普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学物理方法

(第二版)

邵惠民

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学物理方法

（第二版）

邵惠民

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是作者结合研究的最新成果在前一版的基础上编写而成. 本书前身是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材、普通高等教育“十五”国家级规划教材.

本书系统地阐述了数学物理方法的基础理论及其在物理学、工程技术上的应用，重点为读者提供与数学物理方法有关的基本概念、基本定理和解题的各种方法和技巧. 书中涉及的尽管是一些传统的内容，但在取材的深度和广度上都比以往教科书有所加强；同时增添了许多反映学科前沿的内容；并通过例题介绍了一些独特的、简洁的、实用性很强的解题方法.

本版在原有基础上进行了删繁就简和整合更新；并增添了一些亮点以飨读者.

本书可作为高等学校理工科非数学专业的本科教材，也可供有关专业的研究生、教师和广大科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/邵惠民. —2版. —北京：科学出版社，2010
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-03-028439-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-教材
Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第146328号

责任编辑：胡云志 昌 盛 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：黄华斌

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽 源 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年8月第 二 版 印张：31 1/4
2010年8月第四次印刷 字数：644 000
印数：8 001—12 000

定价：45.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

数学物理跨越了物理学的每一个子领域，既是交叉学科，也是物理学的主流之一.

无论在教学中，还是在教材建设中，我们都非常赞许数学大师柯朗(R. Courant，1888～1972)的教诲："数学的教学逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练，固然这可以发展形成演算的能力，但却无助于对数学的真正理解，无助于提高独立思考的能力."“改革的目标是求得对数学有一个全貌的认识，且真正领悟数学是科学思考和科学行为的基础."

随着科学技术的进步，必须对教材内容不断更新，与时俱进. 本书第二版就是在第一版基础上删繁就简、整合更新而成，并增添了一些知识亮点，以飨读者. 新版中体现了近几十年数学教材的一个发展趋势，把最新的成就，用浅显的方法教给低年级本科大学生.

在本书的使用过程中，得到南京大学和兄弟院校“数学物理方法”课程的任课教师的热情支持，特别是南京工业大学的吴高建和南京大学的徐小农教授，不仅在教学中精益求精，而且制作了多媒体教学光盘，在此表示诚挚的感谢.

本书的顺利出版，得到科学出版社高等教育出版中心数理出版分社昌盛分社长和胡云志编辑的大力支持，在此表示衷心的感谢；另外还得到南京大学物理学院领导的关心和支持，在此表示深切的谢意.

限于作者的水平，书中不妥及疏漏之处在所难免，恳请专家和广大读者指正.

作　者

2010年立夏于南京大学

第一版前言

数学物理方法在物理学、工程技术和其他科学的许多领域都有着十分广泛的应用.主要原因是,在上述研究领域中经常出现很多描述某些物理规律的数学物理方程,通过对这些方程的求解,一方面可以得到极有实用价值的结论,另一方面又可以促进这些领域的发展.

数学物理方法既可以作为一门纯数学学科来研究,也可以作为一门应用数学学科来研究.显然,对广大科技工作者及理科学生来说,学习数学物理方法的目的在于应用.因此,本书为了适应这些读者的需要,从选材上就有侧重,主要涉及的不是一般数学理论,而是尽量为读者提供与数学物理方法有关的基本概念,基本原理和解题的各种方法和技巧.

数学物理方法涉及的数学基础知识面较广,如果将所涉及的基础知识分别插入到相应的解法中去叙述,这样的结构安排松散,零乱.但是,如果将它们统统集中安排在前面叙述,这样学起来又感到枯燥无味.为此,在内容安排上,本书既保持了各章节的独立,又顾及到它们之间的前后呼应与关联,力争做到层次清晰,结构紧凑.

本书的正确使用方法是,先大体浏览,以求获得一般概念,然后逐章研读.如果对某些概念,需要详细了解时,再回过头来仔细阅读那一章的内容.

本书的前五章对复变函数理论及其应用作了清晰而简明的阐述,它主要为了以后学习提供必要的复变函数的概念和定理.

为了与现代数学理论及应用相衔接,即用现代数学分析的观点审视、选择和组织好传统的教学内容,就必须引入广义函数,Hilbert 函数空间,以及斯特姆-刘维(Sturm-Liouville,S-L)本征值问题等等概念.第六章,第七章和第八章正是为此安排的.

学生通过对这三章的深入了解之后,在以后第九章的 Fourier 分析中遇到三角函数系的正交完备性,就可以很方便地自行证明了.这一点在以往的教科书中是不给出证明的.另一方面通过对 S-L 本征值问题的透彻阐明,今后学生学习按勒让德多项式展开和按贝塞尔函数的展开就显得轻而易举了.

第九章、第十章和第十一章也是为了今后数章做准备的.但 Fourier 分析和第四章的幂级数展开法都是函数分析的重要手段,特别是在第九章中从 Fourier 分析的思想演变出了现代实用性很强的小波分析,从而为学生进一步学习现代数学展示了窗口和延伸发展的接口.这三章的安排也体现了本书的宗旨是加强应用,侧

重方法的原则，着重介绍了常用的应用数学方法及其在实际中的应用. 所以级数解法，渐近展开，最陡下降法等内容也收入在内.

第十二章以后数章是本书的重点. 第十二章阐述了如何建立描述物理现象的数学模型，并导出三类基本方程——波动方程，输运方程与稳恒方程，导出这些方程仅起一个示范作用.

第十三章阐述了两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类及特征. 以后数章着重阐述求解数学物理方程的几个常用的解析解法. 第十四章阐述了一类比较简单的方程的通解解法，并突出在行波问题上的应用. 通解法中有一种特殊情形——行波解(即依赖于自变量的线性组合的解)，它特别适用于波动问题，甚至解一些非线性偏微分方程也很奏效.

分离变量法是求解数学物理方程最简单而且应用最广泛的方法之一，第十五章阐述了分离变量法的基本概念及应用这个方法所必须的、可分离的条件，并强调指出了这个方法的理论依据是以本征值问题为核心，以本征函数展开为解题的关键. 第十六章和第十七章是围绕分离变量法中常用的特殊函数——勒让德函数、贝塞尔函数来阐述的，这两章内容可以和第十五章穿插起来学，分开编排是为了给学生对这些特殊的函数有一个完整的、系统的概念.

第十八章阐述了积分变换在求解中的特点和技巧. 对半无界非稳态问题，拉普拉斯变换可获得在短时间内能很快收敛的解.

第十九章介绍的变分法是一种很重要、很有用的数学物理方法，已被广泛用于科学研究和工程计算. 今天变分法的应用范围，不仅限于经典物理和工程技术的领域，而且在现代量子场论、现代控制理论和现代信息理论等高新技术领域都有十分广泛的应用.

第二十章阐述求解边值问题的格林函数法，而对非稳态问题，应用格林函数可把第十五章分离变量法得到的各种解，表达成更一般、更紧凑的形式. 但格林函数本身的求得又与第十五章介绍的各种解的形式息息相关.

第二十一章阐述保角变换法. 对于平面场的拉普拉斯方程或泊松方程的边值问题的解析求解，它是一种最为有效的方法. 因为与其他解析方法相比，保角变换法能够处理边界形状复杂得多的问题，所以这种方法具有较大的实用价值.

对于一个给定问题，可以有很多种求解方法，但若想选用一种最直接、最简便的方法，读者就得熟悉各种求解方法. 为此，除了要理解课文内容之外，更重要的是多练习、多思考、多总结，这样才能达到得心应手的程度.

本书中含有大量的与物理问题有关的应用例题，由于这些例题密切联系实际，所以颇能激发学生的学习兴趣，有利于提高学生的科学素质和能力.

由于教材内容较多，公式又多，所以不能要求学生对每一部分内容的细节都掌握得很清楚，应该把学生的精力引导到全面和系统地对基本理论概念和方法的理

解和应用上面来.因此,教师在教学中应始终贯彻这一思想.

本书广泛吸收了当今国际上优秀“数学物理方法”教材的长处,同时又参考了国内很多同类教材和参考书,作者从中受到很大的启发,所蒙受的教益匪浅;而对于所有在本书编著过程中,曾给予帮助和鼓励的人们,特别是在成书的最后过程中,我的博士生(刘胜利、吴高建、徐锡斌诸君)在文字加工,绘图等方面作了大量的工作,付出了大量辛勤劳动,为此作者一并表示衷心的感谢.

书中不妥及疏漏之处在所难免,恳请专家和广大读者指正.

作　者

2003 年立冬于南京大学

记　　号

一种好的记号可以使头脑摆脱不必要的约束，使思维集中于新问题；这就事实上增加了人脑的能力.

——A. H. Whitehead

$\forall$	表示“对于所有的”，“对每一个”
$\exists$	表示“存在”，“至少有一个”
$\Rightarrow$	“$A\Rightarrow B$”表示“由命题 A 可以推出命题 B”
$\Leftrightarrow$	“$A\Leftrightarrow B$”表示“A 与 B 是等价命题”
$\subset$	$A\subset B$，表示“集 B 包含集 A”
$\in$	$x\in Z$，表示“元素 x 属于集 Z”
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{F}$	数域（$\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）
$\mathbf{N}$	自然数集（自然数集包括 0）
$\mathbf{Q}$	有理数集
R^n	实 n 维 Euclid 空间
$C[a,b]$	$[a,b]$上的连续函数全体
$C^k[a,b]$	$[a,b]$上的 k 次连续可导的函数全体

目　录

第1章　复变函数

1.1　复数的概念

众所周知，任意两个正整数相加，结果仍然是正整数，这就是说，在自然数系($n=0,1,2,\cdots$)内通过加法运算，所得结果不会越出自然数系之外．但是在自然数系内，施行加法的逆运算——减法，就会越出自然数系的范围，只有我们把负整数和零并入自然数系后，那么在这个新数系中减法才能永远可以施行，如果我们要使乘法的逆运算——除法(除数不为零)可以永远施行，就要引入有理数．虽然在有理数系中对四则运算是封闭的．但是有理数系对乘方的逆运算——开方运算是不封闭的，有理数的开方可能不再是有理数．若开方限制为正数，有理数系就必须扩充为实数系；若开方运算扩大对负实数，我们就必须将实数系扩充为新的数系——复数系．因此，在这个新数系中，必须包含一个最简单的数$\sqrt{-1}$，今后称它为虚数单位 i，并定义 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\mathrm{i}^2=-1$．

另一方面从分析上来看，有理数系在极限运算下不封闭，即由有理数组成的序列，其极限可能不再是有理数．有理数的这种不完备性，是一个本质的缺陷，它使得有理数系不能成为微积分学的立论基础．

1.1.1　复数的定义

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数．其中 x,y 均为实数，i 为虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$，而实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，并记作

$$x=\mathrm{Re}z \tag{1.1.1}$$

$$y=\mathrm{Im}z \tag{1.1.2}$$

务必注意：按上述定义，复数的虚部是一个实数．

1.1.2　复数的相等

若两个复数，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，有 $x_1=x_2$ 及 $y_1=y_2$，则我们称

$$z_1=z_2 \tag{1.1.3}$$

特别是一个复数等于零，不是意味着一个条件，而是意味着两个条件，即所给复数的实部与虚部两者都为零．

1.1.3　复数的共轭

若两个复数仅当它们的虚部相差一个正负号时，那么其中任何一个称为另一个的共轭，一个复数 z 的共轭通常记作 $\bar{z}$ 或 z^*，在物理学中常用 z^* 表示，所以

$$\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)^* = x - \mathrm{i}y \tag{1.1.4}$$

这样定义之后，复数的四则运算满足实数四则运算的一般规律，并且复数的运算法则施于实数时(因为实数是复数的特例)，能够和实数运算的结果相符合.

复数没有大小之分，因此两个复数不能比较大小. 但复数的实部及虚部均为实数，因此复数的实部和虚部可以比较大小.

1.2　复数的几何表示法

复数一般可采用两种几何表示法，即采用复数平面(用平面上的点来表示复数，这个平面称为复数平面)或复数球面(用球面上的点来表示复数，这个球面称为复数球面).

1.2.1　复数平面

1. 直角坐标表示法(或称代数表示法)

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用直角坐标系平面中的坐标 (x,y) 的点来表示，因此复数平面上每一个点都与一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应；反过来，也成立. 所以全部复数与平面上的点构成一一对应的关系[图 1.1(a)].

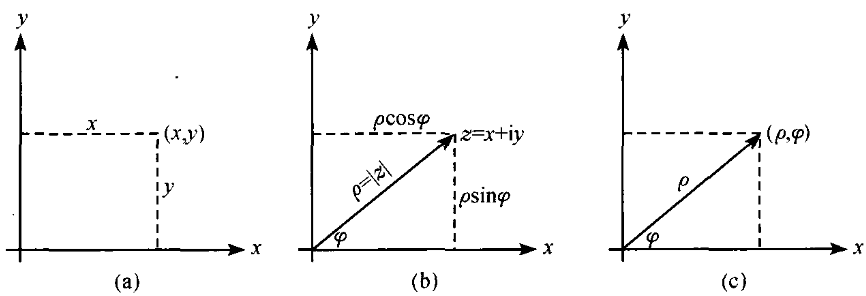

图 1.1

必须注意：不可用符号 $(x,\mathrm{i}y)$ 来表示复数.

2. 矢量表示法

在复数平面上可引入一个从原点出发指向点 (x,y) 的矢量来表示复数 $z=x+$

iy,如图 1.1(b)所示.矢量的长度称为复数 z 的模,记为 $|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.显然 $x\leqslant|z|$,$|y|\leqslant|z|$,而 $|z|\leqslant|x|+|y|$;矢量与 x 轴的夹角称为复数的辐角,记为 $\arg z=\varphi$.

3. 三角表示法(或称极坐标表示法)[图 1.1(c)]

因为

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi \tag{1.2.1}$$

则复数 z 可以表示为

$$z=x+iy=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{1.2.2}$$

其中 ρ 为复数的模,即

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.2.3}$$

φ 称为复数的辐角,即

$$\varphi=\arg z \tag{1.2.4}$$

当复数 $z=0$ 时,则 $|z|=0$,但它的辐角 $\arg z$ 没有确定值(或者说没有意义,因而不能说 $z=0$ 的辐角等于多少).

当复数 $z\neq0$ 时,则 $|z|$ 是唯一确定的,但其辐角 $\arg z$ 可以取无穷多个值,而这些值之间可相差 2π 的整数倍,因此任何一个非零的复数 z 都有无穷多个辐角值.

$\arg z$ 的主值用 $\operatorname{Arg} z=\varphi_0$ 表示,它满足 $-\pi<\varphi_0\leqslant\pi$,

$$\arg z=\operatorname{Arg} z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.2.5}$$

当 z 是一个负实数时,$\operatorname{Arg} z=\varphi_0$ 取值 π.

4. 指数表示法

$z=\rho e^{i\varphi}$ 的形式称为 z 的指数表示式.利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{1.2.6}$$

就可将复数 z 的三角表示式化为指数形式,因此欧拉公式是它们之间的纽带.这一定义自然导致今后约定 e^z 为指数函数,即 $e^z=\exp(z)$,$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ 特别是 $i=e^{i\pi/2}$,$-1=e^{i\pi}$,e 与 π 是超越实数,i 是虚数,而 e、π、i、1 这四个似乎毫无关系的数,却极其美妙地结合在一起.因此,这公式反映了欧拉公式的深刻内涵意义.

以上几种表示是等价的,可以从任何一种形式导出另一种,例如:

由

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

得

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\rho(-\sin\varphi+i\cos\varphi)=iz$$

由方程解得

$$z=g(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

由 $\varphi=0, g(\rho)=\rho$,得

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

因此

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

上式正是**欧拉公式**.

复数的几种表达式可以相互转换,以适应解决不同问题的需要.

1.2.2 复数球面

复数球面上的点也可以与复数构成一一对应关系,因而也可采用复数球面(又称黎曼球面)上的点来表示.

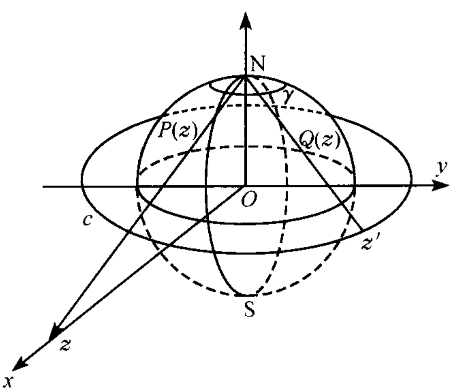

图 1.2

取一个球心在原点,半径为 1 的单位球面(图 1.2 所示),作竖直轴,使得它与平面上已给出的直角坐标平面 Oxy 相垂直,且构成右手直角坐标系. 竖直轴的正方向与此单位球面的交点记作 N,称为北极;竖直轴的负方向与此单位球面的交点记作 S,称为南极. 考虑起点在北极 N,通过球面上任意一点 $P(z)$ 的射线,与 Oxy 平面相交于一点,记作 z;反之,起点在北极 N,通过 Oxy 平面上的任一点 z' 的射线与单位球面也只交于一点,记作 $Q(z)$. 这样 Oxy 平面上所有点与单位球面上所有点(除了北极 N 以外)建立了一一对应关系. 此外,单位球面与 Oxy 平面的交线显然是圆周 $|z|=1$,它自己对应着自己;而上半球面(除了北极 N 以外)对应着圆外($|z|>1$)的所有点;下半球面对应着圆内($|z|<1$)所有点;南极对应着原点. 因此我们完全可以用球面上的点来表示复数,这球面就称为复数球面. 在地图制图学上,就是用平面上的点通过这样的方法来表示球面上的点,称为测地投影.

1.2.3 无穷远点

在实变函数微积分学中的 $+\infty$,只是一个符号而已,而复球面上的无穷远点 ∞ 却是一个完全确定的点,并且只有一个无穷远点.

下面我们来说明引入无穷远点的合理性. 在图 1.2 上考虑在 z 平面(Oxy 平