

高等院校理工科精品教材系列

新世纪高职高专“工学结合”课程改革系列教材

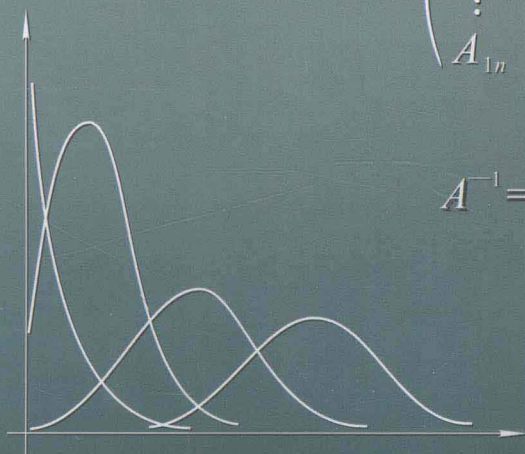
工程数学

主 编 包 晔 郑玉仙

副主编 沈陆娟 蔡建平

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

高等院校理工科精品教材系列
新世纪高职高专“工学结合”课程改革系列教材

工 程 数 学

主 编 包 晔 郑玉仙
副主编 沈陆娟 蔡建平



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/包晔,郑玉仙主编. —杭州:浙江大学出版社,2010.1

(高等院校理工科精品教材系列. 新世纪高职高专“工学结合”课程改革系列教材)

ISBN 978-7-308-07115-4

I. 工... II. ①包...②郑... III. 工程数学—高等学校:技术学校—教材 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 182898 号

工程数学

包 晔 郑玉仙 主编

丛书策划 阮海潮(ruanhc@zju.edu.cn)

责任编辑 阮海潮

封面设计 姚燕鸣

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 德清县第二印刷厂

开 本 710mm×1000mm 1/16

印 张 14.25

字 数 287 千

版 印 次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-07115-4

定 价 27.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

购电话 (0571) 88925591

前 言

目前适合高职高专院校使用的工程数学教材已有不少,这些教材各有千秋,但同时也总觉得有些不足。有些教材过于简单,不能满足高职高专学生应具备的工程数学知识要求;有些又略显深奥,实际上是本科教材的浓缩,对于高职高专类学生来说要求过高。为此,编者结合多年的教学经验,针对高职高专学生的专业要求编写了这本工程数学教材。

本教材共分7章,内容包括行列式、矩阵、 n 维向量、傅里叶级数、拉普拉斯变换、概率与数理统计等内容。本教材特点是以循序渐近、深入浅出的方式介绍工程数学的各个知识点;结合案例进行教学,简明扼要、通俗易懂;针对高职高专学生的专业要求,做到难易适当,针对性强。

本教材适合作为高职高专学校各专业工程数学课教材,也可作为各职业技能培训班和自学考试的参考教材,同时也可供广大青年学生和技术工作者学习参考。

恳请读者和从事数学教学的各位同仁,对本书多提宝贵意见,使其逐步完善。在此预致我们深深的谢意。

作 者

2009年12月

目 录

第 1 章 行列式	(1)
1.1 二阶、三阶行列式	(1)
1.1.1 二阶行列式	(1)
1.1.2 三阶行列式	(3)
1.2 n 阶行列式	(5)
1.2.1 n 阶行列式的定义	(5)
1.2.2 n 阶行列式的性质	(7)
1.3 克莱姆法则	(12)
1.4 MATLAB 软件在行列式运算中的应用	(16)
第 2 章 矩 阵	(17)
2.1 矩阵的概念及运算	(17)
2.1.1 矩阵的概念	(17)
2.1.2 矩阵的运算	(19)
2.2 逆矩阵	(28)
2.2.1 逆矩阵的概念	(28)
2.2.2 逆矩阵的求法	(29)
2.2.3 用逆矩阵解线性方程组	(31)
2.3 矩阵的秩与初等变换	(35)
2.3.1 矩阵的秩	(35)
2.3.2 矩阵的初等变换	(36)
2.3.3 利用初等变换求矩阵的秩	(36)
2.3.4 利用初等变换求逆矩阵	(38)

2.3.5 利用初等变换解线性方程组	(41)
2.4 MATLAB 软件在矩阵运算中的应用	(51)
2.4.1 矩阵的直接输入	(51)
2.4.2 矩阵的函数生成	(51)
2.4.3 矩阵的基本运算	(52)
第 3 章 n 维向量	(56)
3.1 向量及向量的基本概念	(56)
3.1.1 n 维向量的概念	(56)
3.1.2 向量的运算	(56)
3.2 向量的线性组合	(57)
3.3 向量组的秩	(61)
3.4 MATLAB 软件在向量运算中的应用	(64)
第 4 章 傅里叶级数	(66)
4.1 级数的基本概念	(66)
4.1.1 数项级数	(66)
4.1.2 函数项级数	(68)
4.1.3 幂级数	(68)
4.2 傅里叶级数	(69)
4.2.1 三角函数系的正交性	(70)
4.2.2 函数展开成傅里叶级数	(70)
4.3 周期为 T 的周期函数的傅里叶级数	(75)
4.3.1 周期为 T 的周期函数的傅里叶级数	(75)
4.3.2 奇函数、偶函数的傅里叶级数	(77)
4.4 常见脉冲信号的傅里叶级数	(80)
4.5 MATLAB 软件在傅里叶级数中的应用	(81)
第 5 章 拉普拉斯变换	(83)
5.1 拉普拉斯变换的概念	(83)

5.2	拉普拉斯变换的性质	(85)
5.3	拉普拉斯变换的逆变换的求解	(89)
5.3.1	拉普拉斯逆变换的性质	(90)
5.3.2	拉普拉斯逆变换的部分分式展开法	(91)
5.4	MATLAB 软件在拉普拉斯变换与逆变换中的应用	(95)
第 6 章	概 率	(96)
6.1	随机事件	(97)
6.1.1	随机现象	(97)
6.1.2	随机试验	(98)
6.1.3	样本空间	(98)
6.1.4	随机事件	(99)
6.1.5	事件的关系与运算	(99)
6.1.6	事件的运算律	(102)
6.2	随机事件的概率	(104)
6.2.1	概率的统计定义	(104)
6.2.2	古典概型	(106)
6.3	概率的加法公式	(108)
6.3.1	互不相容事件的加法公式	(108)
6.3.2	任意事件的加法公式	(110)
6.4	概率的乘法公式	(112)
6.4.1	条件概率	(112)
6.4.2	任意事件的乘法公式	(113)
6.4.3	事件的独立性	(114)
6.4.4	独立事件的加法公式	(115)
6.4.5	多个事件的独立性	(116)
6.5	全概率公式、贝叶斯公式	(119)
6.5.1	完备事件组	(119)
6.5.2	全概率公式	(119)
6.5.3	贝叶斯(Bayes)公式	(120)

6.6	离散型随机变量及其分布	(122)
6.6.1	随机变量的概念	(122)
6.6.2	离散型随机变量的分布列	(124)
6.6.3	几种常见的离散型随机变量的分布列	(126)
6.7	连续型随机变量及其概率密度	(132)
6.7.1	连续型随机变量和密度函数的概念	(132)
6.7.2	常见的连续型随机变量的分布密度	(134)
6.8	分布函数	(137)
6.8.1	分布函数的概念	(137)
6.8.2	分布函数的性质	(137)
6.8.3	离散型随机变量的分布函数	(138)
6.8.4	连续型随机变量的分布函数	(139)
6.8.5	常见连续型分布函数	(141)
6.9	正态分布	(143)
6.9.1	正态分布的定义与性质	(143)
6.9.2	标准正态分布	(144)
6.9.3	标准正态分布表	(145)
6.9.4	一般正态分布与标准正态分布的关系	(145)
6.9.5	3σ 准则	(147)
6.10	离散型随机变量的数字特征	(149)
6.10.1	离散型随机变量的数学期望	(149)
6.10.2	连续型随机变量的数学期望	(151)
6.10.3	随机变量函数的数学期望	(152)
6.10.4	数学期望的性质	(153)
6.11	离散型随机变量的方差	(155)
6.11.1	方差的定义	(155)
6.11.2	方差的计算	(156)
6.11.3	方差的性质	(158)
6.12	MATLAB 软件在概率中的应用	(160)
6.12.1	常见分布的概率密度函数计算	(160)

6.12.2	常见分布的概率值计算	(161)
6.12.3	随机变量的数字特征的计算	(162)
第 7 章	数理统计	(164)
7.1	总体、样本、统计量	(164)
7.1.1	数理统计的研究方法	(164)
7.1.2	总体和样本	(165)
7.1.3	样本的数字特征	(166)
7.1.4	统计量及其分布	(168)
7.2	参数估计	(173)
7.2.1	点估计	(173)
7.2.2	估计量的评价标准	(175)
7.2.3	区间估计	(176)
7.3	假设检验	(181)
7.3.1	假设检验的基本思想	(181)
7.3.2	假设检验的一般步骤	(182)
7.3.3	正态总体的均值检验	(183)
7.3.4	正态总体的方差检验	(185)
7.4	统计直方图	(186)
7.4.1	直方图	(187)
7.4.2	分组数据的统计表和频数、频率直方图	(187)
7.4.3	累积频率直方图	(190)
7.4.4	总体密度曲线	(191)
7.4.5	频率分布条形图	(191)
7.5	MATLAB 软件在统计中的应用	(194)
7.5.1	正态分布的参数估计	(194)
7.5.2	单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值的假设检验	(195)
7.5.3	线性回归分析	(196)
7.5.4	统计直方图	(197)

附录

一、泊松分布数值表	(199)
二、标准正态分布函数数值表	(203)
三、 χ^2 分布临界值表	(205)
四、 t -分布临界值表	(207)
习题参考答案	(209)
参考文献	(217)

行列式与矩阵是线性代数中的重要概念,在许多领域中有着广泛的应用.在工程实践中,有许多问题可以直接或近似地表示成一些变量间的线性关系,例如,线性方程组等.因此研究变量间的线性关系是非常重要的.而行列式、矩阵又是研究线性方程组的重要工具.本章在二阶、三阶行列式的基础上,引出 n 阶行列式的概念,讨论 n 阶行列式的性质,以及行列式的计算方法,最后应用 n 阶行列式解决了一类特殊的 n 个方程 n 个未知数的线性方程组的求解问题.

1.1 二阶、三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

设二元一次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.1) \\ (1.2) \end{matrix}$$

a_{11}, a_{12} 不同时为 0,不妨设 $a_{11} \neq 0$,则

(1.1) $\times \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ 得:

$$-a_{21}x_1 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 = -\frac{b_1a_{21}}{a_{11}}. \quad (1.3)$$

(1.2) + (1.3) 得(消去 x_1):

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}},$$

即

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.4)$$

将(1.4)代入(1.1)得:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

由上可见,方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 以及常数项 b_1, b_2 表示出来.

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \end{cases} \quad (1.5)$$

为了方便记忆,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1.6)$$

把式(1.6)称为二阶行列式. D 中横写的称为行,竖写的称为列. D 中共有两行两列,其中数 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 称为行列式的元素,它的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列. 把行列式从左上角到右下角的连线称为主对角线,行列式从右上角到左下角的连线称为副对角线. 由式(1.6)可知,二阶行列式的值是主对角线上元素 a_{11}, a_{22} 的乘积减去副对角线上元素 a_{12}, a_{21} 的乘积. 按照这个规则,又有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

则二元一次线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

【例 1.1】 求解二元一次线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21,$$

因此, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2$, $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$.

【例 1.2】 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 5 \times (-8) = 52;$

$$(2) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$(3) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - 0 \times 0 = -2;$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 0 = 6.$$

1.1.2 三阶行列式

类似地, 对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

应用消元法, 可以解出 x_1, x_2, x_3 .

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由于 D 共有三行三列, 故把它称为三阶行列式.

用消元法容易算出方程组(1.7)有唯一的解, $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, $x_3 = \frac{D_3}{D}$,

其中 $D_j (j=1, 2, 3)$ 分别是将 D 中第 j 列的元素换成方程组(1.7)右端的常数项 b_1, b_2, b_3 得到的.

三阶行列式是六项的代数和,其中每一项都是 D 中不同行不同列的三个元素的乘积,并冠以正负号,为了便于记忆,可写成如图 1.1 所示.

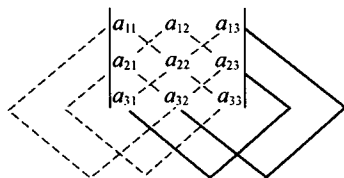


图 1.1

实线上三个元素的乘积项取正号,虚线上三个元素的乘积项取负号,这种方法称为三阶行列式的对角线法则.

【例 1.3】 计算下列三阶行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 由三阶行列式的对角线法则,得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-2) \times 4 \times (-4) - \\ &\quad (-4) \times 2 \times (-3) - 2 \times (-2) \times (-2) - 1 \times 1 \times 4 \\ &= (-4) + (-6) + 32 - 24 - 8 - 4 = -14. \end{aligned}$$

【例 1.4】 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 6 - 3 - 1 - 4 = -5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 - 1 + 60 - 39 - 10 - 2 = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 26 + 2 - 1 + 13 - 40 = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 20 + 39 - 30 + 1 - 26 = -35.$$

因此 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 7.$

【例 1.5】 求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的解.

解 方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6.$$

令 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得: $x = 2$ 或 $x = 3$.

习 题 1.1

1. 计算下列二、三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2 n 阶行列式

1.2.1 n 阶行列式的定义

定义 1.1 将 $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列, 并在左、右两边各加一竖线, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D_n 为 n 阶行列式, 它代表一个确定的运算关系所得到的数, 其中

当 $n = 1$ 时, $D_1 = a_{11}$;

当 $n = 2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

当 $n \geq 2$ 时, $D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} (i = 1, 2, \cdots, n)$.

在 D_n 中, a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, 称为元素 a_{ij} 的代数余子式, M_{ij} 为由 D_n 中划去第 i 行第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式, 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为元素 a_{ij} 的余子式.

【例 1.6】 已知

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

写出元素 a_{34} 的余子式和代数余子式.

解 因为第三行第四列元素 $a_{34} = 7$, 故划去它所在的行和列的所有元素后形成的三阶行列式为

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

为元素 7 的余子式.

a_{34} 的代数余子式 $A_{34} = (-1)^{3+4}M_{34}$, 即

$$A_{34} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

【例 1.7】 用定义计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 由定义,将行列式按照第一行展开,即

$$\begin{aligned} D_4 &= (-1)^{1+1} \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times (-2) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (28 + 20) - 2 \times (-80 + 30 - 4) = 144 + 108 = 252. \end{aligned}$$

【例 1.8】 证明上三角行列式(主对角线以下的元素都为 0 的行列式称为上三角行列式)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 将这行列式按照第 1 列展开,得

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

然后继续把它按照第一列展开,即证.

因此,上三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.

1.2.2 n 阶行列式的性质

二阶、三阶行列式可用对角线法则或按照定义直接计算,但当 n 较大时,再从行列式的定义出发求行列式的值就比较麻烦了.为此,有必要先介绍行列式的一些基本性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.

设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$