高等数学

解题指引与同步练习

⑩ 无穷级数

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1
ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①曾…②吴…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　**http://www.scutpress.com.cn**
责任编辑：欧建岸　乔　丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　**印张：**32　**字数：**645 千
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点．因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证．作者从事各类不同层次数学学科的教学近 50 年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的"三基"（基本概念、基本理论、基本方法），必须要通过一定数量的习题练习才能实现．为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的"三基"内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固"三基"．然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台．章末附有习题答案．

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书．对专科学生，书中的拓展题部分及有"＊"号标记的内容不作要求．

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢．

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正．

编　者

2007 年 10 月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册,在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年,一直得到任课教师和学生的好评,这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过,“学数学不做习题,等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年,十分了解成人教育的特点,即学员都是在做好本职工作的前提下,业余学习,甚至部分学生还需兼顾家庭.因此,如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验,把辅导与练习合编成一册,对每章的“三基”内容给予小结,并精选一些例题,指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型,分类编排,使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台,使部分学生的学习能力提高一个层次,为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用,免去再抄题目而省时,任课教师批改作业也很方便.因此,这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

无穷级数

无穷级数是研究函数的重要工具．主要内容是：常数项级数的概念和审敛方法；幂级数以及如何将已知函数展开成幂级数．

一、常数项级数的概念和性质

1．级数的基本概念

设给定一个数列$\{u_n\}$：$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$
把它的各项依次用加号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \xlongequal{\text{记为}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad ①$$

就称为无穷级数，简称级数．其中 u_1 称为级数的首项，而 u_n 称为级数的一般项或通项．由于每一项都是常数，故亦称为常数项级数．

注意无穷级数①是个“无限和”．我们可以通过作出级数①的前 n 项之和（称为部分和）

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \qquad ②$$

得部分和数列$\{S_n\}$．考察当 $n\to\infty$时，部分和数列$\{S_n\}$的极限（即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$）就反映了无穷多项之和的结果．有

定义 如果级数①的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

则称级数①收敛，极限值 S 为级数①的和，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$$

如果部分和数列$\{S_n\}$没有极限，则称级数①发散，发散的级数没有和．

例 1 讨论等比级数（又称几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\ (a\neq 0)$$

的敛散性．

解 如果$|r|\neq 1$，则部分和为

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

当$|r|<1$时,由于$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

因此,所给级数收敛,其和为$\frac{a}{1-r}$.

当$|r|>1$时,由于$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$,因此所给级数发散.

当$r=1$时,$S_n=na$,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$,因此级数发散.

当$r=-1$时,所给级数成为$a-a+a-a+\cdots$,其部分和

$$S_n = \begin{cases} a & (n\text{ 为奇数}) \\ 0 & (n\text{ 为偶数}) \end{cases}$$

所以S_n的极限不存在,所给级数发散.

综上所述,当$|r|<1$时,等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$收敛,其和为$\frac{a}{1-r}$;当$|r|\geqslant 1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$发散.(此结论以后可作为公式使用)

例 2 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$的敛散性.

解 因为

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

所以部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

因此所给级数收敛,其和为1.

2. 级数收敛的必要条件

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

这就是说,收敛级数的通项必定以零为极限.因此,如果$\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$一定发散.但是,当$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$时,还不能判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是否收敛.

例 3 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)^n}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0$$

所以所给级数发散.

例 4 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

解 所给级数虽然有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$,但

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$,可知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 是发散的.

例 5 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

称为调和级数.它的一般项 $u_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ (当 $n\to\infty$ 时),但可以证明调和级数是发散的.(此结论以后可作为公式使用)

3. 级数的主要性质

性质 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 S,那么它的各项同乘以一个常数 k 所得的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = kS$;

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,且 $k\neq 0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 必定发散.

性质 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$,则由它们逐项相加或逐项相减所得的级数也收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$$

注意,(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 是发散的.

(2) 两个发散级数逐项相加,所得级数未必发散.

性质 3　删去、添加或改变级数的有限项，不会改变级数的敛散性.

例 6　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)$ 是否收敛.若收敛，求其和.

解　因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$$

其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 为首项 $a=\frac{2}{3}$，公比 $r=\frac{1}{3}$ 的等比级数；级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ 为首项 $a=\frac{1}{2}$，公比 $r=-\frac{1}{2}$ 的等比级数，它们都收敛，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

根据性质 2，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right)$ 收敛，其和为 $\frac{4}{3}$.

习题 10－1

基本练习题

1. 单项选择题：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 的和 $S=$　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{2}{3}$

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$　(　　)

A. 收敛　　B. 发散　　C. 不一定发散　　D. 的部分和有极限

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$　(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. $+\infty$

(4) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数必定发散的是　(　　)

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10u_n$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{10}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+10)$

2. 利用级数收敛的定义判定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

解

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$；

解

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

解

3. 利用级数的性质及公式(等比级数、调和级数)判定下列级数的敛散性：

(1) $-\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots$;

解

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{5}{3^n}\right)$;

解

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$.

解

二、正项级数的审敛法

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的每一项都是非负的,即 $u_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数.

显然,正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增的.根据"单调有界数列必有极限"的准则可得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

应用这一条件,可以推导出更加便于使用的正项级数审敛法则.

1. 比较判别法

设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$,而且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

(俗称小于收敛的必收敛;大于发散的必发散)

使用时,对所给正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性,需要有一个预测(预测时常将等比级数和 P-级数作为参照方),若预测 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则需放大 u_n 而得出 v_n,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 应为收敛的;如果预测 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则需缩小 u_n 而得出 v_n,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 应为发散的.

常被用来作为比较的有:

等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$,当 $|r| < 1$ 时收敛;当 $|r| \geqslant 1$ 时发散.

(必须熟记)

P- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^P}$,当 $P > 1$ 时收敛;当 $P \leqslant 1$ 时发散.

例 7 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ 的敛散性.

解 观察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n} + \cdots$

从 $n=2$ 开始,$u_n = \dfrac{1}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. 而等比级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(r = \dfrac{1}{2}\right)$ 是收敛的,由比较法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ 也收敛.

例 8 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(2n+1)}$ 的敛散性.

解 $u_n = \dfrac{1}{n(2n+1)}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(2n+1)} = 0$,还未能确定所给级数的敛散性.

观察通项的分母是关于 n 的二次多项式,当 n 无限增大时,起关键作用的是 n^2. 所以用 $P=2$ 的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (它收敛)作为参照方,应适当放大 u_n,有

$$u_n = \frac{1}{n(2n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $(P=2>1)$ 是收敛的,由比较法知所给级数收敛.

例 9 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 的敛散性.

解 $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,还未能确定级数的敛散性,要判断.

观察通项的分母是关于 n 的一次,选调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (它发散)作为参照方,

应适当缩小 u_n，有

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+2n+n^2}} = \frac{1}{n+1}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是由调和级数删去第一项所得，可知它发散．由比较法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 发散．

比较法需对 u_n 作出适当的放大或缩小，且只能进行单向的推理，故实用上不够方便．为此，改用下面的推论．

推论（比较法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ （$v_n>0$）是两个正项级数，且有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \qquad (0 < l < +\infty)$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或者同时发散．

例 10 试用比较法的极限形式，审敛上述例 8、例 9 的级数．

解 对例 8，由题目 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ 简化出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 作为参照方之后，只需求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(2n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n} = \frac{1}{2} > 0$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ （$P=2>1$）是收敛的，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ 收敛．

对例 9，由题目 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 选出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 作为参照方，求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1 > 0$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ 发散．

例 11 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性．

解 这是一个正项级数．当 $n\to\infty$ 时，$u_n = \sin\frac{\pi}{2^n} \to 0$，还未能确定所给级数的

敛散性,另作判断.

因为 $n\to\infty$ 时,$\sin\frac{\pi}{2^n}\sim\frac{\pi}{2^n}$.所以选级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 作为参照方,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1>0$$

而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}\left(a=\frac{\pi}{2},r=\frac{1}{2}\right)$收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

*2. 比值判别法

设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

则

(1) 当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$ 时,级数发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时,还未能判定级数的敛散性,即比值法失效.

例 12 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0<1$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$ 收敛.

例 13 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ 发散.

例 14 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^b}$ $(a>0,b>0)$的敛散性.

解 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} \cdot \frac{n^b}{a^n} = a \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^b = a$$

当 $0<a<1$ 时,所给级数收敛;当 $a>1$ 时,所给级数发散;当 $a=1$ 时(比值法失效),所给级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$,它是一个 P-级数,则 $P=b>1$ 时收敛,$P=b\leqslant 1$ 时发散.

小结 判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性,一般按如下顺序进行考察:

(1) 先求 $\lim_{n\to\infty} u_n$,若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,如例 3;

(2) 当 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 不易求的情况下,继续审敛时,应先观察通项 u_n,若含有形如 $a^n, n!, n^n$ 的因子,通常采用比值法更为方便.如例 12、例 13、例 14.

(3) 使用比较法时,应先对 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性作出预测,选好参照方.如例 8、例 9、例 10、例 11.

习题 10-2

基本练习题

4. 单项选择题:

(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,且 $u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$,则下列命题正确的是 ( )

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛　　B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散　　D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

(2) 下列条件中,能保证正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的是 ( )

A. $a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $a_n \leqslant \frac{1}{n}$　　C. $a_n \leqslant \frac{n+3}{\sqrt{n^5}}$　　D. $a_n > \frac{1}{n}$

5. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{n}$；

解

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$；

解

6. 用比较审敛法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)^2-1}$；

解

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$；

解

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$；

解

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

解

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n^2}$;

解

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$.

解

7. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；

解

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；

解

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$；

解

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{a^n n!}$ $(a>0, a\neq e)$.

解