点集偏差引论

Introduction to Discrepancy of Point Sets

朱尧辰 著

中国科学技术大学出版社

当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书

中国科学技术大学

校友文库

点集偏差引论

Introduction to Discrepancy of Point Sets

朱尧辰 著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书是关于点集偏差理论的导引，包括点集偏差的基本概念和主要性质、低偏差点集的构造、偏差上界和下界估计的常用方法、点集偏差的精确计算公式、点集离差的基本结果，以及点集偏差和离差在拟 Monte Carlo 方法中的一些应用，如具有数论网点的多维求积公式的构造、多维数值积分的格法则、函数最大值近似计算的数论方法等；还给出了近二十年来的一些新进展.

本书可供大学数学系高年级学生和研究生以及有关科研人员阅读.

图书在版编目（CIP）数据

点集偏差引论 / 朱尧辰著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2011.1
(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书：中国科学技术大学校友文库)
“十一五”国家重点图书
ISBN 978-7-312-02628-7

I. 点⋯ II. 朱⋯ III. 点集—偏差（数学） IV. O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 250536 号

出版发行 中国科学技术大学出版社
地址 安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
印　　刷 合肥晓星印刷有限责任公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 710 mm × 1000 mm 1/16
印　　张 19.5
字　　数 366 千
版　　次 2011 年 1 月第 1 版
印　　次 2011 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 1—2500 册
定　　价 58.00 元

编 委 会

总　　序

侯建国
(中国科学技术大学校长、中国科学院院士、第三世界科学院院士)

大学最重要的功能是向社会输送人才. 大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度, 很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的.

中国科学技术大学建校只有短短的五十年, 之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学之一, 主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生. 他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强, 在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献, 为中国科大赢得了"科技英才的摇篮"的美誉.

2008 年 9 月, 胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信, 信中称赞说: 半个世纪以来, 中国科学技术大学依托中国科学院, 按照全院办校、所系结合的方针, 弘扬红专并进、理实交融的校风, 努力推进教学和科研工作的改革创新, 为党和国家培养了一大批科技人才, 取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果, 为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献.

据统计, 中国科大迄今已毕业的 5 万人中, 已有 42 人当选中国科学院和中国工程院院士, 是同期 (自 1963 年以来) 毕业生中当选院士数最多的高校之一. 其中, 本科毕业生中平均每 1 000 人就产生 1 名院士和七百多名硕士、博士, 比例位居全国高校之首. 还有众多的中青年才俊成为我国科技、企业、教育等领域的领军人物和骨干. 在历年评选的"中国青年五四奖章"获得者中, 作为科技界、科技创新型企业界青年才俊代表, 科大毕业生已连续多年榜上有名, 获奖总人数位居全国高校前列. 鲜为人知的是, 有数千名优秀毕业生踏上国防战线, 为科技强军做出了重要贡献, 涌现出二十多名科技将军和一大批

国防科技中坚.

为反映中国科大五十年来人才培养成果, 展示毕业生在科学研究中的最新进展, 学校决定在建校五十周年之际, 编辑出版《中国科学技术大学校友文库》, 于 2008 年 9 月起陆续出书, 校庆年内集中出版 50 种. 该《文库》选题经过多轮严格的评审和论证, 入选书稿学术水平高, 已列为"十一五"国家重点图书出版规划.

入选作者中, 有北京初创时期的毕业生, 也有意气风发的少年班毕业生; 有"两院"院士, 也有 IEEE Fellow; 有海内外科研院所、大专院校的教授, 也有金融、IT 行业的英才; 有默默奉献、矢志报国的科技将军, 也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才; 有"文革"后留美学者中第 1 位担任美国大学系主任的青年教授, 也有首批获得新中国博士学位的中年学者 …… 在母校五十周年华诞之际, 他们通过著书立说的独特方式, 向母校献礼, 其深情厚意, 令人感佩!

近年来, 学校组织了一系列关于中国科大办学成就、经验、理念和优良传统的总结与讨论. 通过总结与讨论, 我们更清醒地认识到, 中国科大这所新中国亲手创办的新型理工科大学所肩负的历史使命和责任. 我想, 中国科大的创办与发展, 首要的目标就是围绕国家战略需求, 培养造就世界一流科学家和科技领军人才. 五十年来, 我们一直遵循这一目标定位, 有效地探索了科教紧密结合、培养创新人才的成功之路, 取得了令人瞩目的成就, 也受到社会各界的广泛赞誉.

成绩属于过去, 辉煌须待开创. 在未来的发展中, 我们依然要牢牢把握"育人是大学第 1 要务"的宗旨, 在坚守优良传统的基础上, 不断改革创新, 提高教育教学质量, 早日实现胡锦涛总书记对中国科大的期待: 瞄准世界科技前沿, 服务国家发展战略, 创造性地做好教学和科研工作, 努力办成世界一流的研究型大学, 培养造就更多更好的创新人才, 为夺取全面建设小康社会新胜利、开创中国特色社会主义事业新局面贡献更大力量.

是为序.

2008 年 9 月

序

本书研究点集 (由有限或无限可数多个点组成的离散集合) 或点列的偏差的性质和应用. 点集偏差的概念源于 20 世纪 20~30 年代. 偏差这个术语是 1935 年由 J. G. van der Corput 首先提出的, 它刻画了一个点集在某个区域 (如区间 $[0,1]$ 或 d 维正方体 $[0,1]^d$) 中分布的一致 (均匀) 程度, 在一致分布理论的研究中起着重要作用. 由于采用一致分布点列作为网点构造求积公式时, 误差估计同点列的偏差紧密相关, 因而低偏差点列被广泛应用在拟 Monte Carlo 方法中. 特别是, 近三十多年来, 各种类型的应用数论方法构造的伪随机点集和多维求积公式应运而生. 因此, 点集偏差理论不仅是重要的数论研究课题, 而且也具有明显的实用价值. 本书是关于这个理论的导引, 给出了点集偏差理论的基本概念、主要结果, 以及某些重要方法和应用, 其中包括近二十年来的一些重要进展. 本书主要面向大学数学系高年级学生和研究生, 为他们进入某些前沿课题提供一个桥梁, 对有关研究人员也有一定参考价值.

各章内容安排如下:

第 1 章给出一维和多维点列偏差的概念和简单性质, 着重研究偏差下界估计的阶 (Roth 定理、Schmidt 定理等) 以及 van der Corput 点列及其推广的偏差上界估计, 借此给出偏差估计的“初等”方法; 还简要介绍了一致分布点列的概念以及点列偏差的其他常见形式. 内容多数为经典结果. 第 2 章建立有限点列的星偏差和 L_2 偏差的精确计算公式, 主体是多维情形星偏差的精确计算公式, 这是 20 世纪 90 年代出现的新结果. 第 3 章研究一些类型的低偏差点集, 并给出偏差估计的指数和方法. 首先证明了 Erdös–Turán–Koksma 不等式, 这是偏差估计的基本工具; 然后作为示例, 应用它给出 Kronecker 点列和广义 Kronecker 点列的偏差上界估计. 本章的后半部分研究一些经典的低偏差点集, 如 Korobov 点列、Niederreiter 的 (t,m,s) 网和 (t,s) 点列, 还介绍了若干新结果 (如 Skriganov 点列等). 第 4 章专门论述点集的离差, 包括概

念、基本性质、某些一维和二维点列的离差的精确计算公式, 以及低离差点集等. 离差这个概念刻画了无限点列在某个区域中的稠密性, 与偏差概念关系密切, 并且在拟 Monte Carlo 最优化方法中有重要应用, 但在国内外现有有关专著中只有少数对此有所论及. 第 5、第 6 两章是上述理论的应用, 包括多维数值积分和总体最优化两个方面. 第 5 章给出多维数值积分的基本数论方法, 重点是拟 Monte Carlo 积分的最优系数法和具有实用价值的多维数值积分的格法则. 第 6 章研究求总体最优化的拟随机搜索方法, 给出几种函数最大值近似计算的数论方法, 并着重于收敛性的分析. 这两章也涉及一些新进展. 每章最后一节是对正文的引伸或补充, 或者提及某些研究问题.

限于笔者的水平和研究兴趣, 本书在论述和取材等方面难免存在不妥甚至谬误, 恳切地期待读者和同行批评指正.

朱尧辰

2010 年 3 月于北京

符 号 说 明

1° $\mathbb{N}$ 正整数集

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (依次) 整数集, 有理数集, 实数集, 复数集

2° (对于 $a \in \mathbb{R}$)

$[a]$ a 的整数部分, 即不超过 a 的最大整数

$\{a\} = a - [a]$ a 的分数部分 (也称小数部分)

$\|a\| = \min(a - [a], [a] + 1 - a)$ a 与最近整数间的距离

$\lceil a \rceil$ 大于或等于 a 的最小整数

$\overline{a} = \max(|a|, 1)$

$e(a) = \exp(2\pi \mathrm{i} a) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a}$ $(\mathrm{i} = \sqrt{-1})$

3° (对于整数 a, b, a_i 和正整数 M)

$\gcd(a_1, \cdots, a_n)$ $a_1, \cdots, a_n$ 的最大公因子

$a \equiv b \pmod{M}$ 或 $a \equiv b\,(M)$ a, b 模 M 同余, 即 $M | (a - b)$

(对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$)

$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y}\,(M)$ $x_j \equiv y_j \pmod{M}$ $(j = 1, \cdots, d)$

4° (对于 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$)

$\{\boldsymbol{a}\} = (\{a_1\}, \cdots, \{a_d\})$

$|\boldsymbol{a}| = |a_1| \cdots |a_d|$

$|\boldsymbol{a}|_0 = \overline{a}_1 \cdots \overline{a}_d$

$|\boldsymbol{a}|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} |a_k|$

5° (对于 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d), \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$)

$\boldsymbol{\alpha\beta} = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_d\beta_d$

$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ (或 $\boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{\beta}$) $\alpha_i < \beta_i$ (或 $\alpha_i \leqslant \beta_i$) $(i = 1, \cdots, d)$

$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ d 维长方体 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{\alpha} \leqslant \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\beta}\}$

$[\alpha_1,\beta_1)\times\cdots\times[\alpha_d,\beta_d)$ 同上

($[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 及 $[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_d,\beta_d]$ 类似)

6° (记 $\mathbf{0}=(0,\cdots,0),\mathbf{1}=(1,\cdots,1)$)

$\overline{G}_d,[0,1]^d,[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ d 维单位正方体

$G_d,[0,1)^d,[\mathbf{0},\mathbf{1})$ d 维半开单位正方体

7° $|D|$ 有界区域 $D\subset\mathbb{R}^d$ 的体积

$|A|$ 有限集 A 中元素的个数

8° $\mathscr{S}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\}$ $\mathbb{R}^d$ 中有限或无限点集

$\mathscr{S}=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\}$(计及点的顺序) $\mathbb{R}^d$ 中有限或无限点列

$\{\mathscr{S}\}=\{\{\boldsymbol{a}_1\},\{\boldsymbol{a}_2\},\cdots\}$

$\mathscr{S}^{(n)}=\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$

9° $\mathscr{V}_2=\mathscr{V}_{2,r}$ 以 r 为底的 van der Corput 点列

$\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_{1,r}$ 以 r 为底的 (一维)van der Corput 点列

$\mathscr{H}_d$ d 维 Hammersley 点列

$\mathscr{H}_d'$ d 维 Halton 点列

10° (对于 $\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_d)\in\mathbb{Z}^d$ $(d\geqslant 1)$)

$\sum\limits_{\boldsymbol{m}(M)}$ 对满足 $-M/2<m_j<M/2$ $(1\leqslant j\leqslant d)$ 的 $\boldsymbol{m}$ 求和

$\sum\limits_{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{h}]}$ 对满足 $|m_j|\leqslant h_j$ $(1\leqslant j\leqslant d)$ 的 $\boldsymbol{m}$ 求和

$\sum\limits_{\boldsymbol{m}}{}'$ 求和时不计 $\boldsymbol{m}=\mathbf{0}$

11° $\log a$ (与 $\ln a$ 同义) 实数 $a>0$ 的自然对数

$\lg a$ 实数 $a>0$ 的常用对数 (即以 10 为底的对数)

$\|f\|_p$ 函数 f 的 L_p 模

$\omega(f;t)$ 函数 f 的 (在 $[0,1]^d$ 上的) 连续性模

$\omega_{\mathscr{D}}(f;t)$ 函数 f 的 (在有界集 $\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^d$ 上的) 连续性模

$V_f([a,b])$ 实函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差

$v_f^{(d)}(\overline{G}_d)$ 实函数 f 在 $\overline{G}_d$ 上的 Vitali 意义的变差

$\mathscr{V}_f(\overline{G}_d)$ 实函数 f 在 $\overline{G}_d$ 上的 Hardy–Krause 意义的全变差

$\widehat{f}(t)$ 函数 f 的 Fourier 变换

$\widehat{f}_n$ (或 $C(\boldsymbol{m})$) 函数 f 的 Fourier 系数

$f*g(x)$ 周期函数 (周期为 1) f 和 g 的卷积

$\Gamma(z)$ 伽马函数

$\chi(A;\boldsymbol{x})$ 集合 $A\subset\mathbb{R}^d$ 的特征函数

$\mathrm{sgn}(x)$ 符号函数

$\varphi_r(a)$ 倒根函数 (倒位函数)(a 为正整变量)

$\delta_n(a)$ 见第 5 章 5.2 节 2°

$\det(\boldsymbol{A})$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

δ_{ij} Kronecker 符号

12° (对于 G_d 中的点数为 n 的有限点集 (点列) $\mathscr{S}_d$)

$A(J;n;\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 落在区间 $J\subset G_d$ 中的点的个数

$D_n(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的偏差

$D_n^*(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的星偏差

$D_n^{(p)}(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的 L_p 偏差

$J_n(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的迷向偏差

$\mathscr{D}_n(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的带权偏差

$\mathscr{D}_n^*(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的带权星偏差

$\mathscr{D}_n^{(p)}(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的带权 L_p 偏差

$\mathscr{D}_n^{(\varphi)}(\mathscr{S}_1)$ $\mathscr{S}_1$ 的带权 φ 偏差

$P_n(\mathscr{S}_d)$ $\mathscr{S}_d$ 的多项式偏差

13° $d_n(\mathscr{S};\rho;\mathscr{D})$ 有限点集 $\mathscr{S}$ 在 $\mathscr{D}$ 中 (关于距离 ρ) 的离差

$d_n(\mathscr{S})=d_n(\mathscr{S};\rho_1;\overline{G}_d)$, 其中 $\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\Big(\sum\limits_{j=1}^{d}(x_j-y_j)^2\Big)^{1/2}$

$d_n'(\mathscr{S})=d_n(\mathscr{S};\rho_2;\overline{G}_d)$, 其中 $\rho_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant d}|x_j-y_j|$

14° (对于 $\mathbb{R}^d$ 中的格 $\varGamma$)

$\det(\varGamma)$ 格行列式

$\varGamma^{\perp}$ 格 $\varGamma$ 的对偶格

Qf 格法则 (以 $\varGamma$ 为积分格)

$\mathscr{A}(Q)$ 格法则 Qf 的网点集

$(Q_1\oplus Q_2)f$ 格法则 Q_1f 和 Q_2f 的直和

$\widehat{Q}^{(s)}f$ (d 维) 格法则 Qf 的 s $(<d)$ 维主投影

$\widetilde{Q}^{(m)}f$ (d 维) 格法则 Qf 的 m^d 复制

$\rho(\varGamma)$ 积分格 $\varGamma$ 的优标

$P_\alpha(\varGamma)$ 见第 5 章 5.4 节 4°

15° $E_d^\alpha(C),E_d^\alpha(C)$ 见第 5 章 5.2 节 1°

$H_{d,p}^\alpha(C),H_{d,p}^\alpha(C),H_d^\alpha(C)$ 见第 5 章 5.5 节 5°

$Q_{d,p}^\alpha(C),Q_{d,p}^\alpha(C),Q_d^\alpha(C)$ 见第 5 章 5.5 节 5°

修改了的 $H_{d,p}^\alpha(C)$ 和 $H_d^\alpha(C)$ 见第 5 章 5.5 节 5°

$\widetilde{H}_d^\alpha(C)$(Korobov 意义) 见第 5 章 5.5 节 5°

16° □ 表示定理、引理、推论或命题证明完毕

目　　次

第 1 章　点集的偏差

本章包含点集偏差理论中的一些基本概念和基本结果, 如单位区间 $[0,1)$ 和 d ($\geqslant 2$) 维单位正方体 $[0,1)^d$ 中的点集的偏差和星偏差, 以及一些与此有关的简单性质及偏差的界、一致分布点列等. 还简要地给出任意有界区域中的点集的偏差和一致分布点列的概念和性质, 以及其他一些形式的偏差概念.

1.1　一维点集的偏差

设 $\mathscr{S}=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是单位区间 $[0,1)$ 中的一个实数列, 对于任意的 $\alpha,\beta\in[0,1]$, 且 $\alpha<\beta$, 用 $A\big([\alpha,\beta);n\big)=A\big([\alpha,\beta);n;\mathscr{S}\big)$ 表示这个数列的落在区间 $[\alpha,\beta)$ 中的项的个数. 我们称

$$D_n=D_n(\mathscr{S})=\sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1}\left|\frac{A\big([\alpha,\beta);n;\mathscr{S}\big)}{n}-(\beta-\alpha)\right| \tag{1.1.1}$$

为数列 $\mathscr{S}$ 的偏差.

一般地, 设 $\mathscr{S}=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是一个实数列, 将数列 $\{\{a_1\},\cdots,\{a_n\}\}$ 记作 $\{\mathscr{S}\}$, 并将 $\{\mathscr{S}\}$ 的偏差 $D_n(\{\mathscr{S}\})$ 称为数列 $\mathscr{S}$ 的偏差, 仍然记作 $D_n(\mathscr{S})$, 亦即 $D_n(\mathscr{S})=D_n(\{\mathscr{S}\})$.

在式 (1.1.1) 中, $\beta-\alpha$ 是区间 $[\alpha,\beta)$ 与整个区间 $[0,1)$ 的长度之比, 而 $A([\alpha,\beta);n)/n$ 是它们所含 $\mathscr{S}$ 的点的个数之比, 因此, $D_n(\mathscr{S})$ 是数列 $\mathscr{S}$ 在 $[0,1)$ 中分布的均匀程度的一种刻画.

我们还令

$$D_n^* = D_n^*(\mathscr{S}) = \sup_{0<\alpha\leqslant 1}\left|\frac{A\big([0,\alpha);n;\mathscr{S}\big)}{n} - \alpha\right|, \tag{1.1.2}$$

并称其为数列 $\mathscr{S}$ 的星偏差. 类似地, 若 $\mathscr{S} = \{a_1,\cdots,a_n\}$ 是一个任意实数列, 则令 $D_n^*(\mathscr{S}) = D_n^*(\{\mathscr{S}\})$, 其中 $\{\mathscr{S}\} = \{\{a_1\},\cdots,\{a_n\}\}$.

注 1.1.1 在式 (1.1.1) 中, 区间 $[\alpha,\beta)$ 可以换为 $[\alpha,\beta]$. 在式 (1.1.2) 中, 区间 $[0,\alpha)$ 可以换为 $[0,\alpha]$.

我们来证明前一个结论. 记

$$\widetilde{D}_n(\mathscr{S}) = \sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1}\left|\frac{A([\alpha,\beta];n;\mathscr{S})}{n} - (\beta-\alpha)\right|.$$

显然, 我们可取 $\delta>0$ 足够小, 使得

$$A([\alpha,\beta];n;\mathscr{S}) = A\big([\alpha,\beta+\delta);n;\mathscr{S}\big)$$

(当 $\beta=1$ 时取 $\delta=0$), 于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{A([\alpha,\beta];n;\mathscr{S})}{n} - (\beta-\alpha)\right| &= \left|\frac{A\big([\alpha,\beta+\delta);n;\mathscr{S}\big)}{n} - (\beta+\delta-\alpha)+\delta\right| \\ &\leqslant \left|\frac{A\big([\alpha,\beta+\delta);n;\mathscr{S}\big)}{n} - (\beta+\delta-\alpha)\right|+\delta \\ &\leqslant D_n(\mathscr{S})+\delta.\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{D}_n \leqslant D_n+\delta$.

类似地, 可取 $\delta>0$ 足够小, 使得 $A\big([\alpha,\beta);n;\mathscr{S}\big) = A([\alpha,\beta-\delta];n;\mathscr{S})$ (当 $\beta=1$ 时取 $\delta=0$), 于是可由

$$\left|\frac{A\big([\alpha,\beta);n;\mathscr{S}\big)}{n} - (\beta-\alpha)\right| = \left|\frac{A([\alpha,\beta-\delta];n;\mathscr{S})}{n} - (\beta-\delta-\alpha)-\delta\right|$$

得到 $D_n \leqslant \widetilde{D}_n+\delta$.

综上, 我们有

$$D_n-\delta \leqslant \widetilde{D}_n \leqslant D_n+\delta.$$

因为 $\delta>0$ 可以任意小, 所以 $\widetilde{D}_n = D_n$.

下列几个引理给出偏差的一些简单性质. 显然, 我们可以约定: 在这些引理的证明中, 认为有限实数列是 $[0,1)$ 中的数列.

引理 1.1　若 $\mathscr{T}$ 是将有限实数列 $\mathscr{S}$ 的项重新排列而得到的数列, 则 $D_n(\mathscr{T}) = D_n(\mathscr{S}), D_n^*(\mathscr{T}) = D_n^*(\mathscr{S})$.

证　因为对于任何 $J = [\alpha,\beta) \subset [0,1]$ $(\beta > \alpha \geqslant 0)$ 有 $A(J;n;\mathscr{T}) = A(J;n;\mathscr{S})$, 所以结论成立. □

引理 1.2　对于任何由 n 个实数组成的数列 $\mathscr{S}$, 我们有

$$\frac{1}{n} \leqslant D_n(\mathscr{S}) \leqslant 1. \tag{1.1.3}$$

证　对于区间 J, 我们用 $|J|$ 表示它的长度. 因为数 $A\big([\alpha,\beta);\mathscr{S};n\big)/n$ 和 $\beta-\alpha$ 都是不超过 1 的正数, 所以式 (1.1.3) 的右半部分成立. 现在设 a 是 $\mathscr{S}$ 的任意一项. 任取 $\varepsilon > 0$, 考虑区间 $J = [a, a+\varepsilon) \cap [0,1)$. 因为 $a \in J$, 所以

$$\frac{A(J;n)}{n} - |J| \geqslant \frac{1}{n} - |J| \geqslant \frac{1}{n} - \varepsilon,$$

于是 $D_n(\mathscr{S}) \geqslant 1/n - \varepsilon$. 因为 ε 可以任意接近于 0, 所以式 (1.1.3) 的左半部分成立. □

引理 1.3　任何含 n 项的实数列 $\mathscr{S}$ 满足

$$D_n^*(\mathscr{S}) \leqslant D_n(\mathscr{S}) \leqslant 2D_n^*(\mathscr{S}). \tag{1.1.4}$$

证　左半不等式是显然的. 为证右半不等式, 注意当 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ 时 $A([\alpha,\beta);n) = A([0,\beta);n) - A([0,\alpha);n)$, 因此

$$\left|\frac{A\big([\alpha,\beta);\mathscr{S};n\big)}{n} - (\beta-\alpha)\right| \leqslant \left|\frac{A\big([0,\beta);\mathscr{S};n\big)}{n} - \beta\right| + \left|\frac{A\big([0,\alpha);\mathscr{S};n\big)}{n} - \alpha\right|,$$

由此易得式 (1.1.4). □

注 1.1.2　由引理 1.2 和 1.3, 可知 $D_n^* \geqslant 1/(2n)$. 由第 2 章定理 2.1 还可推出其中等式仅当数列 $\mathscr{S} = \{(2k-1)/(2n)\ (k = 1,2,\cdots,n)\}$ (或此数列的重新排列) 时成立.

注 1.1.3　引理 1.3 表明, 在应用中, $D_n^*(\mathscr{S})$ 与 $D_n(\mathscr{S})$ 起着同样的作用.

引理 1.4　如果 $\mathscr{X} = \{x_1,\cdots,x_n\}, \mathscr{Y} = \{y_1,\cdots,y_n\}$ 是两个实数列, 满足 $|x_j - y_j| \leqslant \delta$ $(j = 1,\cdots,n)$, 那么

$$|D_n^*(\mathscr{X}) - D_n^*(\mathscr{Y})| \leqslant \delta, \tag{1.1.5}$$

$$|D_n(\mathscr{X}) - D_n(\mathscr{Y})| \leqslant 2\delta. \tag{1.1.6}$$

证　因为证法类似, 所以只证式 (1.1.5). 考虑任意区间 $J = [0,u) \subset [0,1]$. 如果某个 $y_j \in J$, 那么 $0 \leqslant x_j \leqslant y_j + \delta < u + \delta$, 从而 $x_j \in J_1 = [0, u+\delta) \cap [0,1]$, 于

是 $A(J;n;\mathscr{Y})\leqslant A(J_1;n;\mathscr{X})$, 并且 $|J_1|=\min(|[0,u+\delta)|,|[0,1]|)\leqslant u+\delta=|J|+\delta$, 或者 $|J|\geqslant|J_1|-\delta$. 因此

$$\frac{A(J;n;\mathscr{Y})}{n}-|J|\leqslant\frac{A(J_1;n;\mathscr{X})}{n}-|J_1|+\delta\leqslant D_n^*(\mathscr{X})+\delta. \tag{1.1.7}$$

现在设 $u>\delta$. 如果某个 $x_j\in J_2=[0,u-\delta)$, 那么 $0\leqslant y_j\leqslant x_j+\delta<u$, 从而 $y_j\in J$, 于是 $A(J_2;n;\mathscr{X})\leqslant A(J;n;\mathscr{Y})$, 并且 $|J_2|=u-\delta=|J|-\delta$, 或者 $|J|=|J_2|+\delta$. 于是 $A(J;n;\mathscr{Y})/n-|J|\geqslant A(J_2;n;\mathscr{X})/n-|J_2|-\delta$, 从而

$$\frac{A(J;n;\mathscr{Y})}{n}-|J|\geqslant -D_n^*(\mathscr{X})-\delta. \tag{1.1.8}$$

如果 $u\leqslant\delta$, 那么 $A(J;n;\mathscr{Y})/n\geqslant 0>-D_n^*(\mathscr{X}), -|J|=-u\geqslant-\delta$, 所以式 (1.1.8) 也成立. 由式 (1.1.7) 和 (1.1.8) 可知

$$\left|\frac{A(J;n;\mathscr{Y})}{n}-|J|\right|\leqslant D_n^*(\mathscr{X})+\delta.$$

由于 $J\subset[0,1]$ 是任意的, 因此得到

$$D_n^*(\mathscr{Y})\leqslant D_n^*(\mathscr{X})+\delta. \tag{1.1.9}$$

在上面的推理中, 交换 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 的位置, 可得

$$D_n^*(\mathscr{X})\leqslant D_n^*(\mathscr{Y})+\delta. \tag{1.1.10}$$

于是由式 (1.1.9) 和 (1.1.10) 得到式 (1.1.5). □

注 1.1.4 引理 1.4 表明, $D_n(\mathscr{X})$ 和 $D_n^*(\mathscr{X})$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的连续函数.

例 1.1.1 设 $n\geqslant 1$, 数列 $\mathscr{S}=\{k/n\ (k=0,1,\cdots,n-1)\}$, 则 $D_n(\mathscr{S})=1/n$.

证 考虑任意区间 $J=[\alpha,\beta)\subset[0,1]$. 存在唯一的整数 k $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 使得 $k/n<|J|\leqslant(k+1)/n$, 因而 J 所含有的形如 j/n $(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 的点至少为 k 个, 而且至多为 $k+1$ 个, 于是 $|A(J;n;\mathscr{S})/n-|J||\leqslant 1/n$. 结合式 (1.1.3) 的左半部分, 即得结论.

注 1.1.5 由例 1.1.1 可知, 对于一维情形, 式 (1.1.3) 中 $D_n(\mathscr{S})$ 的下界估计是最优的 (还可参见注 2.1.1).

例 1.1.2 设 $n\geqslant 1$, 数列 $\mathscr{S}=\{k^2/n^2\ (k=0,1,\cdots,n-1)\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}D_n^*(\mathscr{S})=1/4$.

证 设 $0<\alpha\leqslant 1$, $[0,\alpha)\subseteq[0,1]$ 是一个任意区间, 而 $A\big([0,\alpha);n;\mathscr{S}\big)=t$, 那么 $t\geqslant 1$, 并且 $\alpha\in\big((t-1)^2/n^2,t^2/n^2\big]$. 如果 $\alpha=t^2/n^2$, 那么 $t=n\sqrt{\alpha}$ (这是一个整数)$=[n\sqrt{\alpha}]$; 不然, 则有

$$\frac{(t-1)^2}{n^2}<\alpha<\frac{t^2}{n^2},\quad t-1<n\sqrt{\alpha}<t,$$