高等学校基础课程配套辅导用书

恩波教育 ENBO

主编 恩 波

高等数学

同济六版

习题解答

全书章节顺序、习题编号均与《高等数学》同济六版相同。全部题目按不同难度分为A、B、C三级。A级为基础题，为理解课本内容所必需；B级为提高题，有助于对课本内容的深入理解及对解题方法、技巧的进一步提高。C级为难度较高题，用于提高对题的分析、综合能力及课本知识的灵活运用。

赠

本书为《高等数学同步精讲》（同济六版）的赠品

定价：29.80元（含赠书）

目　　录

第一章 函数与极限

习题 1-1(教材上册 p21 ~ p23)

Ⓐ **1.** 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，
$A\cap B=[-10,-5)$，
$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，
$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

Ⓑ **2.** 设 A，B 是任意二个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证明 $x\in(A\cap B)^c\Rightarrow x\notin A\cap B$
$\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$
$\Rightarrow x\in A^c$ 或 $x\in B^c$
$\Rightarrow x\in A^c\cup B^c$，

从而 $(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$；

反之，$x\in A^c\cup B^c\Rightarrow x\in A^c$ 或 $x\in B^c$
$\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$
$\Rightarrow x\notin A\cap B$
$\Rightarrow x\in(A\cap B)^c$，

从而 $A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$.

于是 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

Ⓒ **3.** 设映射 $f: X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明 (1) $y\in f(A\cup B)\Rightarrow$ 存在 $x\in A\cup B$，使 $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$，这表示 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$；

反之，$y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Rightarrow$ 存在 $x\in A$ 或 $x\in B$，使 $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A\cup B)$，这表示 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

于是 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 由 $y\in f(A\cap B)\Rightarrow$ 存在 $x\in A\cap B$，使 $y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$，知 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

Ⓐ **4.** 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$； (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$； (6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；

(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$； (10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $3x+2\geqslant 0$，$x\geqslant-\dfrac{2}{3}$，定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0$，$x\neq\pm 1$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$，即 $x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0$，$|x|<2$，定义域为 $(-2,2)$.

(5) 定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，定义域为 $\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-1\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(7) $-1\leqslant x-3\leqslant 1$，$2\leqslant x\leqslant 4$，定义域为 $[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即 $x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0$，即 $x>-1$，定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Ⓐ **5.** 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不相同. 因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$,而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 不相同. 因为两者对应法则不同,当 $x<0$ 时,$g(x)=-x$.

(3) 相同. 因为两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不相同. 因为两者定义域不同.

A 6. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$,并作出 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 因为 $|x|=\left|\frac{\pi}{6}\right|<\frac{\pi}{3}$,所以

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}.$$

同理 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形见图 1-1.

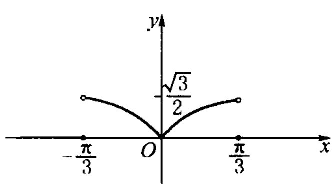

图 1-1

A 7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$;

(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

证明 (1) 任取 $x_1, x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$,则

$$\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2(1-x_1)-x_1(1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$,所以 $\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调递增.

(2) 任取 $x_1, x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则

$$(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1},$$

因为 $x_2>x_1>0$,所以 $x_2-x_1>0$,且 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$, $\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$. 从而 $y(x_2)>y(x_1)$,所以 $x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

B 8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证明 任取 $x_1, x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1, -x_2\in(0,l)$,且 $-x_2<-x_1$.

由于 $f(x)$ 是 $(-l,l)$ 内的奇函数,且在 $(0,l)$ 内单调增加,所以

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

从而 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

B 9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为奇函数,而 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 为偶函数.

(1) $g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x)$,

所以两个偶函数的和仍为偶函数. 而

$$f_1(-x)+f_2(-x)=-[f_1(x)+f_2(x)],$$

所以两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) $g_1(-x)\cdot g_2(-x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,

所以两个偶函数的乘积是偶函数. 而

$$\begin{aligned}&f_1(-x)\cdot f_2(-x)\\=&-f_1(x)\cdot(-f_2(x))\\=&f_1(x)\cdot f_2(x),\end{aligned}$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数. 又

$$\begin{aligned}&g_1(-x)\cdot f_1(-x)\\=&g_1(x)\cdot(-f_1(x))\\=&-g_1(x)\cdot f_1(x),\end{aligned}$$

所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

A10. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；

(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]$
$=x^2(1-x^2)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$
$\neq -f(x)$，

所以 $f(x)$ 是既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]$
$=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1$
$=-\sin x-\cos x+1\neq\pm f(x)$，

所以 $f(x)$ 是既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}$
$=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

A11. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin\pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$ 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin\pi x$ 是周期函数，周期 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 是周期函数，周期 $l=\pi$.

A12. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$；

(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow x=y^3-1\Rightarrow$ 反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}\Rightarrow$ 反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}\Rightarrow$ 反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}\Rightarrow$ 反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) $y=1+\ln(x+2)\Rightarrow x=e^{y-1}-2$

$\Rightarrow$ 反函数 $y=e^{x-1}-2$.

(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}\Rightarrow 2^x=2^x\cdot y+y$

$\Rightarrow 2^x(1-y)=y$

$\Rightarrow 2^x=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$

$\Rightarrow$ 反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

B13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 充分性. 设 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，则 $\forall x\in X$，取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则 $|f(x)|\leqslant M$，从而 $f(x)$ 在 X 上有界.

必要性. 设 $f(x)$ 有界，即 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，故知 $f(x)$ 既有下界 $M_1=-M$，又有上界 $M_2=M$，得证.

A14. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$;

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x$, $y_1=\dfrac{1}{4}$, $y_2=\dfrac{3}{4}$;

(2) $y=\sin 2x$, $y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=1$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{5}$;

(4) $y=e^{x^2}$, $y_1=1$, $y_2=e$;

(5) $y=e^{2x}$, $y_1=e^2$, $y_2=e^{-2}$.

A15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)$ $(a>0)$;

(4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

解 (1) $x^2\in[0,1]$,即 $x\in[-1,1]$,故定义域为$[-1,1]$.

(2) $\sin x\in[0,1]$,即 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$,故定义域为$[2k\pi,2k\pi+\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$.

(3) $x+a\in[0,1]$,即 $x\in[-a,1-a]$,故定义域为$[-a,1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

所以当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,有 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,即定义域为$[a,1-a]$;

当$a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为空集.

B16. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解 将 $g(x)=e^x$ 代替 x 代入 $f(x)$ 中,得

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\0, & |e^x|=1,\\-1, & |e^x|>1.\end{cases}$$

即 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

函数 $f[g(x)]$ 的图形如图 1-2(a) 所示.

将 $f(x)$ 代替 x 代入 $g(x)$ 中,得

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1=e, & |x|<1,\\e^0=1, & |x|=1,\\e^{-1}=\dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

函数 $g[f(x)]$ 的图形如图 1-2(b) 所示.

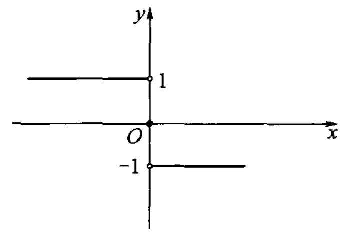

图 1-2(a)

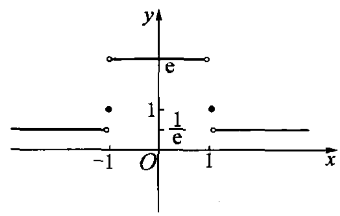

图 1-2(b)

A17. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(图 1-3). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.

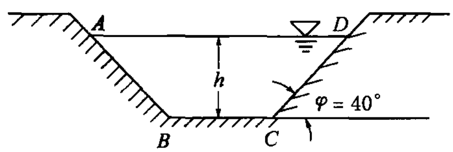

图 1-3

解 由图可知 $h=AB\sin\varphi=DC\sin\varphi$,故

$$AB=DC=\frac{h}{\sin 40°},$$

又从梯形的面积公式 $S_0=\dfrac{1}{2}h(BC+AD)$,得

$$\frac{1}{2}h[BC+(BC+2h\cot 40°)]=S_0,$$

从而 $$BC=\frac{S_0}{h}-h\cot 40°,$$

所以 $L=AB+BC+CD=\dfrac{2h}{\sin 40°}+\dfrac{S_0}{h}-h\cot 40°$,

即 $$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40°}{\sin 40°}h.$$

自变量 h 的取值范围由不等式组

$$\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ > 0 \end{cases}$$

确定，故定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}$.

B18. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低 1 分，但最低为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少?

解 (1) 由所给条件，实际售价 p 的函数关系式为

$$p = \begin{cases} 90, & 0 \leqslant x \leqslant 100, \\ 90-(x-100)\times 0.01, & 100 < x < 1\,600, \\ 75, & x \geqslant 1\,600. \end{cases}$$

(2) 厂方所获利润 P 的函数关系式为

$$P = (p-60)\cdot x = \begin{cases} 30x, & 0 \leqslant x \leqslant 100, \\ 31x - 0.01x^2, & 100 < x < 1\,600, \\ 15x, & x \geqslant 1\,600. \end{cases}$$

(3) 所获利润 P 为

$$P = 31\times 1\,000 - 0.01\times 1\,000^2 = 21\,000(\text{元}).$$

A19. 求联系华氏温标(用 °F 表示)和摄氏温标(用 ℃ 表示)的转换公式，并求

(1) 90 °F 的等价摄氏温度和 −5 ℃ 等价的华氏温度；

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温和摄氏温度的读数是一样的?

解 由物理学的知识知道，华氏温和摄氏温度之间的关系是一个线性函数，且 32 °F 相当于 0 ℃，212 °F 相当于 100 ℃. 于是，可设

$$\mathrm{F} = k\mathrm{C} + l,$$

其中 k, l 为常数，而且 $32 = l$; $212 = 100k + l$. 由此解得 $l = 32, k = 1.8$，故华氏温与摄氏温度的转换公式为 $\mathrm{F} = 1.8\,\mathrm{C} + 32$. (∗)

(1) 在公式(∗)以 F = 90 代入，得 $C \approx 32.2$. 即 90 °F 约等价于 32.2 ℃；在公式(∗)以 C = −5 代入，得 $F \approx 23$. 即 −5 ℃ 等价于 23 °F.

(2) 设 $\mathrm{F} = \mathrm{C} = t$，则由(∗)得

$$t = 1.8t + 32,$$

由此解得 $t = -40$. 即华氏温度 -40° 时，摄氏温度也是 -40°.

A20. 利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数型模型来推测 2010 年的世界人口.

年　份	人口数(百万)	当年人口与上一年人口的比值
1986	4 936	
1987	5 023	1.017 6
1988	5 111	1.017 5
1989	5 201	1.017 6
1990	5 329	1.024 6
1991	5 422	1.017 5

解 观察表的第 3 列，可以猜想 1986 年后的每一年，人口都是上一年 1.018 倍. 于是，1986 年后的第 t 年，世界人口将是(单位：百万)

$$P(t) = 4\,936\times 1.018^t,$$

而 2010 年相应于 $t = 24$，由于

$$P(24) = 4\,936\times 1.018^{24} \approx 7\,573.9(\text{百万}) \approx 76(\text{亿}),$$

故 2010 年世界人口估计为 76 亿.

习题 1－2(教材上册 p30 ～ p31)

A 1. 下列各题中，哪些数列收敛，哪些数列发散?对收敛数列，通过观察数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$；　(2) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$；　(4) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n = n(-1)^n$；　(6) $x_n = \dfrac{2^n-1}{3^n}$；

(7) $x_n = n - \dfrac{1}{n}$；

(8) $x_n = [(-1)^n + 1]\dfrac{n+1}{n}$.

答 (5)(7)(8) 发散，(1)(2)(3)(4)(6) 收敛，极限为：(1) 0；(2) 0；(3) 2；(4) 1；(6) 0.

B 2. 设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$,问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ $=$?求N,使当$n>N$时,x_n与其极限之差的绝对值小于正数ε.当$\varepsilon=0.001$时,求出N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|=\frac{1}{n}\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

于是$\forall\varepsilon>0$,要使$|x_n-0|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可.

当$\varepsilon=0.001$时,$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1000$.即若取$\varepsilon=0.001$,只要$n>1000$,就有$|x_n-0|<0.001$.

B 3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$,欲使$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只须$n^2>\frac{1}{\varepsilon}$,即$n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.于是$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,只要$n>N$,就有$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$,由

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right|=\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

可知只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$.取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,于是$\forall\varepsilon>0$,只要$n>N$,就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,所以\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

(3) $$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n},$$

要使$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只要$\frac{a^2}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{a^2}{\varepsilon}$,于是$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$,只要$n>N$,就有$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

(4) $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|=\frac{1}{10^n}<\frac{1}{n}$,

要使$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$,于是$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,就有

$|0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}-1|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

C 4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.并举例说明:如果数列$\{|x_n|\}$有极限,但数列$\{x_n\}$未必有极限.

证明 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,所以$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当$n>N$时,总有$|u_n-a|<\varepsilon$,

故 $||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$.

于是$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,亦总有

$$||u_n|-|a||<\varepsilon,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}|u_n|=|a|.$$

反例:取$x_n=(-1)^n$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在.

B 5. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

证明 因数列$\{x_n\}$有界,故$\exists M>0$,对一切n均有$|x_n|\leqslant M$.

$\forall\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,所以$\exists N$,当$n>N$时,总有 $|y_n-0|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,

从而　$|x_ny_n - 0| = |x_n|\cdot|y_n| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$

故　$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n = 0.$

Ⓒ **6.*** 对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明$x_n\to a(n\to\infty)$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，因为$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以$\exists k_1>0$. 当$2k-1>2k_1-1$时，有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；

又因为$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，所以$\exists k_2>0$. 当$2k>2k_2$时，有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

现取$N_3=\max\{2k_1-1,\ 2k_2\}$. 当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

习题 1-3(教材上册 p37 ~ p39)

Ⓐ **1.** 对图 1-4 所示的函数$f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.

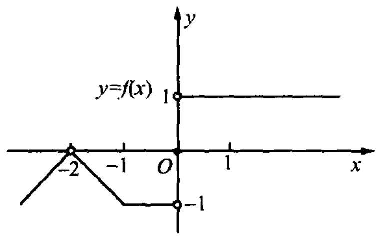

图 1-4

(1) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -1$；

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在，因为$f(0^-)=-1$，$f(0^+)=1$，两者不相等.

Ⓐ **2.** 对图 1-5 所示的函数$f(x)$，下列陈述哪些是对的，哪些是错的？

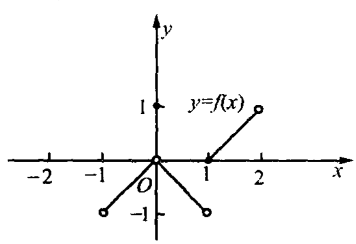

图 1-5

(1) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在；　(2) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$；　(4) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$不存在；

(6) 对每个$x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

答　(1) 错；(2) 对；(3) 错. 事实上，$f(0^+)=f(0^-)=0$，因而$\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

注意：$\lim\limits_{x\to0} f(x)$是否存在及存在时极限值等于多少，与$f(0)$是否有定义及有定义时$f(0)$等于多少都没有关系.

(4) 错；(5) 对. 事实上，$f(1^-)=-1$，$f(1^+)=0$，两者不等，因而$\lim\limits_{x\to1} f(x)$不存在.

(6) 对.

Ⓐ **3.** 对图 1-6 所示的函数，下列陈述哪些是对的，哪些是错的？

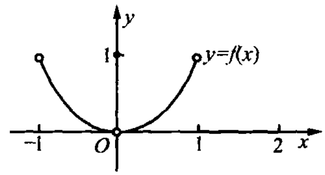

图 1-6

(1) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=1$；　(2) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$；　(4) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$；

(5) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$；　(6) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=0$；　(8) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$.

答　(1) 对. (2) 对，因为当$x<-1$时，$f(x)$无定义. (3) 对，因$f(0^+)=f(0^-)=0$. 注意，不要因为$f(0)=1$而误认为$\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$. (4) 错. 注意：$\lim\limits_{x\to0} f(x)$的值与$f(0)$的取值无关. (5)(6)(7) 对. (8) 错，因$x>2$时$f(x)$无定义，$f(2^+)$不存在.

Ⓐ **4.** 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to0$时的左、右极限，并说明它们在$x\to0$时的极限是否存在.

解　$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1,$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1,$

因为$f(0^-)=f(0^+)$，所以$\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$.

$$\varphi(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\varphi(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

因为 $\varphi(0^-)\neq\varphi(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$ 不存在.

▲ 5* 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$；

(2) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

解 (1) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|(3x-1)-8|=3|x-3|<\varepsilon,$$

只须 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就都有 $|(3x-1)-8|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to3}(3x-1)=8.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|(5x+2)-12|=5|x-2|<\varepsilon,$$

只须 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，就都有 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to2}(5x+2)=12.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x+2|<\varepsilon,$$

只须取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时，就都有 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

只须 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时，便都有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2.$$

▲ 6* 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon,$$

只须 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$，取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$，当 $|x|>X$ 时，就都有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon,$$

只须 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时，就都有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$$

▲ 7* 当 $x\to2$ 时，$y=x^2\to4$. 问 δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

解 $|y-4|=|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$

当 $x\to2$ 时，$|x-2|\to0$. 不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$ 从而 $3<x+2<5$.

则 $|y-4|=|x+2|\cdot|x-2|<5|x-2|$.

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|y-4|<\varepsilon$. 只要 $5|x-2|<\varepsilon$.

即 $\qquad |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.

于是 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$.

当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<\varepsilon$.

取 $\varepsilon=0.001$，则 $\delta=0.0002$.（即 $\delta=0.0002$ 时. 当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$）满足题意.

▲ 8* 当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

解 要使 $|y-1|=\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\dfrac{4}{x^2+3}<0.01$，只须 $|x|>\sqrt{\dfrac{4}{0.01}-3}=\sqrt{397}$，

取 $X=\sqrt{397}$，当 $|x|>X$ 时，就有

$$|y-1|<0.01.$$

▲ 9* 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为零.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $||x|-0|=|x|<\varepsilon$，只须取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有

$||x|-0|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

B10. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证明　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$；

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $x>X$ 或 $x<-X$，因而有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

所以 $$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

B11. 根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明　充分性. 设 $f(x_0^-)=A=f(x_0^+)$，于是对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$，当 $-\delta_1<x-x_0<0$ 或 $0<x-x_0<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $-\delta<x-x_0<0$ 或 $0<x-x_0<\delta$ 时，上式也成立. 这表示 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

必要性. 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $\delta_1=\delta_2=\delta$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$，当 $-\delta_1<x-x_0<0$ 及 $0<x-x_0<\delta_2$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

因此 $$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A.$$

B12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

解　$x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性定理为：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $N>0$，使得当 $|x|>N$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理证明：取 $\varepsilon=1$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\exists N>0$，当 $|x|>N$ 时，有 $|f(x)-A|<1$

$\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1$，

记 $M=|A|+1$，定理就得到证明.

习题 1－4(教材上册 p42)

A 1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

答　两个无穷小的商不一定是无穷小. 例如当 $x\to0$ 时，$x^2,3x^2,x^3$ 都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{x^2}{3x^2}$ 不是无穷小；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^3}=\infty$，$\dfrac{x^2}{x^3}$ 也不是无穷小.

A 2. 根据定义证明：

(1) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to3$ 时的无穷小；

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷小.

证明　(1) $\forall\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|=|x-3|<\varepsilon$，可知只须取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有
$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon,\text{即有}\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x+3}=0,$$
所以 $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 当 $x\to3$ 时为无穷小.

(2) $\forall\varepsilon>0$，由 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$ 可知只须取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就总有 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$，即有 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，

所以 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to0$ 时为无穷小.

A 3. 根据定义证明：函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件，能使
$$|y|>10^4?$$

证明　$\forall M>0$，要使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+2\right|>M$，只须 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M+2$，即 $|x|<\dfrac{1}{M+2}$，

取 $\delta=\dfrac{1}{M+2}$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就总有
$$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|>\left|\frac{1}{x}\right|-2>M,$$
所以当 $x\to0$ 时，$y=\dfrac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

由上面证明可知，当 $0<|x|<\dfrac{1}{10\,002}$ 时，$|y|>10^4$.

A 4. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1) $\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$，而$\frac{1}{x}$当$x\to\infty$时是无穷小，由定理1知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2.$$

(2) $x\neq 1$时，$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$，而$x\to 0$时，x是无穷小，由定理1知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=1.$$

Ⓐ 5. 根据函数极限或无穷大的定义，填写下表(题例在同一表中)：

解

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时，即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时，即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时，即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时，即有$f(x)<-M$.
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0<x-x_0<\delta$时，即有$f(x)<-M$.
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当$0>x-x_0>-\delta$时，即有$f(x)<-M$.
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当$\lvert x\rvert>X$时，即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$\lvert x\rvert>X$时，即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$\lvert x\rvert>X$时，即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$\lvert x\rvert>X$时，即有$f(x)<-M$.
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x>X$时，即有$f(x)<-M$.
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$\lvert f(x)\rvert>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$f(x)>M$.	$\forall M>0,\exists X>0$，使当$x<-X$时，即有$f(x)<-M$.

Ⓐ 6. 函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这个函数是否为$x\to+\infty$时的无穷大？为什么？

解 $y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内无界. 事实上，$\forall M>0$，在$(-\infty,+\infty)$内总能找到$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，使得

$$\lvert 2k\pi\cos(2k\pi)\rvert=\lvert 2k\pi\rvert>M,$$

这只须$\lvert k\rvert>\frac{M}{2\pi}(k\in\mathbf{Z})$即可.

但$y=x\cos x$当$x\to+\infty$时不是无穷大. 如取$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{N})$，当$n\to\infty$时，$x_n\to\infty$，有$y(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

这说明当$x\to+\infty$时，$x\cos x$不是无穷大.

Ⓑ 7. 证明：函数$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界，但这函数不是$x\to0^+$时的无穷大.

证明 $\forall M>0$，取$x_k=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，$k\in\mathbf{N}$，

$$y(x_k)=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2},$$

要$2k\pi+\frac{\pi}{2}>M$，只须$k>\frac{1}{2\pi}\left(M-\frac{\pi}{2}\right)$，所以$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$(0,1]$上无界.

又若取$x_n=\frac{1}{n\pi}(n\in\mathbf{N})$，当$n\to\infty$时，$x_n\to0^+$，

而 $y(x_n)=n\pi\sin(n\pi)=0$，

这说明当 $x\to 0^+$ 时函数不是无穷大.

▲ **8.** 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

解 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{2-x^2}=0$，知 $y=0$ 是图形的水平渐近线.

由 $\lim\limits_{|x|\to\sqrt{2}}\dfrac{4}{2-x^2}=0$，知 $x=-\sqrt{2}$ 及 $x=\sqrt{2}$ 都是图形的水平渐近线.

习题 1－5(教材上册 p49 ～ p50)

▲ **1.** 计算下列极限(解答直接写在原题的后面，未另抄题)：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4+5}{2-3}=-9.$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}$

$=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2hx+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2-0+0=2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{0}{1}$

$=0.$

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}$

$=\dfrac{2}{3}.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=(1+0)(2-0)$

$=2.$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}.$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

$=\dfrac{1}{5}.$

(14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}$

$=-1.$

▲ **2.** 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$.

▲ **3.** 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 (1) 因为当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小量，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界变量，所以 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，故 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量，而 $|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\arctan x$ 为有界变量，故 $\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x$ 是无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

A **4.** 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$.

下列陈述哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n, n\in\mathbf{N}^*$； (2) $b_n<c_n, n\in\mathbf{N}^*$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

解 (1) 错. 例如，$a_n=\dfrac{10}{n}$，$b_n=\dfrac{2n-1}{2n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，但当 $n=1,2,\cdots,10$ 时，$a_n\geqslant 1$，而 $b_n<1$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$. 不是对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 成立 $a_n<b_n$.

(2) 错. 例如 $b_n=\dfrac{n+1}{n}$，$c_n=\dfrac{n}{10}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，但对 $n=1,2,\cdots,9$，$c_n<1$，而 $b_n>1$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 成立. 因而不可能对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 成立 $b_n<c_n$.

(3) 错. 例如 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$c_n=n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$ 存在.

(4) 对，这可以用反证法证明. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，可以认为 $b_n>0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在，设为 l，则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{l}{1}=l,$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾.

A **5.** 下列陈述，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 不存在；

解 (1) 对. 因若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}g(x)&=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)-f(x)]\\&=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim_{x\to x_0}f(x)\end{aligned}$$

也存在，与已知条件矛盾.

(2) 错. 例如 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$，$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$，则 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 及 $g(x)$ 都不存在极限，但

$$\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=2,$$

极限存在.

(3) 错. 例如 $f(x)=x$，$g(x)=1+\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$不存在，但

$$\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

B **6.** 证明本节定理 3 中的(2).

证明 因为 $\lim f(x)=A$，所以

$$f(x)=A+\alpha\quad(\lim\alpha=0),$$

同理 因为 $\lim g(x)=B$，所以

$$g(x)=B+\beta\quad(\lim\beta=0),$$ 故

$$\begin{aligned}f(x)\cdot g(x)&=(A+\alpha)(B+\alpha)\\&=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta\\&=AB+\gamma,\end{aligned}$$

其中 $\gamma=A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 仍为无穷小，所以

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

习题 1－6(教材上册 p56 ～ p57)

A **1.** 计算下列极限(解法直接写在了原题后面，未另抄题)：

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{\omega x}\cdot\omega=\omega\cdot 1=\omega$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{\cos 3x}=1\times\dfrac{3}{1}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{2}{5}=1\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1\times 1=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{2^n}\Big/\dfrac{x}{2^n}\right)\cdot x=x\cdot 1$
$=x$.

A 2. 计算下列极限(解法直接写在了原题后面,未另抄题):

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{\frac{1}{-x}}]^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-k}=e^{-k}$. ($k$ 为正整数)

B 3.* 根据函数极限的定义,证明极限存在的准则 Ⅰ′.

证明　仅就 $x\to x_0$ 的情形证明之,$x\to\infty$ 及其他情形的证明类似.

$\forall\varepsilon>0$,因为 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,于是 $\exists\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,总有

$|g(x)-A|<\varepsilon$,从而 $A-\varepsilon<g(x)$;　①

又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,对于上述 $\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,总有

$|h(x)-A|<\varepsilon$,从而 $h(x)<A+\varepsilon$.　②

再由题设,当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$ 时,总有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\qquad ③$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,r\}$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,①,②,③ 同时成立,即有

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

所以 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,即 $|f(x)-A|<\varepsilon$,即　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

B 4. 利用极限存在准则证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

(3) 数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$;　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

证明　(1) 因为 $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$,所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$.

(2) 因为

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+\pi},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{n}}=1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{n}{n^2+\pi}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{\pi}{n^2}}=1$,

由夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

(3) 用单调有界数列必有极限来证明该极限存在. 此数列的通项为 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$　($n=2,3,\cdots$),$x_1=\sqrt{2}$. 先证单调性. 由

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重根号}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+0}}}=x_{n-1}$$

($n=2,3,\cdots$),

知数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 下证它有上界. 用数学归纳法来证.

当 $n=1$ 时,$x_1=\sqrt{2}<2$. 设 $x_n<2$,则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2,$$

故对一切自然数 n,都有 $x_n<2$,故数列 $\{x_n\}$ 收敛,即其极限存在.

(4) 当 $x>0$ 时,$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$,而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1$,所以

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[n]{1+x}=1;\qquad ①$$

又当 $x<0$ 时,$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$,而 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+$

$x)=1$，所以

$$\lim_{x\to0^-}\sqrt[n]{1+x}=1,\qquad ②$$

由①②知$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

(5) 因为当$x>0$时，$\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1$，

故有 $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$，

从而 $x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant x\cdot\frac{1}{x}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$;

$\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$,

所以由夹逼准则有 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

习题 1－7(教材上册 p59 ～ p60)

A 1. 当$x\to0$时，$2x-x^2$与x^2-x^3相比，哪一个是高阶无穷小?

解 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0$，所以$x^2-x^3$是比$2x-x^3$高阶的无穷小.

A 2. 当$x\to1$时，无穷小$1-x$和(1) $1-x^3$，(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$是否同阶?是否等价?

解 因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=3$;

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}(1+x)=1,$$

所以(1) $1-x$和$1-x^3$是同阶无穷小，但不等价；

(2) $1-x$和$\frac{1}{2}(1-x^2)$是等价无穷小.

A 3. 证明：当$x\to0$时，有

(1) $\arctan x\sim x$;　　(2) $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

证明 (1) 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{y=\arctan x}\lim_{y\to0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1,$$

所以 $\arctan x\sim x(x\to0)$.

(2) 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot2\cos x}=1.$$

所以$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}(x\to0$时).

A 4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限(解法直接写在原题后面，未另抄题)：

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\lim_{x\to0}x^{n-m}=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{1}{6}x^3}=-3.$$

B 5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$(自反性)；

(2) 若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$(对称性)；

(3) 若$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$(传递性).

证明 (1) 因为$\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$，所以$\alpha\sim\alpha$.

(2) 因为$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1$，所以$\beta\sim\alpha$.

(3) 因为$\lim\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\left(\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)=1\times1=1$，所以$\alpha\sim\gamma$.

习题 1－8(教材上册 p64 ～ p65)

A 1. 设$y=f(x)$的图形如图1-7所示，试指出$f(x)$