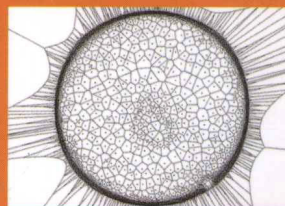
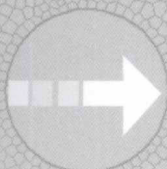


XIANDING Voronoi WANGGE POUFEN DE
LILUN JI YINGYONG YANJIU

限定Voronoi网格剖分的 理论及应用研究



蔡强◎著



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

限定 Voronoi 网格剖分的 理论及应用研究

蔡 强 著

北京邮电大学出版社
· 北 京 ·

内 容 简 介

本书全面介绍了限定 Voronoi 图的概念、生成技术,采用灵活性更好的带权 Delaunay 三角/四面体剖分来解决二维/三维限定 Voronoi 网格剖分的问题,所得到的限定 Voronoi 网格具有同限定 Delaunay 三角网格相似的优良性质。建立起了二维/三维限定 Voronoi 的质量和尺度评价准则,设计了二维/三维限定 Voronoi 网格的质量和尺度控制的算法。最后,给出了限定 Voronoi 网格剖分的一些应用实例。

本书可供计算几何、地理信息系统、机器人、通信、石油地质勘探及其相关领域的科研人员及高等学校相关专业师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

限定 Voronoi 网格剖分的理论及应用研究/蔡强著.--北京:北京邮电大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-5635-2431-0

I. ①限… II. ①蔡… III. ①空间测量;动态摄影测量 IV. ①P236

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 178469 号

书 名: 限定 Voronoi 网格剖分的理论及应用研究
作 者: 蔡 强
责任编辑: 孔 玥
出版发行: 北京邮电大学出版社
社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578
E-mail: publish @ bupt. edu. cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京源海印刷有限责任公司
开 本: 787 mm×960 mm 1/16
印 张: 9.5
字 数: 201 千字
印 数: 1—1 000 册
版 次: 2010 年 9 月第 1 版 2010 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2431-0

定 价: 26.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前言

网格生成技术是研究如何将给定的空间离散为简单几何单元的方法。Voronoi 图是一种常用的非结构网格形式,它可以很好地逼近边界,描述结构复杂的空间。还由于其具有数学基础好,对网格的局部控制能力强等优良特性,近年来受到了众多领域的研究人员的关注,在科学计算可视化、石油地质勘探、地理信息系统、气候的变迁、蛛网蜂巢的结构、生物外观轮廓线及中轴、通信基础设施的架设和覆盖、物流供应链监控、医学图像处理等领域有着明显的应用前景。

本书全面系统地介绍了限定 Voronoi 网格及限定 Delaunay 三角剖分的相关概念及技术,给出了边界边、边界面在限定 Voronoi 剖分中存在的条件。使用带权 Voronoi 网格剖分得到了边界一致的复杂限定条件下的网格。带权的 Voronoi 图是普通 Voronoi 图的推广。本书采用带权的 Delaunay 三角化做为解决限定 Voronoi 剖分的基础,仔细设计了若干种算法,所得到的 Voronoi 网格具有同 Delaunay 三角网格相似的优良性质。本书还对曲面和黎曼流形 Delaunay 剖分进行了探讨。

本书包括 9 章,内容安排如下:

第 1 章概述了 Voronoi 图的历史及研究应用现状,指出 Voronoi 图是当今许多学科研究的基础。指出其研究中存在的问题,引出了本文的研究目的、内容及意义。第 2 章讲述了 Voronoi 图的基础知识,介绍了其相关的基本概念和基本性质,还介绍了其基本生成方法。第 3 章先进行了二维限定 Voronoi 图生成的限定条件的规范化研究,给出了三种新的控制准则,实现了二维限定 Voronoi 图的生成。对二维限定 Voronoi 网格进行质量控制和尺度控制,给出了各自的控制准则和相应的算法。第 4 章研究重叠域和内部狭长区域等复杂限定条件的 Voronoi 网格剖分问题。第 5 章,实现了 PLC 限定条件下的三维限定 Voronoi 图生成。该算法还实现了对网格的质量和尺度的控制。第 6 章对曲面限定 Delaunay 三角化技术进行了研究。第 7 章给出黎曼流形上的限定 Voronoi 剖分算法。第 8 章讨论了图形平台的框架结构。第 9 章,给出了限定 Voronoi 图在实际领域中的应用。包括 PEBI 网格生成、机器人路径规

划、移动通信等。

本书的研究成果首先要感谢北京航空航天大学机械自动化学院唐荣锡教授、陈其明教授和计算机学院杨钦教授多年来给予作者的指导、支持和帮助。还要感谢课题组的徐永安博士、吴壮志博士、牛文杰博士、朱大培博士、李海生博士、李吉刚博士后、孟宪海博士、陈丹博士、宫法明副教授等,在课题组几年的时光是我终生的记忆和人生宝贵的财富。感谢北京工商大学计算机与信息学院的刘载文院长、曹显兵书记、姜同强副院长、左敏副院长、王长飞硕士、李奇硕士等给予作者的支持。尤其感谢北京市自然科学基金委员会和北京市教委的课题经费支持。本书的出版也得到了北京市教委专项经费支持,在此一并致谢。

由于限定 Delaunay 三角剖分和限定 Voronoi 图理论仍处于不断发展和完善阶段,加之成书时间仓促,作者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请读者批评并指正。

蔡 强

本书中的主要记法

点 P (Point)

集合 S (Set)

点集合 PS (Point Set)

三角剖分 TS (Triangle Set)

四面体剖分 TeS (Tetrahedron Set)

三角形、三角化 T (Triangle)

四面体 Te (Tetrahedron)

点集 PS 的三角剖分 $TS(PS)$

点集 PS 四面体剖分 $TeS(PS)$

线段 S (Segment)

四面体的面 FT (Face Triangle)

平面片 F (Facet)

平面片集合 FS (Facet Set)

限制条件 CC (Constraint Condition)

限定(Constrained)三角剖分 $CTS(PS, SS)$

限定(Conforming)三角剖分 $CTS(PS, SS)$

限定四面体剖分 $CTeS(PS, SS, FS)$

限定点 CP (Constraint Point)

限定线段 CS (Constraint Segment)

限定平面片 CF (Constraint Facet)

限定点集合 CPS (Constraint Point Set)

限定线段集合 CSS (Constraint Segment Set)

限定平面片集合 CFS (Constraint Facet Set)

限定条件集 CCS (Constraint Condition Set)

Delaunay 三角剖分 DTS

Delaunay 四面体剖分 $DTeS$

限定 Delaunay 三角剖分 $CDTS$

限定 Delaunay 四面体剖分 $CDTeS$

点集 PS 的 PEBI 剖分 $PEBI(PS)$

点集 PS 的 Voronoi 剖分 $VORO(PS)$

点集 PS 的 Power 剖分 $POW(PS)$

限定线段集合的端点集合 EPS (End Point Set)

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 引言	1
1.2 Voronoi 图基本概念	3
1.3 Voronoi 图的推广	5
1.3.1 距离的推广	5
1.3.2 生长元的推广	6
1.3.3 移动点的 Voronoi 图	6
1.3.4 Poisson Voronoi 图	6
1.4 Voronoi 图生成技术	6
1.5 Voronoi 图的国内研究现状	10
1.6 限定 Voronoi 图的生成	11
1.7 本书的研究目的、内容及意义	11
1.8 本书的组织	12
第 2 章 限定 Voronoi 剖分相关基本概念、理论	14
2.1 Delaunay 三角化	14
2.1.1 Delaunay 三角化的特性	14
2.1.2 经典的 Delaunay 三角化算法	16
2.2 带权的 Delaunay 三角化和带权的 Voronoi 图	18
2.3 限定 Delaunay 三角剖分	21
2.3.1 平面限定 Delaunay 三角化	21
2.3.2 曲面限定 Delaunay 三角化	23
2.4 限定 Voronoi 图	24
2.4.1 二维/三维限定条件	24
2.4.2 限定 Voronoi 图的生成	26
第 3 章 二维限定 Voronoi 网格的研究	28
3.1 平面限定 Voronoi 网格生成算法	28

3.1.1	控制圆算法	28
3.1.2	二维 Voronoi 细化算法——矩形控制带算法	34
3.1.3	二维 Voronoi 细化算法的改进算法——梯形检测带算法	40
3.2	二维网格单元质量和尺度控制技术	46
3.2.1	网格单元质量、尺度的评价标准	46
3.2.2	控制算法的预处理	46
3.2.3	Voronoi 网格的尺寸控制	49
3.2.4	Voronoi 网格的质量控制	51
3.2.5	算法实例	52
第 4 章	重叠域条件下的限定 Voronoi 网格生成	54
4.1	引言	54
4.2	复杂限定条件下的 Delaunay 三角剖分	54
4.2.1	内部复杂限定条件	54
4.2.2	重叠域限定条件	55
4.2.3	复杂限定条件下限定 Delaunay 三角剖分解决思路	56
4.2.4	复杂限定条件下的 Delaunay 三角剖分算法	60
4.3	复杂限定条件下限定 Voronoi 图的生成	60
4.3.1	算法思路	60
4.3.2	算法描述	61
4.3.3	算法的效率	61
4.4	算法使用的新的数据结构	62
第 5 章	三维限定 Voronoi 网格生成的研究	64
5.1	三维限定 Voronoi 网格的限定条件	64
5.2	三维限定 Voronoi 网格生成算法	65
5.2.1	阶段性算法	65
5.2.2	改进性算法	72
5.3	三维限定 Voronoi 网格生成实例	82
第 6 章	曲面限定 Delaunay 三角化的研究	85
6.1	算法思路	85
6.2	算法关键问题	86
6.3	算法描述	88
6.4	曲面限定 Delaunay 三角化实例	90

第 7 章 黎曼流形上的 Voronoi 剖分的研究	92
7.1 黎曼流形的基础知识	92
7.1.1 微分流形与黎曼流形的基本概念	92
7.1.2 黎曼流形下的 Delaunay 三角化和 Voronoi 图	94
7.2 存在性研究	94
7.2.1 存在性	94
7.2.2 一些性质	95
7.3 生成算法研究	96
7.4 基于坐标卡的生成算法	97
7.4.1 建立坐标卡	97
7.4.2 生成网格	98
7.5 黎曼流形的 Voronoi 剖分实例	99
第 8 章 算法平台的研究	101
8.1 系统的实现方案	101
8.1.1 GLView——具有 OpenGL 绘图功能的 MFCView	101
8.1.2 GLView 中 OpenGL 环境的保护	104
8.1.3 GLRC 的维护	105
8.2 实例	105
第 9 章 限定 Voronoi 剖分技术的应用	108
9.1 PEBI 网格生成	108
9.1.1 PEBI 网格应用背景	108
9.1.2 PEBI 网格模块	110
9.1.3 PEBI 网格生成研究现状	112
9.1.4 PEBI 网格生成实例	114
9.2 机器人路径规划	123
9.2.1 引言	123
9.2.2 GVG 生成研究现状	124
9.2.3 本章算法	126
9.2.4 算法实例	128
9.3 移动通信	129
9.3.1 引言	129
9.3.2 小区覆盖问题	130
参考文献	132

第1章 绪 论

本章概述了 Voronoi(维诺)图的基本概念、发展历史及研究应用现状, Voronoi 图是当今许多学科研究的基础。还介绍了限定 Voronoi 图的概念, 讨论其研究现状。

1.1 引 言

网格自动生成技术是研究将给定空间离散为简单几何体集合的方法。最早源于 20 世纪五六十年代的有限元分析。网格单元有矩形/立方体、四边形/六面体和三角形/四面体等多种形式。由于三角形/四面体是单纯形, 具有较好的灵活性, 可以描述复杂的空间, 所以, 三角/四面体网格生成技术得到了广泛的应用, 并受到了广泛的关注。

由于四面体单元的 4 个面都是三角形, 因此, 一般将三角网格和四面体网格统称为三角网格, 四面体网格是三维空间的三角网格。

Delaunay 三角/四面体网格是 Voronoi 图的对偶, 由俄国数学家 B. Delaunay 在 1934 年提出。与一般的三角/四面体网格相比, Delaunay 三角/四面体网格具有较大的优势, 主要表现在以下两个方面。

1. Delaunay 三角/四面体网格是一个空间优化结构

在生成点集的三角网格时, 可以按不同的方式将点连成三角形或四面体。在利用网格进行分析计算时, 希望网格单元尽量饱满, 这样可以使计算精度高。当把点连成 Delaunay 三角形或四面体时, 最能满足这个需求——网格单元最饱满。

2. Delaunay 三角网格的可操作性较好

Delaunay 三角网格是 Voronoi 图的几何对偶图。它有严格的数学定义和完备的理论基础, 一般情况下具有唯一性。在对已经生成的网格进行加点、减点操作时, 有可靠的理论依据和简单的方法, 可以确保得到的新网格仍然是 Delaunay 三角网格。而一般的三角网格则没有这些优点。

做为 Delaunay 三角网格的几何对偶图的 Voronoi 图是一种重要的空间几何划分, 是空间信息的载体, 在求解点集或者其他几何对象与距离有关的问题中具有重要的作用^[1], 广泛应用于天文、生态、考古、疾病流行与控制、材料、信号编码、石油地质勘探、地理信息系统、气候的变迁、蛛网蜂巢的结构、生物外观轮廓线及中轴、通信基础设施的架设和覆

盖、物流供应链监控、医学图像处理等自然科学和社会科学的诸多领域,是当前计算几何学科的一个研究热点。

Voronoi 图的早期研究主要源于德国数学家 P. G. Dirichlet 和俄国数学家 G. F. Voronoi 的工作。1850 年,Dirichlet 研究了平面点的领域问题^[2],Voronoi 于 1908 年将其结果推广到 n 维空间^[3]。B. N. Delone1929 年给出“Dirichlet 域”(Dirichlet domain)的概念,到 1932 年给出了“Voronoi 区域”(Voronoi region)的概念,标志着 Voronoi 图做为计算几何的一个研究分支的正式诞生。1934 年,B. Delaunay 将 Voronoi 区域相邻的点连接起来,得到 Voronoi 图的对偶图 Delaunay 三角网格(如图 1.1 所示)。

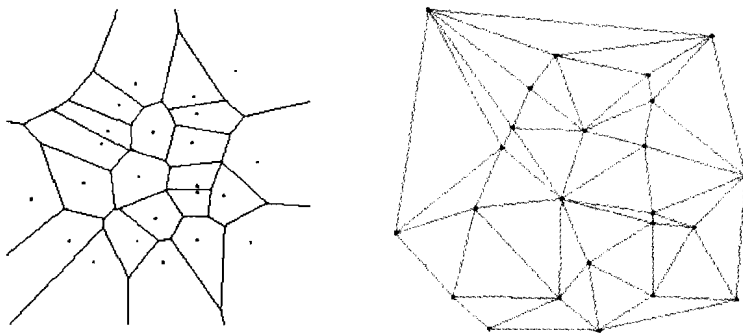


图 1.1 点集对应的 Voronoi 图和 Delaunay 三角网格

Voronoi 图的应用领域非常广泛,在 Voronoi 图明确定义以前,1644 年法国数学家 Descartes(笛卡儿)发表的太阳系及其周边天体的分布图^[4],就是一种 Voronoi 图,而且还是一种加权 Voronoi 图,如图 1.2 所示。

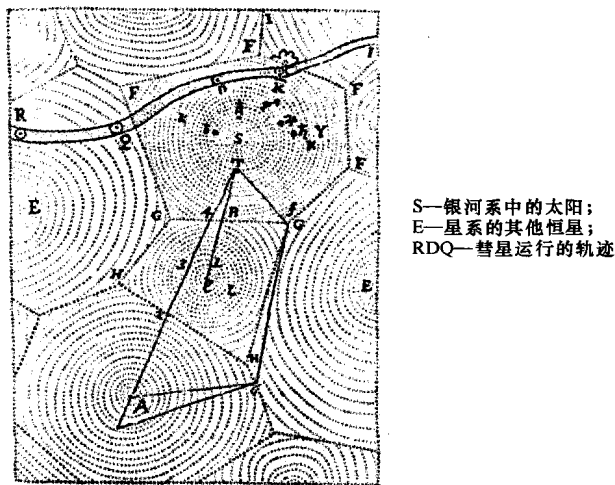


图 1.2 Descartes 的天体分布图^[4]

1855年英国霍乱调查委员会(Cholera Inquiry Committee)发布的《1854年秋季 Westminster 的 St. James 教区霍乱爆发的报告》及 John Snow 绘制的地图表示 Broad Street Pump 周围霍乱死亡者的空间分布时用到了 Voronoi 图,被称为“最著名的 19 世纪的疾病地图”。100 余年后,Voronoi 图在流行病学和地图学上得到了更多的应用^[5,6,7,8]。1909 年俄罗斯的 Boldyrev、1920 年美国的 Davis 和 Harding 应用 Voronoi 区域研究某个区域沉积物的储量估计方法。1911 年荷兰气象学家 Thiessen^[9]使用 Voronoi 区域做为辅助工具计算某区域降水平均值;受 Thiessen 的启发,Horton 在 1917 年开发出了精确的计算程序;Whitey 在 1929 年将该程序称为“Thiessen 方法”,于是,“Thiessen 多边形”(Thiessen polygon)这个术语就广为人知。应用 Voronoi 图研究结晶生长性质也是早期应用研究之一,物理学家 Wigner 和 Seitz 在 1933 年研究了金属钠的化学性质,用 Voronoi 区域来描述分布在三维空间中一个栅格内的点,物理学家现在称其为“Wigner-Seitz 区域”(Wigner-Seitz regions)。Venable 和 Ball 在 1971 年确定 Voronoi 区域和在石墨上生长的氘晶体的“接近捕获区域”(approximate capture zone)的相似性。Bogue (1949)和 Snyder(1962)研究了美国大城市中心的 Voronoi 多边形,它被看做这些中心的实际市场区域。Goodchild 和 Massam(1969)用 Voronoi 多边形来进行城市里的公共服务设施的定位设计。20 世纪 90 年代以后,Voronoi 图在地理信息系统中发挥了重要作用^[10]。1965 年 Slepian 应用 Voronoi 图研究信号的发射和接受区域,Conway 和 Sloane 在 1992 年称这种区域为“Voronoi 蜂窝”(Voronoi Honeycomb)。1965 年 Brown、1966 年 Mead、1967 年 Jack 应用 Voronoi 图研究“植物多边形”(plant polygons),1985 年,Hoofd 将其扩展到植物组织的毛细管区域的研究。1980 年,Tanemura 和 Hasegawa 根据特定点(巢穴、栖息地、食物储藏点)的位置来定义动物的领地。在 1992 年和 1996 年 Byers 使用点集的 Voronoi 图做为起点来考察不同种群的树皮甲虫对松树的侵害的空间特征。Cunlife(1971)、Renfrew(1972)、Ruggles 和 Church(1996)等分别应用 Voronoi 图研究了南英格兰的铁器时代、古希腊克里特文明、墨西哥盆地的 Aztec 遗址等早期文明的可能的领地结构。除了上述学科领域以外,Voronoi 图还在生物学^[11]、化学、流体力学、医学等诸多领域得到广泛应用^[12],最近在艺术方面也开展了应用研究^[13,14]。众多领域的应用有力地推动了 Voronoi 图的研究。

1.2 Voronoi 图基本概念

这里给出 m 维空间中普通 Voronoi 图的定义^[4]:

对于 m 维欧氏空间 R^m 中的一个点集

$$P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset R^m, 2 \leq n < \infty$$

点集 P 中无重点:

$$x_i \neq x_j, i \neq j, i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}$$

$P_i P_j$ 连线的垂直平分面(超平面)将空间(超空间)分为两半, $H_i(P_i, P_j)$ 表示 P_i 一侧的半空间, 则

$$\begin{aligned} V(p_i) &= \{x \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, i \neq j, j \in I_n\} \\ &= \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) \end{aligned}$$

被称为 R^m 空间中关于 P_i 点的 **m-维普通 Voronoi 多面体**, 而集合 $V(P) = \{V(p_i), \dots, V(p_n)\}$ 被称为由点集 P 生成的 **m-维普通 Voronoi 图**。

在上面的定义中, 称 Voronoi 多边形 $V(p_i)$ 中的点 p_i 为第 i 个 Voronoi 多边形 $V(p_i)$ 的**生长元**(generator point 或 generator), 也称为核; 而点集 $P = \{p_i, \dots, p_n\}$ 为 Voronoi 图 $V(P) = \{V(p_i), \dots, V(p_n)\}$ 的**生长元集**(generator set)。

如图 1.3 所示, 图中阴影区域内的任意点到 P_2 点的距离近于到其他点 P_i (其中, $i \neq 2$) 的距离, 域 $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 V_1$ 称为 P_2 的**邻域**, 其边界称为对应于 P_2 点的**Voronoi 多边形**, 它是由 P_2 与相邻点连线的垂直平分线围成的, 如 $V_1 V_2$ 是 $P_2 P_3$ 的垂直平分线的一部分。图中的 P_1, P_2 等点就是生长元。

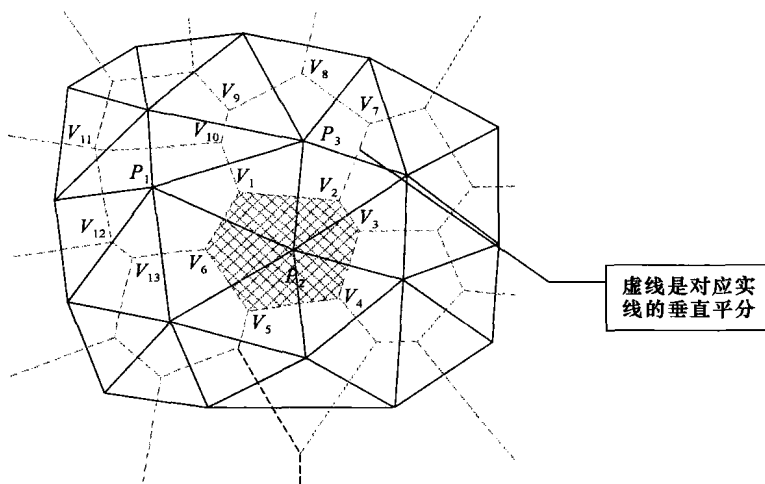


图 1.3 Voronoi 图相关概念

在三维空间中, 点集中若无五点共球, 则该点集的 Voronoi 图每个面是两个 Voronoi 多面体的公共面, 每个边是三个 Voronoi 多面体的公共边。并且每个顶点是四个 Voronoi 多面体的公共点。将共一个 Voronoi 顶点的四个 Voronoi 多面体所对应的点集中的点连成的四面体称为和这个 Voronoi 顶点对应的**Delaunay 四面体**。

如果一个二维/三维点集中有四点共圆/五点共球的情况, 这时这些点对应的 Voronoi 多边形/多面体共一个 Voronoi 顶点, 这个公共的 Voronoi 顶点对应多于三个

Voronoi 多边形/四个 Voronoi 多面体,也就是对应于多于三个/四个的点集中的点。这些点可以连成多于一个的三角形/四面体。这些三角形/四面体只要符合空圆/空球准则,且将这几个点形成的凸包充满就行。这些三角形/四面体也称为和这个 Voronoi 顶点对应的 **Delaunay 三角形/四面体**。

如图 1.4 所示的是一种退化的情形,图中的空心圆(一个 Voronoi 多边形顶点)引出了 4 条 Voronoi 边(这种情况是由于该顶点附近的 4 个生长元共圆所引起的)。这种退化情形会导致不必要的冗长的讨论和特别的处理,因此,本书所讨论的情况均为非退化的情形。

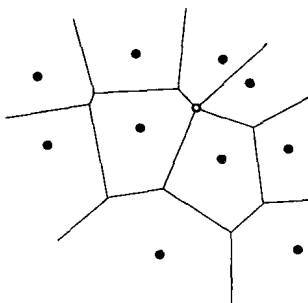


图 1.4 Voronoi 图的退化情形

Voronoi 图具有局部优化性质,并且其局部的修改只影响局部附近的区域,对整体性质没有改变。Voronoi 图的其他性质请详见参考文献[4]、[10]、[12]、[15]。

1.3 Voronoi 图的推广

上一节介绍的是 Voronoi 图的一般内容,实际应用中进行了一些推广,此时称为推广的 Voronoi 图(*generalized Voronoi diagram, GVD*),主要有以下几个方面的推广^[4,12,15]。

1.3.1 距离的推广

一般情况下,Voronoi 图是在欧氏空间里定义的,所以点之间的距离是用的欧氏距离。而在推广应用中,欧氏距离被推广到了加权距离(*the weighted distance*)、最短路径距离(*the shortest-path distance*)、最短可见路径距离(*the visibility-shortest-path distance*)、Minkowski 度量(*the Minkowski metric*)、Karlsruhe 度量(*the Karlsruhe metric*)、凸包距离(*the convex distance*)、河流行船距离(*the boat-on-a-river distance*)以及 Hausdroff 距离(*the Hausdroff distance*),等等。

1.3.2 生长元的推广

普通情况下 Voronoi 区域的生长元(generator,也称为核)就是点集,而有些应用领域将生长元由点集扩展到线段集合和点集的混合,线段集合甚至还是直线段和曲线段的集合;更进一步,生长元可能还包括区域(称为区域 Voronoi 图)。推广后生成的 Voronoi 区域就不一定是多边形了,如图 1.5 所示。

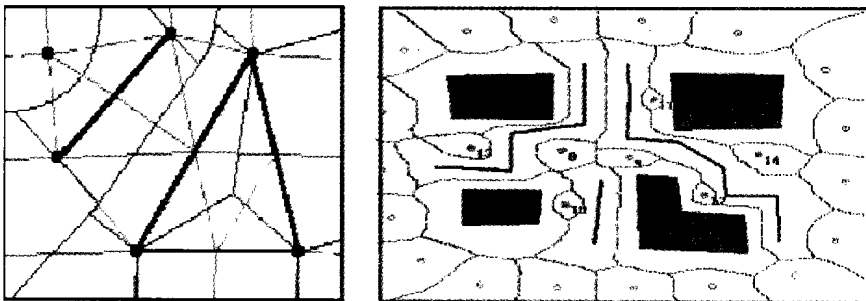


图 1.5 点、线段的 Voronoi 图(左)和域的 Voronoi 图(右)^[16]

1.3.3 移动点的 Voronoi 图

上述方法中的生长元(这里指点集)是静止不动的。如果这些点是运动的,生成的 Voronoi 图称为动态 Voronoi 图(dynamic Voronoi diagram),可以应用到移动通信领域。这里,点的运动只能由一个参数确定。Roderik Lindenbergh 的博士论文^[17]对该问题进行了一定的研究。

1.3.4 Poisson Voronoi 图

如果生长元(这里指点集)的分布是有一定统计规律的(符合某种概率分布),则称为 Poisson 分布,那么得到 Poisson Voronoi 图^[4],可应用在量子学、天文学等方面。

1.4 Voronoi 图生成技术

这里所说的 Voronoi 图为普通 Voronoi 图,以区别于加权 Voronoi 图、限定 Voronoi 图等概念。

Voronoi 图的应用与其生成算法密切相关,计算机能够自动生成复杂空间的 Voronoi 图,对 Voronoi 图的应用有很大影响^[4]。Voronoi 图的计算机自动生成方法的研究源于 20 世纪 70 年代:1975 年 Shamos 和 Hoey 在 *IEEE Symposium on Foundation of Computer Science* 上联合发表的论文 *Closest-point problems* 是 Voronoi 图研究的里程碑。在

此以前没有应用计算机自动生成 Voronoi 图, Voronoi 图的研究主要是 Voronoi 图特性以及初步应用。20 世纪 70 年代以后, 随着计算机自动生成 Voronoi 图技术研究的发展, Voronoi 图的研究进入快速发展阶段, 尤其是地理信息系统的出现, 促进了 Voronoi 图系统、深入的研究, Voronoi 图在复杂空间信息计算与分析中得到应用, 如 Heinrich^[18] 提出 PEBI 网格(perpendicular bisection, Voronoi 图的一种)的概念并替代油藏模拟领域使用的矩形网格, 尝试建立精细的油藏地质模型, 希望大大提高计算速度和精度。PEBI 网格的研究请参见第 9 章内容。

普通 Voronoi 图的生成算法主要内容如下。

1. 二维点集的 Voronoi 图生成

这里, 生长元是点集。主要有以下 7 种方法^[4,10,15]。

(1) 半平面法(half plane method)

根据 Voronoi 图的定义, 半平面法是很容易想到的方法, Crain(1978)、Boots 和 Murdoch(1983)、Quine 和 Watson(1984)等将其用于一些特别的模拟场合, 目的并不是构造 Voronoi 图, 而是生成 Voronoi 多边形的很多例子, 以便得到统计数据, 如每个多边形边数的分布。

这种方法是根据 Voronoi 图的定义, 因此方法的正确性是满足的, 但是由于在计算半平面的交集的过程中存在计算误差和舍入误差, Rhynsbarger(1973)认为这种算法效率很低, 健壮性不好, 只有理论意义, 实际过程中很少采用。

对于计算效率, 主要取决于计算半平面的交集这个过程。最“笨”的方法就是两两求交, 计算效率为 $O(n^3)$; 如果采用 Preparata 的方法^[19], 计算效率为 $O(n^2 \log n)$ 。

(2) 散步法(walking method)

如同一个旅行者一样, 沿着和 Delaunay 图相关的 Voronoi 图的边, 一个一个地按次序生成 Voronoi 顶点和 Voronoi 边。这是基于 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图的对偶性质。本方法是由 Lawson 在 1977 年提出这种 Delaunay 三角化的方法后, Brassel、Reif(1979)和 Cromley、Grogan(1985)再度提出的。Maus(1984)利用存储桶(bucketing)技术构造了一个平均复杂度为 $O(n)$ 的算法。

本算法也未得到广泛使用。

(3) 换边法(flip method)

Lawson^[20]提出二维 Delaunay 三角剖分中的换边法, 三维中该算法应用起来有些困难。本方法类似于 Delaunay 三角剖分中的换边法。

首先对点集的凸包 $CH(P)$ 进行初始的三角剖分, 随后使用换边法将三角剖分变成 Delaunay 三角剖分, 从而得到 Voronoi 多边形, 最终得到 Voronoi 图。

本方法时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

本方法在实际中有不少应用例子。

(4) 增量法(incremental method)

增量法是 1978 年由 Green 和 Sibson 提出,该法在实际应用中是最有效的生成方法,很多学者对其进行了研究,而其数值上健壮的算法由 Sugihara 和 Iri 二人先后在 1988 年和 1989 年提出。

本方法先对 2 个或 3 个生长元构建简单 Voronoi 图,随后每次加入一个生长元,修改 Voronoi 图,直至生长元集中的点已经全部加入完毕。

算法流程如图 1.6 所示。

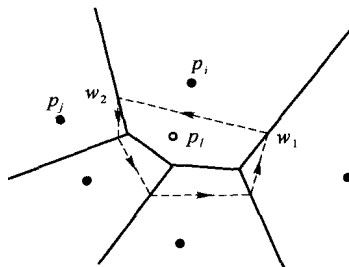


图 1.6 增量法的流程

步骤 1: 搜索新加入点(图中为空心圆表示的 p_i)的最近的生长元 p_i (图中在上部), 即,原来已经生成的 Voronoi 多边形 $V(p_i)$ 包含了新加入点 p_i 。

步骤 2: 在 $V(p_i)$ 中作 p_i 和 p_l 两点连线的中垂线, 找到该中垂线和 Voronoi 多边形 $V(p_i)$ 的两条边的交点(图中为位于右边的 w_1 和位于左边的 w_2 , p_i 在有向线段 $\overrightarrow{w_1 w_2}$ 的左边——即内部), 而 w_1 和 w_2 是新得到的 Voronoi 多边形 $V(p_i)$ 的两个顶点。

步骤 3: 根据 w_2 找到相应的 $V(p_i)$ 的邻近多边形 $V(p_j)$, 然后找到 $V(p_i)$ 中和 w_2 依次相邻的左侧的顶点直到多边形 $V(p_i)$ 封闭。

步骤 4: 修改和 $V(p_i)$ 相邻的所有 Voronoi 多边形。

在本方法中,步骤 1 搜索最近的生长元的算法需要特殊处理,有参考文献[4]采用的是带存储桶(bucket)的四叉树数据结构。

时间复杂度: 最坏情况 $O(n^2)$, 平均 $O(n)$ 。

本方法在实际应用中是最有效的生成方法。

(5) 分治法(divide-and-conquer method)

分治法是计算几何基本方法之一,类似于凸壳计算的分治法,是由 Shamos 和 Hoey 在 1975 年提出,而健壮的算法是由 Ooishi(1990)、Sugihara 等(1990)、Ooishi 和 Sugihara (1995)先后完善。首先将点集分成若干部分,对每个部分生成其局部(子)Voronoi 图,然后将所有子 Voronoi 图合并,从而构成整个点集的 Voronoi 图。

分治法的难处在于拼合,若能很好地解决拼合问题,在超大规模数据空间的并行处理