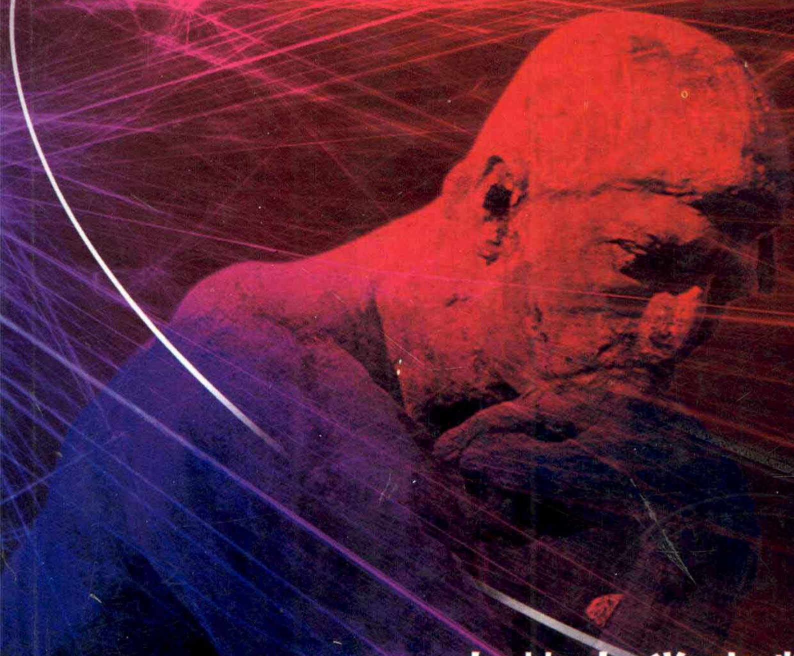
中学数学

原理·思想·方法

杨莉　崔殿军 编著



吉林大学出版社
JiLin University Press

中学数学

原理·思想·方法

杨　莉　崔殿军　编著
王旭明　主审

吉林大学出版社

内容简介

本书以数学教育理论为依据，按照新形势下教材改革的精神，结合我国初等教育改革和发展的现实，以中学数学教育理论和实践经验为基础，总结概括了中学数学原理、思想、方法。

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，拓展了适应面，增强了实践性，可作为高等院校数学教育专业的教法研究材料，也可供中学数学教师培训使用。

图书在版编目(CIP)数据

中学数学原理思想方法／杨莉　崔殿军　主编-长春：吉林大学出版社，2006.5

ISBN7-5601-2884-X

Ⅰ.中…　Ⅱ.①杨…　②崔…　Ⅲ.中学□数学□原理思想方法

Ⅳ.①G623.5　②G633.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078929

中学数学原理思想方法

主　　编：杨莉　崔殿军

责任编辑：王亦农

出版发行：吉林大学出版社　吉林音像出版社

（吉林省长春市人民大街 4646 号　邮政编码：130021）

网　　址：www.hdhcb.com.cn

E－mail：jrbj88@163.com

印　　刷：内蒙古民族大学印刷中心

开　　本：787×1092　1/16

印　　张：32

字　　数：660 000

印　　数：1-1000 册

版　　次：2006 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN7-5601-2884-X/G·2255

定价：36.00 元

前　言

对中学数学原理、思想、方法的研究，是从事数学教育工作者永恒的课题，历来备受青睐。笔者从系统论、信息论、控制论的角度出发，将中学数学诸多问题进行合理归类，通过对典型例题的解析和方法的归纳，与读者共同探索中学数学中的原理、思想、方法。

本书由抚顺师范高等专科学校杨莉(第一、二、三章)、崔殿军(预篇和第四、五章)合作编著，王旭明主审。由于时间仓促，篇幅有限，关于中学数学中导数和概率等问题的研究，未能在本书中完全体现出来。书中难免存在值得商榷的地方，敬请同仁斧正。

编　者

2006 年 5 月于抚顺

目　录

预篇　系统科学原理例释

第一章　二次函数

第二章　函数

第三章 不等式

第四章 三角函数

第五章　数列

预　篇

系统科学原理例释

路漫漫其修远兮，
吾将上下而求索。
——屈原《离骚》

人要生存，生命要延续，生物要进化，机器要运转，数学要解决问题，世界万物的发展变化存在着普遍的规律，从来都是哲学研究的问题。但是，二十世纪四十年代先后创立的控制论、信息论和系统论，及至七十年代发展起来的耗散结构论、协同论、超循环论，把生物科学、物理科学、经济科学等用精确的数学方法紧密地联系起来，特别是现代空间科学技术、电子计算机和基因工程等高新科技的迅猛发展，使信息、系统与控制逐渐变成普遍的生活用语和哲学思想方法。钱学森教授早就提出用系统科学的概念把系统论、控制论和信息论等统一起来。查有梁教授更用公理化的方法把系统科学的思想方法概括为三个基本原理：反馈原理、有序原理和整体原理，用来研究教育科学、科学方法和物理教学。本书就尝试用这三个原理来探究中学数学中的思想和方法。为了对系统科学的基本原理和有关的概念有个初步的了解，分别举例作粗略的解释。

§1　整体原理

一、例题

【例 1】 设 $f(x)$ 是 R 上的函数，如果对于任意的 $x\in R$ 都有 $f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$，并且对于任意的 $x,y\in(0,1]$ 都有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，　$f(1)=3$.

（1）分别求出 $f\left(\dfrac{1}{2}\right),f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 的值；（2）求证 $f(x)$ 是周期函数；（3）分别求 $f\left(\dfrac{3}{2}\right),f\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)$；

（4）记 $a_n=f\left(2n+1+\dfrac{1}{2n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln a_n^2\right),(n\in N)$.

〖**探**〗探索联系

（1）所求的 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 与已知的 $f(1)=3$，　$x,y\in(0,1]$，　$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 之间有什么联系？当 x,y 取何值时，能得到只含有 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $f(1)$ 的等式呢？又如何由 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 求出 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 呢？

（2）周期函数 $f(x+a)=f(x),(a\neq 0)$ 与已知 $f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 如何建立联

系？若把 $f(x)$ 视为已知数，则已知条件是关于两个未知数的等式，求不出未知数。能否从这个已知等式推导出另一个已知等式呢？由 $f(x)=f\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 中 x 的任意性，把 x 换成 $(x+?)$ 就可以得到有相同项的等式呢？如果能得出只有两项 $f(x+\alpha), f(x+\beta)$ 的等式，就有可能推出 $f(x+a)=f(x)$ 了。

（3）、（4）利用周期性化简 $f\left(2n+1+\frac{1}{2n}\right)$ 就容易求解了。

〖**解**〗形成结构：从已知条件出发，经过逻辑推理，形成必然联系的结构。

（1）
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{已知}\\ \text{令}x=\frac{1}{2}\in(0,1]\\ y=\frac{1}{2}\in(0,1]\\ f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\text{已知}\\ f(1)=3\\ f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)\\ \text{即}f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\end{array}\\ \left.\begin{array}{l}f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\\ \text{令}x=y=\frac{a}{2}\in(0,1]\end{array}\right\}\Rightarrow f(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)\cdot f\left(\frac{a}{2}\right)>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{所求}\\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\\ \because\left(f\left(\frac{1}{2}\right)>0\right)\end{array}\right.$$

$$\text{同理：}\left.\begin{array}{l}x=y=\frac{1}{4}\in(0,1]\\ f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\\ f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2\\ f\left(\frac{1}{4}\right)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{3}.$$

（2）
$$\left.\begin{array}{l}\text{已知}\\ f(x)=f\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)\\ \downarrow\text{把}x\text{换成}\left(x-\frac{1}{3}\right)\\ f\left(x-\frac{1}{3}\right)=f\left(x-\frac{2}{3}\right)+f(x)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{两式相加}}\left.\begin{array}{l}0=f\left(x-\frac{2}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)\\ \text{即}f\left(x+\frac{1}{3}\right)=-f\left(x-\frac{2}{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{把}x\text{换成}\left(x+\frac{2}{3}\right)\\ f(x+1)=-f(x)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{把}x\text{换成}(x+1)}f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$$.即 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数。

（3）
$$\left.\begin{array}{l}\text{由(1)}f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\\ \text{由(2)}f(x+1)=-f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}.$$

已知对任意的 $x,y\in(0,1]$ 都有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\Rightarrow$

$$f(1)=f\left(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{2n个}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^{2n}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2n}\right)=3^{\frac{1}{2n}}\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=-f\left(\frac{1}{2n}\right)=-3^{\frac{1}{2n}}.$$

（4）$$\left.\begin{array}{l}由(3)f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=-3^{\frac{1}{2n}}\\ 由(2)f(x)的周期为2\end{array}\right\}\Rightarrow a_n=f\left(2n+1+\frac{1}{2n}\right)=-3^{\frac{1}{2n}}\Rightarrow a_n^2=3^{\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln a_n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln 3^{\frac{1}{n}}\right)=0.$$

二、整体原理

我们知道，人体是由细胞形成组织，再构成器官，形成神经系统、消化系统等八大系统，最终构成一个有机的统一整体。1947 年，生物学家贝塔朗菲发表了《一般系统论》一书，强调把生物体当作一个具有有机结构的整体系统。随着物理科学、计算机科学以及微观与宏观系统工程的发展，系统发展成一个普遍的哲学范畴。宇宙间一切事物都是以系统的形式存在着、发展着，整体原理就揭示了系统发挥功能的一条基本规律。

1、整体原理简释

肯定表述：任何系统只有通过相互联系，形成整体结构，才能发挥整体功能。

否定表述：没有相互联系，没有整体结构，要使系统发挥整体功能是不可能的。

——摘引自①查有梁《大教育论》*P*288

没有结构的孤立部分，要发挥整体功能是不可能的。对生物系统、机器系统、社会系统是如此，对数学系统也是如此。人体有各种器官，这些器官相互联系、相互制约，形成有机结构的整体。没有结构的生命是不存在的。生物最基本的组成部分——细胞，也有各种结构。中学数学的各部分知识相互联系，形成各种结构，发挥不同作用，解决不同问题。要学好数学，就要掌握知识之间的相互联系，形成优化的整体结构，以解决问题。

与机器结构、生物结构、社会结构等各门类的系统结构一样，不同的结构有不同的功能。数学中的解题结构就是一种从已知求得未知的整体结构，其结构特征是逻辑推理的必然联系。不同解法有不同结构，但都必须是必然的逻辑联系，形成这种必然联系的结构，就是求解过程。教材中讲述知识的结构、公理化结构、各种模型的结构，以至于定理、公式的推导过程，提出问题、解决问题的过程等，都必须建立联系，形成系统结构，发挥整体的不同功能，进而优化系统的功能。

2、系统的要素与层次

处在一定相互联系中与环境发生关系的各个组成部分的整体，即系统；组成系统的各个单元、因子、部分，即要素。

——摘引自②查有梁《控制论、信息论、系统论与教育科学》*P*121

系统与要素是对立的统一，两者相互独立、相互依存、相互制约，在一定条件下相互转化。当某一个层次的系统转化、升华为更高层次的系统时，这个系统便成了更高层次系统的要素。这样，小系统逐步转化、升华为较大的系统、母系统。较高层次的系统是下一层次系统的母系统，而较低层次的系统是上一层次系统的子系统（要素）。

系统的要素与层次的关系可用框图简示如下：

$$\begin{array}{ccc} \boxed{要素} & \rightleftarrows & \boxed{系统} \\ \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{层\qquad次}} \end{array}$$

系统与要素的关系同数学中的集合与元素的关系相似，例如线是点的集合，面可以看成是线的集合，而空间则可以看成面的集合。正如人体作为系统是个大的母系统，循环系统等是它的子系统，心脏、血管等器官是循环系统的子系统。细胞虽然是基本要素，但仍是一个有机的系统，有细胞核、细胞质、细胞壁等要素，而细胞核也是系统。同样，代数的基本要素是数。数的第一层次的集合就是自然数、整数、有理数、实数、复数等，再经过运算的联系形成各种式的集合。把式作为整体与式中的数就构成等式、不等式及各种对应关系、函数关系，这些关系又形成系统，其中最重要的就是函数这个大系统。要想学好代数，首先就要掌握这些要素的各个层次的集合以及它们的联系与转化规律，学会要素、层次、系统的优化与相互转化。

以本题为例，函数 $f(x)$ 本是一个大系统，而本题的 $f(x)$ 则是这个大系统中的一个具体的小系统；这道题又由若干小系统组成，例如 $f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 就是这个函数的一个小系统，而它由三个函数要素 $f(x)$、$f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$、$f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 通过“=”与“+”两个“关系”要素联结而成。这个小系统就象一个小的循环系统似的，功能是输入不同的实数，如 $d+b$，由函数关系 $f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 产生（输出）结果 $f(a+b)=f\left(a+b-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(a+b+\dfrac{1}{3}\right)$.不懂得基本要素 $x\in R$ 与子系统 $f(x)$、$f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$、$f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 之间的关系及其层次转换，就不可能解决本题。$1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$ 是一个较低层次的转换，而将 x 换为 $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 或 $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$，则是高一个层次的转换。由 $\begin{cases} f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \\ f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=f(x)+f\left(x+\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$ 得出仅有两个函数 $f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ 与 $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 的子系统，即 $f(x)$ 与 $f(x+1)$ 的关系，又是一个层次的转换。总之，不同层次的要素与系统之间的转化是多么重要啊！

3、系统的结构与功能

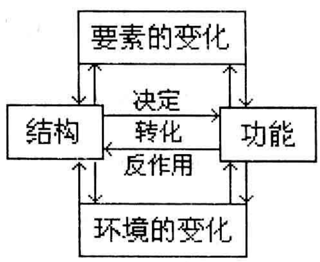
系统内部各个要素的组织形式，即结构；系统在一定环境中所能发挥是作用，即功能。

——摘引自②查有梁《控制论、信息论、系统论与教育科学》$P125$

结构与功能是对立的统一，两者相互区别、相互依存、相互制约，在一定条件下相互转化。结构决定功能，功能反作用于结构。结构的变化可出现新的功能，功能的变化发展可导致结构的变化。人体各种细胞形成的各个层次的系统，组织、器官及大系统各有各的功能，它们都是由不同细胞的不同结构所决定的。类似的，函数这个系统是由各种各类的子系统组成的，它的基本要素是定义域、对应法则和值域。这与人体系统相比要简单多了，但也是由不同的结构组成的。例如，在本题中具有结构 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 的函数是指数函数类 $f(x)=a^x,(0<a,a\neq 1)$，而具有结构 $f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ 的函数却是周期函数。有些同学在学习代数的过程中，片面地理解“组织形式”，例如把这里的“[　]=（　）+（　）”只当成组织形式，而忽略了“（　）”的组织形式也是结构。如果片面地把 5=2+3、$a(b+c)=ab+ac$、$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 看成是同一结构，就会犯极大的错误。请注意，在这三个等式中，除了要素有本质的区别外，结构也有本质的区别。等式“5=2+3”是指“5”可以分解为“2”与“3”的和，这与等式“2+3=5”的结构是不同的；“$a(b+c)=ab+ac$”虽然同属等式，但要素是一般的数量，比具体的数字要高一个层次，“$a(b+c)$”是一个算式，其组织形式与“5”是不同的；而“$f(x+y)$”比“$a(b+c)$”还要高一个层次，其结构也有本质的不同，“$f(x+y)$”的结构是由变量 x、y 通过对应法则 f 形成的函数结构。虽然可以把 $f(x+y)$ 看作是一个要素，但与数字“5”和算式“$a(b+c)$”属于不同的结构。总之，结构是指系统整体与基本要素及各层次的部分（子系统）的组织形式。由于不同的结构决定不同的功能，这就需要掌握各要素（含各层次子母系统）的整体结构。“5=2+3”是把“5”分解为“2”与“3”之和，类似的分解方法有无数种；“$a(b+c)=ab+ac$”是分配律，其中 a、b、c 可以替换为各种数、式、算子（如函数、逻辑命题、向量等）；而“$f(x+y)=f(x)+f(y)$”表示函数的一种运算性质。

当然，功能对于结构具有反作用，例如函数的奇偶性、周期性等决定了该函数结构上的某些特征。功能与结构在一定条件下可以互相转化，例如分配率 $a(b+c)=ab+ac$ 可以作为一个系统，随着算子 a、b、c 的变化，得出一系列的乘法公式及因式分解公式。在这两组公式系统中，每一个公式又是一个新的结构，例如平方差公式、完全平方公式等，其结构的特征是何等的重要啊！

由此可见，结构与功能在要素或环境变化的条件下可以互相转化，我们用框图表示如下：



三、系统思想例释

系统思想包含系统发生发展的基本规律，随着现代科技与哲学的发展，也越来越深刻。系统论的创立与系统科学原理的提出，使系统思想成为一个普遍的科学思想方法。它可以通俗地简述为把客观事物看成有结构的整体系统的思想。除了整体原理业已阐述的要素与层次、结构与功能的基本关系以外，作为系统思想，需要再强调一下系统的整体性、联系性和

优化性。分别举例说明如下：

1、整体性：首先要把一个事物看作是由若干要素组成的整体。例如，把一道题、一本书、一节课都要看成一个整体。解决一道题，实质上就是把它看成一个有机的整体。在【例 1】中，如果不能形成由已知条件到求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln a_n^2\right)$ 的整体结构，当然就不能算掌握了本题，即使是分别解出了其中的各个小题，也不一定能形成整体；只有当体会到这道题是由解析式为

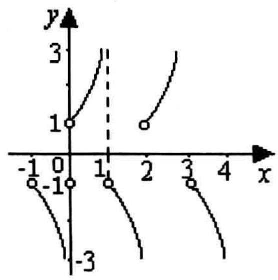


图 1-1

$f(x)=\begin{cases}3^{x-2n},(x\in(2n,2n+1])\\-3^{x-(2n+1)},(x\in(2n+1,2n+2])\end{cases}$，图象为图 1-1，周期为 2 的分段函数时，才算基本上掌握了本题中 $f(x)$ 的整体。反之，若要解决这道题，显然必须明确本题是讨论具有 $\begin{cases}f(x)=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\\f(x+y)=f(x)\cdot f(y),(x,y\in(0,1])\\f(1)=3\end{cases}$ 这三个要素（条件、性质）的整体。不然，这道题就无法理解。特别是，如果不善于利用所求（也是问题的组成部分），不利于“求证 $f(x)$ 是周期函数”这个要素，就不会设法去寻求 $f(x+?)=f(x)$ 的关系，找到解题的思路。

有些同学在学完一节课后，连主题、中心思想都抓不住，原因就在于缺乏整体思想。中国传统教育理论强调“以一贯之”、“学问思辨行统一”，陶行知先生提倡“教学做合一”，蔡元培先生主张“五育并重”，特别是我国德智体美劳全面和谐发展的教育方针，都是强调整体性的思想。

2、联系性：要想发挥整体功能，就要形成整体结构。关键是探索联系，建立必然联系、有机联系。例如，在【例 1】的第（1）小题中，若要求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，就要找到与已知条件的必然联系。这首先要认识到，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 是由两个要素（$\dfrac{1}{2}$ 和 $f(x)$）构成的，需要找到与此有关的已知条件。关键是如何利用已知“$f(1)=3$”这个条件。1 与 $\dfrac{1}{2}$ 之间可以有和、差、积、商、指数、对数等诸多联系，怎样用呢？还必须与 $f(x)$ 的两个已知性质相联系。

显然 $\dfrac{1}{2}\in(0,1]$，能否与“$x,y\in(0,1],f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$”联系起来呢？由此可见，探索、找到联系 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 是形成结构、求出 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的关键。从哲学上讲，万事万物存在普遍联系是一切事物的客观规律，而要形成结构，关键就在于探求必然联系。所以，系统思想实质上是掌握要素之间的联系，使之构成整体的思想，联系性是系统思想的一个基本观点。

3、优化性：系统思想不是静态的，也不仅仅是分析事物是如何联系的，这个思想的目

标是发挥整体功能。所谓发挥功能，实质上是使整体功能充分发挥出来。通俗的说法就是发挥更大的作用，用数学语言来说，就是优化。由于客观事物的变化是无穷尽的，所以，优化不是“最好”，而是“越来越好”，只有在一定条件下才能实现最优化。数学上的“最优化”属于质的飞跃，但不是变化的终极。所以，系统思想的一个基本观点是整体结构优化和整体功能优化。

如何实现整体功能的优化呢？根本的原则是整体结构优化，就是说，好的结构发挥好的功能。而这个结构应该是整个系统各个要素的联系方式，包含各层次子系统之间组织形式在内的整体。所以，整体功能的优化，实质上包括要素优化、联系优化、层次优化、组织优化以及整体优化等。我们借助于**【例 1】**，谈谈要素的优化问题。本题的已知条件 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，当 $x,y\in R$ 时有 $f(2x)=f^2(x)$.令 $f(1)=a$，就有 $f(2)=a^2, f(3)=a^3$，可以推证 $f(x)=a^x$，这就是要素的优化。由 $f(1)=3$ 推出 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=3^{\frac{1}{n}}$，得到一般结论（高一个层次的要素），再得出 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=3^{\frac{1}{4}}$.这种解法就不同于前面的解法。如果作为选择填空题，只要掌握指数函数的本质特征 $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$，通过类比联想，由 $f(1)=3$ 猜想 $f(x)=3^x$，马上可得出 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=3^{\frac{1}{4}}$.

我们提出优化性，就是说不同的结构有不同的优、缺点。一般来说，优化的目标是“多快好省”，但有时也无法排斥“少慢差费”。在一定条件下，少点、慢点、差点、费点也是某种意义上的优化。或者更准确地说，就是系统结构的不同决定系统功能的不同，应该根据实际目的的需要，探求更优的功能。对于高一层次的大系统来说，实质上是结构功能的多样性。因此，解决一道题目，在可能的情况下要寻求多种解法，探求多种结构，发挥多种功能，达到一题多“得”！例如，**【例 1】**涉及到高中代数的各章知识：

（1）集合与对应：$\begin{cases} x\in(0,1]\xrightarrow{\text{对应}} f(x)=3^x \\ x\in(1,2]\xrightarrow{\text{对应}} f(x)=-3^{x-1} \end{cases}$；

（2）函数、对数性质：$\begin{cases} x\in(0,1]\text{时} f(x)=3^x \\ \ln 3^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\ln 3 \end{cases}$；

（3）数列：$a_n=f\left(2n+1+\dfrac{1}{2n}\right)=f\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=-3^{\frac{1}{2n}}$；

（4）函数的周期性：$f(x+2)=f(x)$，分段函数 $f(x)=\begin{cases}3^{x-2n},(x\in(2n,2n+1]) \\ -3^{x-(2n+1)},(x\in(2n+1,2n+2])\end{cases}$；

（5）不等式：$x=y\in(0,1]$时，$f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

总之，善于探究系统的优化，就能学会学习，发展创造能力。

系统思想对于数学是如此，对于文学也是一样，举一小例。

水晶帘动微风起，

满架蔷薇一院香。

——[唐]高骈《山亭夏日》

这两句诗把几个要素联系起来，形成一个优化的整体结构，生动细腻地描绘出一幅迷人的夏日风光。“微风”袭来（起），如水晶般透明的“帘”子摇曳（动），“蔷薇”的芬芳洒满（香）一“院”。四个“要素”用“动”、“起”、“香”联系起来，再加以音韵和谐的结构，就使得诗句的整体功能美妙、动情、淋漓尽致地发挥出来了。

§2　反馈原理

一、例题

【例 2】（1）求正五边形的边长与对角线长之比；

（2）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{5}{a_n}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

（3）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

（4）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1},(n\ge1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

〖探〗信息反馈

将问题的所求返回到已知条件中，探求可能的联系，即反馈。尝试一种途径，如果未达到目标，再返回已知进行调整，再反馈，再调整，直至达到目标。

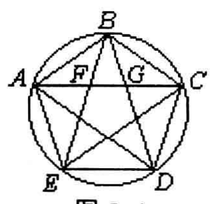


图 2-1

（1）求正五边形的边长与对角线长之比。所求为两条线段之比，可设一条线段长为 1（已知），求另一线段。反馈到已知正五边形（如图 2-1）中，在ΔABC中，设$AB=BC=1$，由$\angle A=\angle C=36°$，求AC的长。

如果用正弦定理或余弦定理，就需要会求$\sin 36°$或$\cos 36°$的值。如果你不会求，就得另

谋出路。涉及到ΔABC的两边之比$\dfrac{AB}{AC}$，反馈到图形中，看是否有相联系的相似三角形存在。显然，$\Delta ABC \backsim \Delta AFB$，而$\Delta BCF$是等腰三角形，令$BC = CF = 1$，设$AC = x$，由$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AF}{AB}$可得关于$x$的方程。

（2）、（3）、（4）求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.返回到已知条件，要求$a_n$关于$n$的表达式都很困难，这就要利用所求，假设极限存在，则可利用$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$，设为$x$，易得关于$x$的方程。求出极限后，还必须反馈回去，证明数列存在极限，最后得解。

〖**解**〗（1）在图 2-1 中，设$AC = x, BC = 1$，由$\Delta ABC \backsim \Delta AFB$，$AF = x - 1$，于是有$\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$，$\therefore x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（舍去负根），$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

另外，如果在ΔABC中用余弦定理，则有$BC^2 = 1^2 = 1^2 + x^2 - 2x\cos 36°$，解方程得$x = 2\cos 36°$.如果用正弦定理，则有$\dfrac{x}{\sin 108°} = \dfrac{1}{\sin 36°}$，$\therefore x = \dfrac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36°$.这都需要会求$\cos 36°$的值。利用变换$\cos 36° = \sin 54°$，列方程求得$\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.其实，本例可作为求$\cos 36°$值的一种方法。

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$，则$x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{5}{x}\right)$.解得$x = \sqrt{5}, (a_n > 0)$，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$.

还必须证明数列$\{a_n\}$存在极限：$2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{161}{72}, \cdots$很快逼近$\sqrt{5}$，但$2 < \dfrac{9}{4}$，而$\dfrac{9}{4} > \dfrac{161}{72} > \cdots$必须证明$\left\{\left|a_n - \sqrt{5}\right|\right\}$是递减数列。

（3）数列$\{a_n\}$：$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \cdots$设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$，则$x = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.也还需要证明这个数列存在极限。

（4）数列$\{a_n\}$：$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$

数列$\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$：$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{8}, \cdots$有性质$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} + 1$．设$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{1}{\alpha}.\therefore\frac{1}{\alpha}=\alpha+1\Rightarrow\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

数列$\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$是摆动数列，证明其存在极限比较困难。可分为由奇数项构成的数列递减，偶数项构成的数列递增，且得出相同的极限从而得证。

二、反馈原理

控制论的主要创立者是数学家维纳。他于1948年发表《控制论》一书，副标题是“或关于在动物和机器控制和通讯的科学”。怎样实现对系统的有效控制，达到预期的目的，基本原理就是反馈原理。

1、反馈原理简释

肯定表述：任何系统只有通过信息反馈，才能实现有效的控制，从而达到预期的目的。

否定表述：没有信息反馈，要实现有效的控制，从而达到预期目的是不可能的。

——摘引自①查有梁《大教育论》P288

没有反馈的系统要实现控制，达到目的是不可能的，对生物系统、机器系统、社会系统是如此，对数学系统也是如此。在人体系统中，例如体温、脉搏、呼吸等状态，取物、看、听等动作都是通过神经系统的反馈实现控制的。学习，就是学习者达到预期目的的一种控制过程。要达到目的，学习者就必须吸收信息，输出信息，通过反馈评价加以调控，再反馈，再调控，逐步接近或达到目的。学习，就是不但要“学”，还必须要“习”。习，就是反馈调节。“学而时习之”，就是要反复地习，及时地习。没有反馈，就没有有效的学习，就不会有好的学习效果。掌握数学知识，学会解决问题，也必须进行反馈。没有反馈学不好数学，也就不会解决问题，更不可能发展思维能力和创造能力。

控制要有目的。输出信息后，系统发生运动，输出信息必须进行评价，明确达标的情况，反馈回系统，或修改目标，或变换信息，使系统再发生变化。如此多次反复，逐渐逼近目标，或达到或超越目标。反馈的方式有多种，如及时反馈、延时反馈、“前馈”等。控制的方法也有多种，如信息控制、行为控制、结构控制、功能控制等。控制的内容更为丰富多彩，因系统的不同而各具特色，如生命控制、机械控制、社会控制、教育控制、学习控制等等。德育、体育与智育的控制各有特色，学习数学与学习语文也有所不同。数学知识是概念与公理的逻辑系统，运用定理、公式解题，就是对“学”的一种反馈——“习”，解题过程更是从已知到未知多次反馈的过程。审题从未知返回到已知，从问题返回到已学过的知识系统，再从已知探求其与未知的逻辑联系，找到缺漏，再返回到已知，再探求联系，形成必然的逻辑结构，问题得解。关键是要抓准推导过程中的缺漏（即评价），探寻已学或已知，对求解过程加以调控，从而得解。如果百思不得其解，还需再反馈，可能在第101次时得以解决。科学难题的解决，正是在无数次失败之后才取得成功的。波普尔提出的科学进步学说：“猜测证伪，逼近真理”，就是强调反馈中的证伪，强调排除错误的重要性。“从错误中学”是反馈学习、提高效率的一种重要手段。

2、控制目的

通过信息传输使系统实现有目的的活动就是控制。系统状态的变化有目的才有控制，没