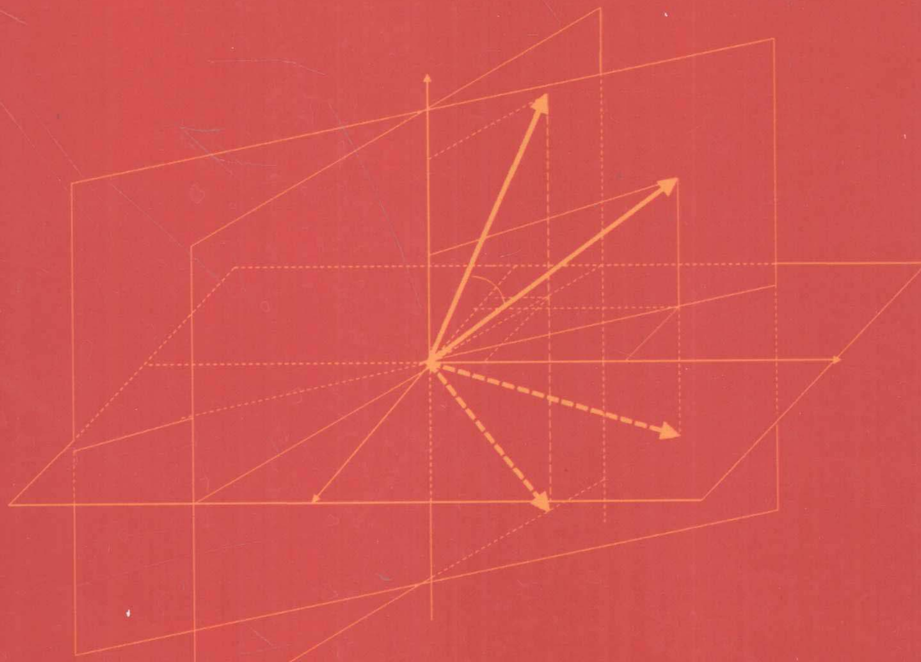
机器人几何代数模型与控制

郝矿荣　丁永生　著



科学出版社

机器人几何代数模型与控制

郝矿荣　丁永生　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以作者的研究成果为依托，讲述了向量空间、李代数以及对偶数环上的旋量理论等数学工具在机器人运动学中的应用。全书包含了李代数基本理论、机构运动学以及机构运动平台的视觉检测和控制三个部分。

全书共分12章。第1章为绪论；第2章对向量空间等基本概念进行回顾；第3～5章为李代数和对偶数环的基本理论，介绍了李代数、对偶数、李括号和对偶内积的几何意义以及他们之间的关系；第6～9章给出了对偶数环上的旋量场在机构运动学中的应用；第10～12章为本书的应用部分，给出了机器人运动平台的几何不变量检测方法，并进一步与智能算法相结合对机器人的动力学视觉伺服控制进行了探讨。

本书所提出的方法虽然以并联机器人模型为基础，但也可以应用于串联机器人，而且旋量场在对偶数环上的相关性的研究可以应用到当前较为热门的机构构型综合中。本书给出的机构学解析解表达形式新颖，为后续的机器人检测控制奠定了基础。最后，本书还给出了机器人的智能检测和智能控制方法。

本书可作为研究生教材或相关专业本科教材，也可作为相关科研人员与工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

机器人几何代数模型与控制 / 郝矿荣，丁永生著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-030380-6

Ⅰ.①机… Ⅱ.①郝…②丁… Ⅲ.①机器人-数学模型-研究②机器人控制-研究 Ⅳ.①TP24

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第030380号

责任编辑：耿建业 迟 慧 / 责任校对：包志虹

责任印制：赵 博 / 封面设计：耕 者

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年3月第 一 版　开本：B5 (720×1000)

2011年3月第一次印刷　印张：22 3/4

印数：1—3 000　字数：444 000

定价：70.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

自从 1978 年 Hervé 提出机构关节的运动可以由李群表示，便拉开了李理论在机器人机构学中应用研究的序幕。在这之前的 Ball 关于旋量理论的研究，以及可以追溯到始于 19 世纪上半叶的代数几何的研究，为李群在机器人技术中的应用奠定了坚实的基础。早期以李群和李代数为理论工具对机器人的研究大致分为两个方向，即以 Hervé 为代表的面向机器人的应用研究和以 Karger、Chevallier 为代表的面向机构内在机理的理论研究。显然前者的研究更多地被后来的机器人技术研究者所接受，其主要成果包括刚体位移的李群分类和机构构型，进而可以设计出新型的复杂机构。而后者的研究成果体现在分析探讨机构的内在特性和机理，包括机构奇异位形的数学研究等内容。随着信息技术的发展，以李群和李代数为理论工具对机器人进行的研究受到了更多学者的关注，给机器人技术的发展带来了更多的机遇，也提出了更具挑战性的任务，从而使这些理论成果得以在新的形势下去完成新的任务。

本书作者多年来对两类成果进行了深入分析和研究，内容包括：基于李群和李代数语言的机器人机构的运动描述，李代数、对偶数在机构运动学中的应用方法，闭环机构的李代数二阶表示方法，并提出了机构奇异位形横向性准则。确定了基于对偶数的机构奇异位形的李代数表示方法和机构分类，同时验证了机构奇异位形的横向性准则，还提出了基于旋量场和对偶数理论的 6R 串联机器人逆解的一般求解方法。这种方法从微分几何仿射空间出发，计算简练，揭示了机构的内在特性。最后，我们将上述研究成果应用于机器人控制和机器人视觉伺服控制，使得这些看似深奥的理论能够为机器人控制提供一种新的途径。

全书共分 12 章。第 1 章介绍了几何代数方法在机器人控制中的作用。第 2 章对仿射空间等向量空间的概念进行了回顾。第 3～4 章讨论了几何代数的基本理论，包括代数结构的位移表示以及对偶数环和代数空间等数学工具对空间几何关系的基本表达。第 5 章对旋量场在对偶数环上的线性相关性进行讨论，并给出了对偶数环上机构的子李代数、子李群以及相应的机构实例。第 6 章讨论了刚体运动的李代数表示，机构运动学模型闭环运动方程及其一、二阶导数。第 7 章将雅可比矩阵与横向性准则结合，对机构的奇异位形进行分析。第 8 章给出了广义对偶欧拉角的定义。第 9 章讨论了基于广义对偶欧拉角的并联机构的解析解。第 10～11 章讨论了并联机构运动平台的位姿视觉检测。第 12 章提出了机器人运动平台的视觉伺服控制方法。

本书的部分基础工作是郝矿荣教授在法国国立路桥工程师大学(Ecole Nationale des Ponts et Chaussées)攻读博士学位时完成的，期间得到了 Chevallier 教授和 Lerbet 教授的悉心指导，为本书奠定了扎实的理论基础，并与巴黎中央工程师大学(Ecole Centrale Paris)的 Hervé 教授建立了长期的合作研究。在此对三位教授对本书的指导和帮助表示由衷的谢意。作者在与上海交通大学高峰教授的合作中受益颇多，对本书的出版很有帮助，特此，对高峰教授表示诚挚的感谢。

本书的成果还得到了国家自然科学基金(60775052)、国家自然科学基金重点项目(60534020)、国家 863 航天领域 706 重大专项子课题(863-706-19)、上海市基础研究重点项目(JC1400900)和教育部留学回国科研基金项目的支持，在此一并表示感谢。

感谢东华大学信息科学与技术学院和数字化纺织服装技术教育部工程研究中心对本书写作和出版的支持。

本书由郝矿荣进行体系结构和主要内容的规划。第 1～9 章、第 12 章由郝矿荣完成，第 10 章由丁永生和郝矿荣共同完成；第 11 章由丁永生完成。期间得到了研究生张淑平、邝宏武、吴笛飞、林志贵、陈建林、吴勇、赵睿、黄环、高霖龙、许海洋、王海涛、郭崇滨、窦易文、黄新、曹自洋、翟雪琴、朱玉蓉、孟飞、葛建兵、张建平等的帮助与支持，在此表示感谢。

本书内容涉及多个学科前沿，知识面广，由于作者学识有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大同行、读者给予批评指正。

作　者

2011 年 3 月

符 号 说 明

符号	说明
A,B	位移,$\mathbb{D}$ 的元素
ad	$\mathfrak{D}$ 的伴随映射
Ad	$\mathbb{D}$ 的伴随映射
A_{J}	$f(q)$相对于 q_{in} 的雅可比矩阵
B_{Δ}	$\mathfrak{D}$ 在 Δ 上的一个基$\{Y_1, Y_2, Y_3\}$
B_{J}	$f(q)$相对于 q_{out} 的雅可比矩阵
C_i^{α}	向量场 μ_i 相对于基 μ_{α} 的坐标
C_k	系统 S 中第 k 个刚体
d_k	系统 S 中第 k 个运动副平移参数
$\mathbb{D}$	位移群,它是李群
d	系统 S 运动副平移参数坐标
e	位移群 $\mathfrak{D}$ 的单位元素
F	闭合函数的 $\mathfrak{D}$ 上的伴随映射形式
f	闭环运动函数
i,j	μ 中基 μ_{α} 以外的元素下标
J	闭环运动函数 $f(q)$的雅可比矩阵
$L(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ 的伴随映射集合
$L_{\mathbb{R}}$	χ 在$\mathbb{R}$ 上一个基$\{X_{\beta}\}_{\beta=1,\cdots,r}$
L_{Δ}	χ 的最大自由列$\{X_{\alpha}\}_{\alpha=1,\cdots,r_{\Delta}}$
M_{III}	III 型奇异位姿集合
M_{II}	II 型奇异位姿集合
M_{I}	I 型奇异位姿集合
M^s	S 的奇异位姿集合,M 的子集
M	S 的运动学许可位姿集合
m	系统 S 中刚体的数量
n	系统 S 的自由度
q^a	系统 S 的输入$\{q_1^a,\cdots,q_n^a\}$
Q^i	相对于输入的中间变量函数
q^i	系统 S 的中间量$\{q_1^i,\cdots,q_{m-2n}^i\}$
q_k	系统 S 中第 k 个运动副旋转参数
Q_{out}	输出和中间变量函数
q_{out}	系统 S 的输出$\{q_{\mathrm{out}}^1,\cdots,q_{\mathrm{out}}^n\}$
q	系统 S 运动副旋转参数坐标
R	$L(\mathfrak{D})$的元素,螺旋位移
$\mathbb{R}_q$	$f'(q)$在$\mathbb{R}^m$的核
$\mathbb{R}_s$	$\mathbb{R}_q$在$\mathbb{R}^m$内的补
$\mathbb{R}$	实数集合
r	μ 中在$\mathbb{R}$ 上线性无关向量个数
s	$\mathfrak{S}_{\alpha}$ 的维数
S_m	由刚体组成的机构系统
X,Y,Z	向量场,$\mathfrak{D}$ 的元素
X_i	满足 $X_i \in \chi$,但 $X_i \notin L_{\Delta} \cup L_{\mathbb{R}}$
$z_i^{\alpha_0}$	$\hat{z}_i^{\alpha}$ 的对偶部

符号	说明
$\hat{z}_i^\alpha$	X_i 相对于基 B_Δ 坐标的对偶坐标
z_i^α	$\hat{z}_i^\alpha$ 的实部
α,β	$\mathfrak{F}_q$ 内元素的下标
μ_α	$\mathfrak{F}_q$ 在$\mathbb{R}$上的一个基
$\{\mu_\alpha,\mu\}_{\alpha,\nu}$	$\mathfrak{S}_a$ 的一个基
μ	S 的向量场集合
μ_k	从属于 ξ_k 的向量场,属于 $\mathfrak{D}$
ν	$\mathfrak{S}_a/\mathfrak{F}_q$ 的下标
ξ_k	S 中第 k 个位移生成算子,属于 $\mathfrak{D}$
$\{\xi,\eta,\zeta\}$	$\mathfrak{D}$ 在 Δ 上的一个基
ϵ	单位对偶数
Δ	对偶数集合
χ	反对称向量场集合$\{X_1,\cdots,X_m\}$
$\mathfrak{C}^i$	i 阶李括号生成的向量场集合

符号	说明
$\mathfrak{D}$	从属于D的李代数
$\mathfrak{F}_q$	由 μ 生成的向量空间
$\mathfrak{G}_q$	$\mathfrak{F}_q$ 在 $\mathfrak{S}_a$ 内的补
ℓ_k	系统 S 中第 k 个运动副
$\mathfrak{S}_a$	$\mathfrak{I}_q$ 生成的子李代数
$\mathcal{L}_\mathrm{s}$	对称算子集合
$\mathcal{L}_\mathrm{a}$	反对称算子集合
$\mathscr{X}^\mathrm{u}$	X_i 相对于基 B_Δ 的对偶坐标矩阵
$\mathscr{X}^o$	$\hat{\mathscr{X}}$ 的对偶部矩阵
$\mathscr{X}$	$\hat{\mathscr{X}}$ 的实部矩阵
$[\,,\,]$	$\mathfrak{D}$ 的李括号
$\{\,,\,\}$	$\mathfrak{D}$ 的对偶内积,其值属于 Δ
$(\,,\,)$	Killing 内积
$[\,\mid\,]$	Klein 内积

目　录

第1章　绪　　论

1.1　机构几何代数模型与机器人控制概述

机构的数学特性是机器人领域的重要研究课题之一，主要包括机构特性的数学描述、机构位姿的检测和机构运动的控制，以便于计算机指令和控制算法的高效实现。这一领域涉及多学科的交叉，如数学、力学、机械、计算机、信息科学、材料甚至生命科学等学科，因此也导致其研究的复杂化。随着机构的复杂化、机构的应用领域多样化和计算机工具的进步，这一机构系统的数学描述和新算法的设计对机构数学模型提出更高的要求。

近年来，人类的活动领域不断扩大，机器人应用也从制造领域向非制造领域发展。像海洋开发、宇宙探测、采掘、建筑、医疗、农林业、服务、娱乐等行业都提出了自动化和机器人化的要求。这些行业与制造业相比，其主要特点是工作环境的非结构化和不确定性，因而对机器人的要求更高，需要机器人具有行走功能、对外感知能力以及局部的自主规划能力等，是机器人技术的一个重要发展方向[1]。这些要求使得机器人向集成化、模块化、智能化和多感知系统发展，同时这些性能的实现与机器人自身性能的模块化表示紧密相关，因此几何代数方法是机器人机构数学建模的有力工具，是机器人实现自主化的重要途径。

主题为数学与机器人学之间相互影响的会议于 2000 年 5 月由美国国家科学基金会在弗吉尼亚州阿灵顿主持召开。专家们讨论了机器人学中数学的重要性以及机器人学问题对数学发展起的促进作用。专家们提出了很多问题，其中涉及较多数学分支和机器人学的多个领域[2]。由于机器人是一个非常复杂的系统，其中包括机械系统、机电驱动系统、计算机控制系统、信息采集与反馈系统，同时需要将计算机控制与机电驱动装置和传感器结合起来，这一综合性的任务已超出了工程师的能力。该领域的任何理论都要经得起实际机械装置的考验。因此几何代数方法也是机器人学的重要分支之一。

1.1.1　几何代数和机构学的数学方法

回顾 Grassman 和 Clifford 的工作可知，几何代数是由 Hestenes 定义的带有几何释义的多线性代数。Hestenes 的本意是通过几何代数建立物理学中统一的符号运算专有术语，事实上由于历史的原因，今天有多个领域基于不同的形式都在

使用这些术语，如张量(tensors)、矩阵(matrices)、扭矩(torques)、矢量(vector)、旋量(spinors)、四元数(quaternions)等，而这些由 Henestes 命名的术语恰恰是 Clifford 想赋予 Clifford 代数的[3]。

已经证明几何代数对于一些物理问题的解决非常便利，如涉及旋转、相位角的问题等。同时几何代数在量子力学、经典力学、电磁学以及相对论等领域都表现出其结构紧凑、直观的特点。目前几何代数的应用已经拓展到机器视觉、生物力学、机器人学以及太空飞行动力学等领域。

Sophus Lie 的李群李代数是几何代数在机器人学中的一个重要分支。Sophus Lie 的主要成就是发现了连续变换群，在他去世后才被命名为李群。李代数可以理解为是李群的线性化和生成的相应向量场，或叫做无穷小生成元，且被表示为群的线性化形式[4]。

从 19 世纪末诞生到现在，李群李代数经历了一个多世纪的发展。从研究晶体排列到研究刚体的运动分析，均获得了广泛而成功的应用。旋量作为李代数的一个元素，其研究早于李群、李代数的出现，现在已经是一个比较成熟的理论工具。旋量理论与李群、李代数在机构学中的应用，大大地丰富了机构学的研究手段，推动了当代机构学的研究和发展[5]。

数学家 Clifford(1845—1897)提出了一个极具原创性的建议，即在“motor”理论中，存在一些二阶幂零元作为特殊向量用于描述一个“motor”。继 Clifford 以后，在加入李代数结构的条件下，Ball 的关于螺丝的传统理论[6]将我们引领到对偶数环的欧氏代数的研究。这一观点使运用于刚体运动学分析的几何代数性质得以全面系统化。

关于螺丝理论，较早的系统性工作在形式上具有多样性，有些体现为代数学，有的则为纯几何学，一些较为完整统一的是前面提到的 Ball 以及 Study 的工作[7]。Hunt 建立的机构几何学应用已经成为这一领域的经典。基于线性代数方法的螺丝理论也在机器人运动学领域得到广泛应用[8]。在 Ball 和 Zanchevskiy 的螺丝理论以及 Kotelńikov 将对偶数应用于向量理论的基础上，Dimentberg 将螺丝的对偶计算进一步应用于机构运动学[9]。随后，Keler[10]、Yang、Freudenstein[11]、Veldkamp[12]、Sugimoto[13]、Duffy[14]、Pradeep 等[15]都研究了对偶数在机构运动学中的应用。Chevallier 介绍了对偶数运动学计算的现代数学方法[16~18]。

立足于三维欧氏位移群的李群特有结构对机构进行深入研究，将使得许多在运动学和动力学中显得神秘的性质如“旋量”等得到合适的解释。这类工作在运动学方面主要体现在 Hervé[19,20]、Karger[21] 等的研究中，而动力学方面主要包括 Chevallier 的工作[22,23]。

李代数方法在机构学中的应用首先追溯到 1978 年，Hervé 介绍了运动副位移群的李群表示方法，通过位移群的非空位姿集合判定机构可能的运动来确定机构

的自由度。从而定义了位移几何群的代数结构,进而定义机构运动副及其主要性质。随后,Chevallier 研究了位移群的代数性质、刚体运动中位姿空间的微分流形结构以及李代数、对偶数和对偶四元数在运动学中的关系。Murray 和 Li 等在他们的著作《机器人操作的数学导论》中对李群与机器人运动进行了系统介绍[24]。

1.1.2　机器人机构的设计

机器人机构构型理论的研究具有十分重要的理论和实际意义,是目前国际学术界和工业界广泛关注的热点和前沿。

机器人机构的构型理论首先要建立在对其末端运动特征和末端运动约束特征的准确描述上。一个机构由一系列刚体及运动副连接构成。机构分析的基本问题是找到连接刚体的任意运动副的合适数学表示,已经证明该问题通过两种途径得以解决,即机构连接的并和交运算,并运算对应于串联机构,交运算则对应并联机构。该方法的有效性已经在三自由度并联机构的设计中得到验证[25]。连接基座与动平台的三个支链产生纯平移运动,每个支链的位移子集是一个子李群。三个子集的交仍然是由空间平移构成的子李群。伺服电机与基座相连,这使得它的体积和重量不受太多限制,进而驱动非常大的负载。另外三个支链为重量较轻而运动灵活的桁架结构,从而使这类并联机构实现高速度、高加速度的精准定位。

近年来,关于并联机器人的研究发展很快,并且涉及范围很广。由于造价低廉,旋转关节并联机器人研究逐渐受到重视,典型的有三自由度 R-CUBE 全旋转关节解耦并联执行机构[26]以及著名的三自由度 Delta 机器人。Hervé 和 Sparacino 列举了一系列类 Delta 机器人机构[27]。Tsai 给出了基于平面平行四边形机构的全旋转关节的三平移自由度并联机构设计。Zhao 和 Huang[28]研究了过约束 3-RRC (revolute-revolute-cylindrical) 平移操作器的运动学特性。Baron 和 Bernier 研究了星形三自由度并联机构的设计。Carricato 和 Parenti-Castelli[29]介绍了系列三平移自由度并联机构。Kong 和 Gosselin 对 3-CRR 平移并联机构的运动学和奇异位形进行了研究。Fang 给出了三自由度旋转关节并联机构的设计综合[25]。Kim 和 Tsai[30]提出了同类机构的优化设计。Liu 在 2006 年先后提出了对称结构平面 5R 并联机构优化设计和基于运动学优化的 PRRRP 结构 2-DOF 并联机器人设计[31,32]。

由于高自由度的大部分并联机构的末端操作器存在位姿运动的耦合,为简化控制环节,近期并联机构研究倾向于将末端操作器的运动进行解耦设计,尽量避免复杂的多自由度关节,但这会使机构设计受到限制;同时,由于并联机构的复杂性,一般较难设计出结构解耦的高自由度的空间机构,尤其是能够实现末端操作器旋转运动的解耦机构。因此并联机器人的解耦设计和功能实现往往是一对矛盾,因此控制问题的解决不能完全依赖机构自身的解耦。

传统的数学工具常常使从事机构设计的工程师感到困惑，但刚体系统位移的李代数结构仍然是机构设计的理论基础。根据连续群李理论，一个微小位移由一个作用于三维欧氏空间的仿射点的算子来表示，该算子一般被称作反对称向量场、螺丝或旋量。一个这样的反对称向量场集合也叫反对称向量场系统或旋量系统，它具有李代数结构，且可以将指数函数作用于这些反对称向量场，得到表达机构所在的位姿的所有无穷小位移的算子集合，这一集合具有李群结构，确切地讲，它是一个六维位移群的子群。同时还能得到与之对应的子李代数。

1.1.3 机构运动学分析

1. 运动学

关于机器人的运动学问题可分成两个子问题：正向运动学问题和逆向运动学问题[33]。当给定机器人末端操作器的位姿参数，求解各输入关节的位置参数，是机器人的运动学位置逆解问题；当给定机器人各输入关节的位置参数，求解末端操作器的位姿参数，是机器人的运动学正解问题。对于串联机器人来说，其逆运动学问题具有多解性，而正向运动学问题却相对简单。对于并联机器人来说，其逆运动学问题非常简单，而正向运动学问题却相当复杂，因此正向运动学问题一直是并联机器人运动学研究的难点之一[34]。从目前的研究成果来看，关于正向运动学的解法主要分为两大类：数值法和解析法[35, 36]。

由于并联机构结构复杂，位置正解的难度较大，其中一种比较有效的方法是采用数值方法求解一组非线性方程，从而求得与输入对应的动平台的位置和姿态。数值法的优点是它可以应用于任何结构的并联机构，计算方法简单；但此方法计算速度较慢，不能保证获得全部解，并且最终的结果与初值的选取有关。解析法是通过消元法消去机构约束方程中的未知数，从而获得输入输出方程中仅含一个未知数的多项式。这种方法的优点是可以求解机构中所有可能解，并能区分不同连续工作空间中的解，但推导过程复杂。对于一般形式的 6-SPS 并联机构的解析位置正解还没有解决，但通过改变上下平台上铰链点的分布或采用复合铰的方法[37]，6-SPS 并联机构可以演化出许多结构形式，其中有一些结构有解析解。

为了克服非线性方程组数值解法的复杂性，一些学者应用遗传算法以及神经网络[38~41]这些非数值并行算法来求解 6-SPS 并联机构的位置正解问题。

2. 奇异位形[42]

奇异位形是机器人机构学研究的又一项重要内容，同串联机器人一样，并联机器人也存在奇异位形，当机构处于奇异位形时，其雅可比矩阵为奇异阵，行列式值为零，此时机构速度反解不存在，存在某些不可控的自由度。另外当机构处于奇异