高等院校理工科精品教材系列

新世纪高职高专“工学结合”课程改革系列教材

工程数学

主　编　包　晔　郑玉仙

副主编　沈陆娟　蔡建平

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校理工科精品教材系列

新世纪高职高专“工学结合”课程改革系列教材

工 程 数 学

主　编　包　晔　郑玉仙

副主编　沈陆娟　蔡建平

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/包晔,郑玉仙主编. —杭州：浙江大学出版社,2010.1
(高等院校理工科精品教材系列. 新世纪高职高专“工学结合”课程改革系列教材)
ISBN 978-7-308-07115-4

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①包…②郑… Ⅲ. 工程数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第182898号

工程数学

包 晔 郑玉仙 主编

丛书策划 阮海潮(ruanhc@zju.edu.cn)
责任编辑 阮海潮
封面设计 姚燕鸣
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路148号 邮政编码310028)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 710mm×1000mm 1/16
印　　张 14.25
字　　数 287千
版 印 次 2010年1月第1版 2010年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-07115-4
定　　价 27.00元

购电话 (0571) 88925591

前　言

目前适合高职高专院校使用的工程数学教材已有不少，这些教材各有千秋，但同时也总觉得有些不足。有些教材过于简单，不能满足高职高专学生应具备的工程数学知识要求；有些又略显深奥，实际上是本科教材的浓缩，对于高职高专类学生来说要求过高。为此，编者结合多年的教学经验，针对高职高专学生的专业要求编写了这本工程数学教材。

本教材共分7章，内容包括行列式、矩阵、n维向量、傅里叶级数、拉普拉斯变换、概率与数理统计等内容。本教材特点是以循序渐近、深入浅出的方式介绍工程数学的各个知识点；结合案例进行教学，简明扼要、通俗易懂；针对高职高专学生的专业要求，做到难易适当，针对性强。

本教材适合作为高职高专学校各专业工程数学课教材，也可作为各职业技能培训班和自学考试的参考教材，同时也可供广大青年学生和技术工作者学习参考。

恳请读者和从事数学教学的各位同仁，对本书多提宝贵意见，使其逐步完善。在此预致我们深深的谢意。

作　者

2009年12月

目　录

附录

第1章 行列式

行列式与矩阵是线性代数中的重要概念，在许多领域中有着广泛的应用. 在工程实践中，有许多问题可以直接或近似地表示成一些变量间的线性关系，例如，线性方程组等. 因此研究变量间的线性关系是非常重要的. 而行列式、矩阵又是研究线性方程组的重要工具. 本章在二阶、三阶行列式的基础上，引出 n 阶行列式的概念，讨论 n 阶行列式的性质，以及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式解决了一类特殊的 n 个方程 n 个未知数的线性方程组的求解问题.

1.1 二阶、三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

设二元一次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (1.2) \end{cases}$$

a_{11}, a_{12} 不同时为 0，不妨设 $a_{11} \neq 0$，则

(1.1) $\times \left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ 得：

$$-a_{21}x_1 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 = -\frac{b_1a_{21}}{a_{11}}. \tag{1.3}$$

(1.2) + (1.3) 得(消去 x_1)：

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}},$$

即

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

将(1.4) 代入(1.1) 得：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

由上可见，方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 以及常数项 b_1,b_2 表示出来.

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.5}$$

为了方便记忆，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.6}$$

把式(1.6)称为二阶行列式. D 中横写的称为**行**，竖写的称为**列**. D 中共有两行两列，其中数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**，它的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列. 把行列式从左上角到右下角的连线称为**主对角线**，行列式从右上角到左下角的连线称为**副对角线**. 由式(1.6)可知，二阶行列式的值是主对角线上元素 a_{11},a_{22} 的乘积减去副对角线上元素 a_{12},a_{21} 的乘积. 按照这个规则，又有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1,$$

则二元一次线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}.$$

【例 1.1】 求解二元一次线性方程组 $\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此，$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3$.

【例 1.2】 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 6 - 5\times(-8) = 52$；

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$；

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1\times 2 - 0\times 0 = -2$；

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - (-1)\times 0 = 6$.

1.1.2 三阶行列式

类似地，对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

应用消元法，可以解出 x_1, x_2, x_3.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由于 D 共有三行三列，故把它称为**三阶行列式**.

用消元法容易算出方程组(1.7)有唯一的解，$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D}$，其中 $D_j(j = 1,2,3)$ 分别是将 D 中第 j 列的元素换成方程组(1.7)右端的常数项 b_1, b_2, b_3 得到的.

三阶行列式是六项的代数和,其中每一项都是 D 中不同行不同列的三个元素的乘积,并冠以正负号,为了便于记忆,可写成如图 1.1 所示.

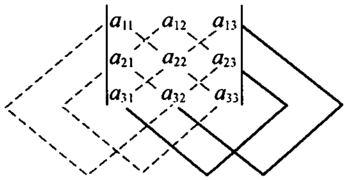

图 1.1

实线上三个元素的乘积项取正号,虚线上三个元素的乘积项取负号,这种方法称为**三阶行列式的对角线法则**.

【例 1.3】 计算下列三阶行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 由三阶行列式的对角线法则,得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-2)\times 4\times(-4)- \\ &\quad (-4)\times 2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times 1\times 4 \\ &= (-4)+(-6)+32-24-8-4=-14.\end{aligned}$$

【例 1.4】 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-2+6-3-1-4=-5\neq 0,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-13-1+60-39-10-2=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10+26+2-1+13-40=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&13\\1&1&10\\2&3&1\end{vmatrix}=1-20+39-30+1-26=-35.$$

因此 $\qquad x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=2,\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=7.$

【例 1.5】 求方程 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0$ 的解.

解 方程左端的三阶行列式

$$D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6.$$

令 $x^2-5x+6=0$,解得:$x=2$ 或 $x=3$.

习 题 1.1

1. 计算下列二、三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab\\ab&b^2\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}x-1&x^3\\1&x^2+x+1\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}2&1&3\\3&-2&-1\\1&4&3\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&1\\1&-2&1\end{vmatrix}$.

1.2 *n* 阶行列式

1.2.1 *n* 阶行列式的定义

定义 1.1 将 $n\times n$ 个数排成 n 行 n 列,并在左、右两边各加一竖线,即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

称 D_n 为 **n 阶行列式**，它代表一个确定的运算关系所得到的数，其中

当 $n=1$ 时，$D_1 = a_{11}$；

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$；

当 $n \geqslant 2$ 时，$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} (i=1,2,\cdots,n)$.

在 D_n 中，a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，M_{ij} 为由 D_n 中划去第 i 行第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**.

【例 1.6】　已知

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

写出元素 a_{34} 的余子式和代数余子式.

解　因为第三行第四列元素 $a_{34} = 7$，故划去它所在的行和列的所有元素后形成的三阶行列式为

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

为元素 7 的余子式.

a_{34} 的代数余子式 $A_{34} = (-1)^{3+4}M_{34}$，即

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

【例 1.7】 用定义计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 由定义,将行列式按照第一行展开,即

$$D_4=(-1)^{1+1}\times 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-2)\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(28+20)-2\times(-80+30-4)=144+108=252.$$

【例 1.8】 证明上三角行列式(主对角线以下的元素都为 0 的行列式称为上三角行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 将这行列式按照第 1 列展开,得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

然后继续把它按照第一列展开,即证.

因此,**上三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.**

1.2.2 *n* 阶行列式的性质

二阶、三阶行列式可用对角线法则或按照定义直接计算,但当 n 较大时,再从行列式的定义出发求行列式的值就比较麻烦了.为此,有必要先介绍行列式的一些基本性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$