商品的总利润和平均利润;

(3)生产 30 件该商品的总利润.

3. 已知某产品的总成本函数和收入函数分别为 $C(q)=q^2-4q+30$,$R(q)=9q$ 试求该产品的盈亏平衡点,并说明盈亏情况.

4. 某电器厂生产一种新产品,其定价不单要根据生产成本而定,还要请各消费单位来出价,即他们愿意以什么价格来购买. 根据调查得出需求函数为

$$Q=-900p+45\ 000$$

该厂生产该产品的固定成本是 270 000 元,而单位产品的可变成本为 10 元. 为获得最大利润,出厂价格应为多少?

5. 某商品的成本函数(单位:元)为 $C(q)=81+3q$,其中 q 为商品的数量,问:

(1)如果商品的售价为 12 元/件,该商品的盈亏平衡点是多少?

(2)售价为 12 元/件时,售出 10 件商品的利润是多少?

(3)该商品的售价为什么不应定为 2 元/件?

1.3　极限的概念

极限描述的是变量在某个变化过程中的变化趋势. 其实,这样的描述在日常生活中人们是经常用到的. 例如,从企业的发展趋势来判断它的前途;从市场变化趋势来预测产品的需求状况等. 这些描述从数学上看便是极限的思想. 极限是微积分学中一个非常重要的概念,微积分中许多概念都是由极限引入的. 下面从大家最熟悉的数列出发,介绍极限的基本概念.

1.3.1　数列极限

我们观察下列数列:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n}$$

当 n 无限增大时,2^n 也无限增大,其倒数$\frac{1}{2^n}$会随之越变越小,无限地接近于0.

由上述的例子,我们给出关于数列极限的定义:

定义1.5 给定一个无穷数列$\{a_n\}$,如果当 n 无限增大时,a_n 无限地接近于某一确定的常数 A,则称常数 A 为数列$\{a_n\}$当 n 趋于无限大时的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,\text{或 } a_n\to A(n\to\infty)$$

这时也称数列$\{a_n\}$收敛,即当 $n\to\infty$ 时,数列$\{a_n\}$收敛于 A. 如果数列$\{a_n\}$没有极限,则称该数列发散.

例1.12 观察以下数列的变化趋势,讨论它们的极限.

(1)$a_n=\frac{n}{n+1}$; (2) $a_n=\frac{n-1}{n}$;

(3)$a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$; (4) $a_n=(-1)^{n+1}$.

解 (1)这里 $a_n=\frac{n}{n+1}$,即$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

(2)这里 $a_n=\frac{n-1}{n}$,即 $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$$

(3)这里 $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$,即 $-1,\frac{1}{4},-\frac{1}{9},\frac{1}{16},\cdots,\frac{(-1)^n}{n^2}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=0$$

(4)这里 $a_n=(-1)^{n+1}$,即$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1}$,故

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\text{不存在.}$$

1.3.2 函数的极限

对于函数的极限,根据自变量的变化过程分为以下3种情形:

1)当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限

我们先来观察这样两个例子:

①将一盆80 ℃的热水放在一间室温恒为20 ℃的房间里,水温 T 将逐渐降低. 随着时间 t 的无限推移,水温会越来越接近室温20 ℃(水温 T 是时间 t 的函数).

②反比例函数 $y=\frac{1}{x}$. 当自变量 x 的绝对值无限增大时,相应的函数值 y 无限接近常数0(如图1.2).

这两个例子有一个共同的特征:当自变量逐渐增大时,相应的函数值接近于一个常数. 对