21世纪高等学校精品课程规划教材
高级应用型人才培养方案研究成果

大学文科数学

Liberal · Arts · Math

赵志红　贾云涛　周传喜　卢里举　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21 世纪高等学校精品课程规划教材
高级应用型人才培养方案研究成果

大学文科数学

赵志红　贾云涛　周传喜　卢里举　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学/赵志红等编. —北京：北京理工大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-5640-2875-6

Ⅰ. 大…　Ⅱ. 赵…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 170312 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／天津市建新彩色印刷有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／13.25
字　　数／306 千字
版　　次／2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
印　　数／1～4000 册　　责任校对／陈玉梅
定　　价／23.00 元　　责任印制／边心超

前　言

随着社会进步和科学技术的快速发展，数学正在向各个领域渗透，不仅自然科学、工程技术离不开数学，而且人文社会科学领域也越来越需要以数学的思想方法作指导、以数学的思维方式为手段，甚至直接以数学为工具研究人文及社会科学中的问题．在经济和科技发达国家，这已成为趋势和一种习惯．在我国，作为大学文科学生，必须要在一定程度上了解数学文化，学习必要的数学知识，具备必要的数学素养．

然而，当今学生的学习环境、学习兴趣、学习习惯、学习方法等正逐渐在改变，同时，在我国文科学生与理工科学生的知识背景、学习习惯、学习方法等方面也存在较大差异．在这种形势下，姑且不谈文科数学如何教与学的问题，单单就如何编写一本既符合文科学生的学习、认知规律，又能揭示并体现数学的基本思想方法和精神实质，进而培养文科学生的数学素养，同时也适合教师教学的大学文科数学教材迫在眉睫．我们在总结几年的文科数学教学实践经验的基础上，以人为本，从思考文科学生为什么要学习必要的数学知识出发，兼收并蓄，就大学文科数学教材的知识结构、内容组织等方面进行了大量的探索和论证，本教材的编写就是我们关于大学文科数学教学研究的总结．

本教材以一元函数微积分学、线性代数、概率论的主要内容为基础，着力体现数学处理连续量、线性离散量和随机量的思想方法、思维方式以及数学的工具作用；力求做到通俗易懂，深入浅出，弱化数学技巧性，以数学知识为载体，体现数学，体验数学．希望通过对本教材的学习，文科学生不仅能初步了解大学数学的基本内容、方法和意义，了解与其相关的数学文化和背景，领会数学的实质和精神，而且能够掌握基本的数学概念、方法，受到一定的推理逻辑和抽象思维的训练，领悟数学分析问题、解决问题的严谨求实、一丝不苟的科学精神，体会数学作为一种文化的人文精神熏陶．

在本教材编写过程中，我们参考了众多国内外教材，立意、结构新颖，取材合理，具有一定的特色和创新性：一是力争把数学文化、数学概念的历史渊源与相应数学知识自然结合、融会贯通；二是基于计算机数学软件 Mathematica 的数学实验贯穿于内容之间，学生可以在不经意间轻松体会数学知识与计算机求解应用相结合的乐趣，激发学生学习的兴趣，调动学生学习数学的主动性，培养学生的创造精神和创造能力．这种做法，对文科学生可能更有裨益，我们期待实践的检验．另外，本书每章内容结束后都安排了小结，可帮助学生从整体上系统地把握学习要点，深刻理解本章内容体系、思想方法，启发学生主动思考；每节均配有同步习题，便于学生及时巩固所学知识；每章配总习题，供其探索、回味；为达到题量和难易方面的平衡，我们做了一定的处理，力争恰到好处．

本书一元函数微分学由周传喜编写，一元函数积分学由贾云涛编写，线性代数部分由赵志红编写，概率论部分由卢里举编写．其中，朱慧、孙康分别为一元函数积分学与概率论部分配备相应习题与总习题．特别应提出的是，本书在酝酿初期、编写过程中乃至最后统稿的每个阶段，都得到了北京理工大学珠海学院相关部门、领导，特别是基础部、数学教研室广

大教师的极大支持和热心帮助，在此表示衷心的感谢！

最后要提及的是，在本书最后统稿阶段，《大学数学教学理念、内容、方法系列研究与改革之一——大学文科数学》作为北京理工大学珠海学院2009年度教改立项获得通过，本教材即为该项目的重要成果之一.

本书可作为普通高等院校、独立学院文科类学生的教材，完成全部内容的教学约需64学时.

作为一种教学理念的初步尝试，本教材难免有很多不足和缺点，请广大读者批评指正，以便今后不断修订完善.

编　者

目　　录

第一部分　一元微积分学

第 1 章　一元函数微分学 …… 2
1.1　函数的概念及性质 …… 2
习题 1.1 …… 8
1.2　极限概念及性质 …… 9
习题 1.2 …… 21
1.3　连续函数及其性质 …… 22
习题 1.3 …… 27
1.4　导数的概念 …… 27
习题 1.4 …… 32
1.5　求导法则 …… 32
习题 1.5 …… 40
1.6　微分 …… 40
习题 1.6 …… 44
1.7　微分中值定理及导数应用 …… 45
习题 1.7 …… 53
第 2 章　一元函数积分学 …… 57
2.1　不定积分的概念与性质 …… 57
习题 2.1 …… 62
2.2　不定积分的计算 …… 63
习题 2.2 …… 70
2.3　定积分的概念与性质 …… 71
习题 2.3 …… 78
2.4　定积分的计算 …… 79
习题 2.4 …… 87
2.5　定积分的应用 …… 88
习题 2.5 …… 97

第二部分　线性代数基础

第 3 章　矩阵与线性方程组 …… 102
3.1　矩阵的概念 …… 102

3.2 矩阵的基本运算 …… 106
习题 3.2 …… 115
3.3 方阵的行列式 …… 117
习题 3.3 …… 125
3.4 方阵的逆矩阵 …… 127
习题 3.4 …… 133
3.5 线性方程组与 Causs 消元法 …… 135
习题 3.5 …… 144

第三部分 概率论

第 4 章 概率论初步 …… 150
4.1 随机事件及其运算 …… 150
习题 4.1 …… 154
4.2 概率定义与基本性质 …… 154
习题 4.2 …… 161
4.3 条件概率 …… 161
习题 4.3 …… 169
4.4 随机变量及其分布 …… 170
习题 4.4 …… 180
4.5 随机变量的数字特征 …… 181
习题 4.5 …… 189
参考答案 …… 193

第一部分　一元微积分学

“我之所以比笛卡尔看得远些，是因为我站在巨人肩上。”——牛顿

微积分（calculus）是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支．它是数学的一个基础学科，内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用．微分学包括极限、导数的运算，是一套关于变化率的理论．它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论．积分学包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供一套通用的方法．

微积分学基本定理指出，微分和积分互为逆运算，这也是两种理论被统一成微积分学的原因．我们可以以两者中任意一者为起点来讨论微积分学，但是在教学中，一般会先引入微分学．

微积分学是微分学和积分学的总称．它是一种数学思想，“无限细分”就是微分，“无限求和”就是积分．无限就是极限，极限的思想是微积分的基础，它是用一种运动的思想看待问题．比如，子弹飞出枪膛的瞬间速度就是微分的概念，子弹每个瞬间所飞行的路程之和就是积分的概念．如果将整个数学比作一棵大树，那么初等数学便是树的根，名目繁多的数学分支是树枝，而树干的主要部分就是微积分．微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一．

极限和微积分的概念可以追溯到古代．17 世纪后半叶，牛顿和莱布尼兹完成了许多数学家都参加过准备的工作，分别独立地建立了微积分学．他们建立微积分的出发点是直观的无穷小量，理论基础是不牢固的．直到 19 世纪，柯西和维尔斯特拉斯建立了极限理论，康托尔等建立了严格的实数理论，这门学科才得以严密化．

微积分是与实际应用联系着发展起来的，它在天文学、力学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学，以及社会科学与应用科学等多个分支中，获得日益广泛的应用．特别是计算机的发明，使得这些应用不断发展．

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着．因此在数学中引入了变量的概念后，就使得用数学来描述运动现象成为可能．由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，一门新的数学分支就继解析几何之后产生了，这就是微积分学．微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，全部数学中的最大的一个创造．

第 1 章　一元函数微分学

本章介绍微分学的重要概念：极限，并以极限为起点，刻画连续、可导、可微的概念，并讨论其相应的一些性质.

§1.1　函数的概念及性质

在初等数学我们主要研究了一些不变的量，也涉及有关变量的一些简单研究，高等数学课程将进一步对变量进行较深入的研究. 所谓函数关系就是变量与变量之间的依赖关系. 本节我们从函数的概念提起，分析函数的性质，复习了反函数和复合函数概念，最后介绍在微积分中占重要地位的函数——初等函数.

1.1.1　函数的概念及性质

1. 函数的概念

客观世界是发展、变化的. 事物发展变化有两种形态：相对静止的状态与显著变化的状态. 这两种状态表现在数量上就有常量与变量之分. 具体讲，在我们考虑的范围和尺度上，保持固定数值的量称为**常量**（constant），可以取不同值而变化的量叫**变量**（variable）.

例如圆周率是常量，而每天的温度则是变量. 实际生活中，变量的变化不是独立的，而是遵循一定规律相互关联的. 不同变量之间常常具有某种数量关系，如某地区大气的空气密度 ρ 随海拔高度 h 而变化，美国道琼斯工业指数随时间而变化等. 许多问题涉及两个变量，当一个变量在某一范围取值时，另一变量按照对应法则就有确定的值与之对应. 两个变量的这种对应的实质，我们称为二者具有函数关系.

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 x 是自变量，y 是 x 的**函数**（function），记作

$$y=f(x).$$

数集 D 叫做这个函数的**定义域**（domain），简记为 D_f. 全体函数值组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

构成了函数的**值域**（range），也简记为 R_f.

本章只研究一个自变量的函数，称为一元函数.

这里说明三点：

（1）由函数的定义，可以看出函数的基本要素有两个：一是对应法则，二是定义域. 若两个函数的对应法则和定义域相同，则两函数相等，否则不能认为它们是相同的函数.

（2）通常在用解析式表示一个函数时，函数的定义域是指使该式有意义的自变量的取值范围.

（3）在自变量不同的变化范围中，对应法则用不同表达式来表示的函数通常称为**分段函数**.

表示函数有三种主要方法：表格法、图形法和解析法，这在中学里大家已经学过. 其中利用图形法表示函数是基于函数的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 如图 1－1 所示.

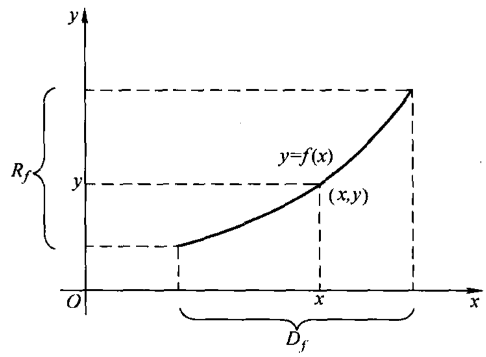


图 1－1

下面举几个函数的例子：

【例 1】 函数

$$y=3$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=\{3\}$，其图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1－2 所示.

【例 2】 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=[0,\ +\infty)$，其图形如图 1－3 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.

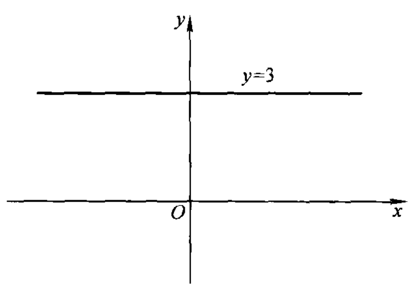


图 1－2

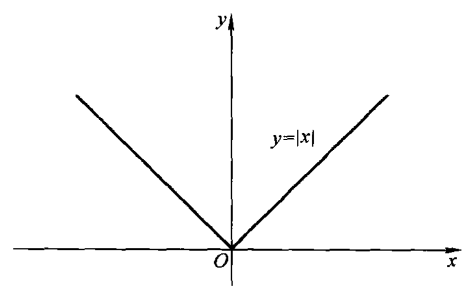


图 1－3

【例 3】 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=\{-1,\ 0,\ 1\}$，其图形如图 1－4 所示.

【例 4】 分段函数

$$y=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x-1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=(-\infty,\ -1]\cup(1,\ +\infty)$，其图形如图 1－5 所示.

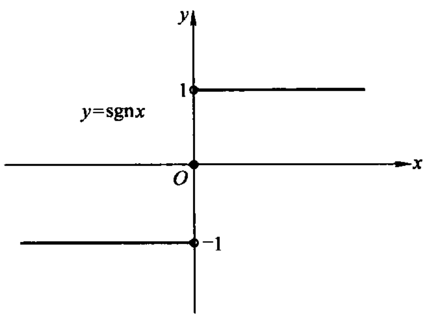


图 1－4

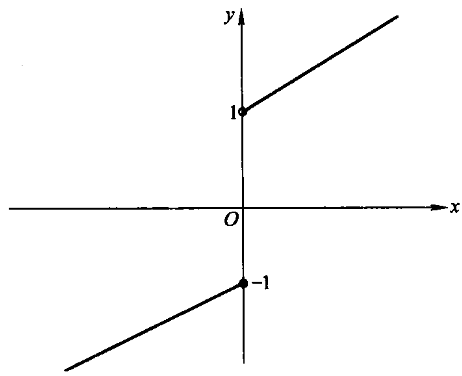


图 1－5

2. 函数性质

（1） 函数的奇偶性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**（even function）；如果对任意的 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**（odd function）. 例如 $y=x$，$y=x^3$，$y=\sin x$ 等都是奇函数，而 $y=x^2$，$y=x^4$，$y=\cos x$ 等都是偶函数. 而函数 $f(x)=x^3+2x^2+5$ 既不是奇函数也不是偶函数，通常称为**非奇非偶函数**.

从几何上看，奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于 y 轴对称. 如图 1－6，1－7 所示.

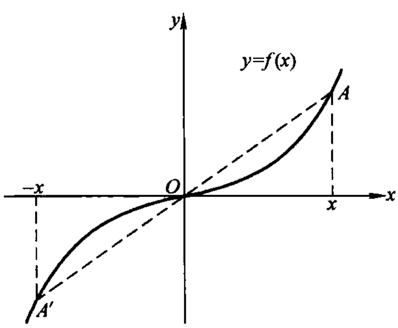


图 1－6

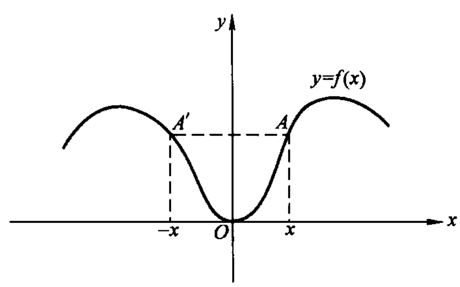


图 1－7

（2） 函数的单调性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$，在 I 上任取两点 x_1，x_2，若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的. 单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**.

从几何上看，单调增加函数的曲线是由左下方上升到右上方的；而单调减少函数恰好相反. 如图 1－8 和图 1－9 所示.

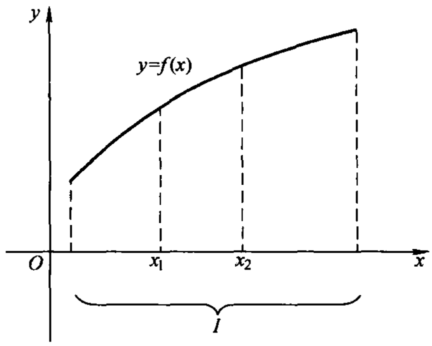


图 1-8

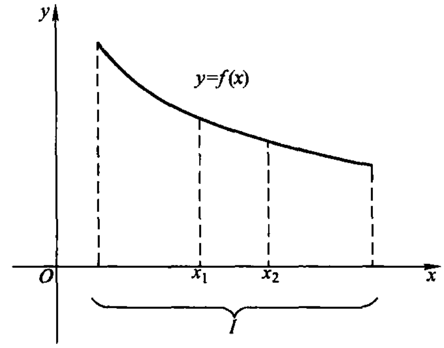


图 1-9

（3）函数的有界性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在确定的实数 $M>0$，对任意 $x\in D$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ **有界**（bound）. 若这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ **无界**.

如函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界，函数 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 无界. 如图 1-10 所示.

从几何上看，函数的有界性是指可以找到两条平行于 x 轴的直线，使函数图形位于两直线之间.

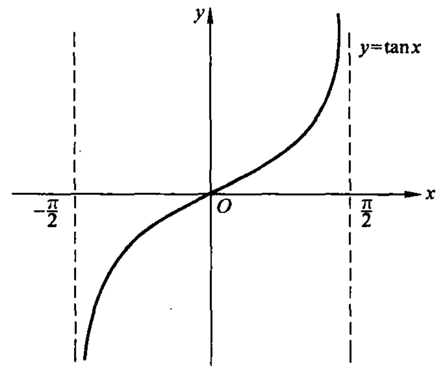


图 1-10

（4）函数的周期性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在确定的非零实数 T，对任意 $x\in D$ 都满足 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**（periodic function）. 这里的 T 称为**周期**，通常我们所说的周期是指最小正周期.

如 $\sin x$，$\cos x$，$\tan 2x$ 都是周期函数，其周期分别是 2π，2π，$\frac{\pi}{2}$. 其图形如图 1-11 和图 1-12 所示.

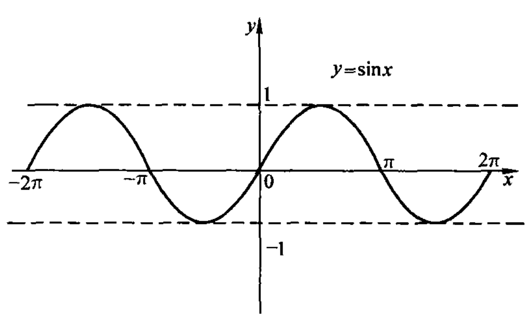


图 1-11

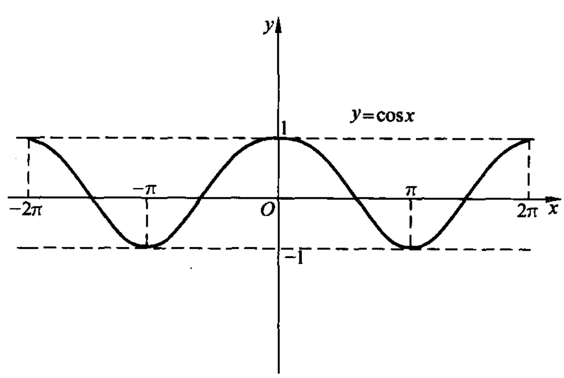


图 1-12

1.1.2 反函数、复合函数

1. 反函数

给定函数 $y=f(x)\,(x\in X, y\in Y)$，如果对于 Y 中每一个值 $y=y_0$，都有 X 中唯一的值 $x_0\in X$，使得 $f(x_0)=y_0$，则称在 Y 上确定了 $y=f(x)$ 的**反函数**（inverse function）. 记作

$$x=f^{-1}(y) \qquad (y\in Y).$$

中学我们学过一些重要的反函数：指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）的反函数是对数函数 $y=\log_a x\,(x>0, a>0, a\neq 1)$；正弦函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数是反正弦函数 $y=\arcsin x\,(x\in[-1, 1])$.

习惯上，我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也记为 $y=f^{-1}(x)$. 这样表示相当于将自变量和因变量互相调换，所以才会有我们中学中熟知的结论：原来的函数与其反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1－13 所示.

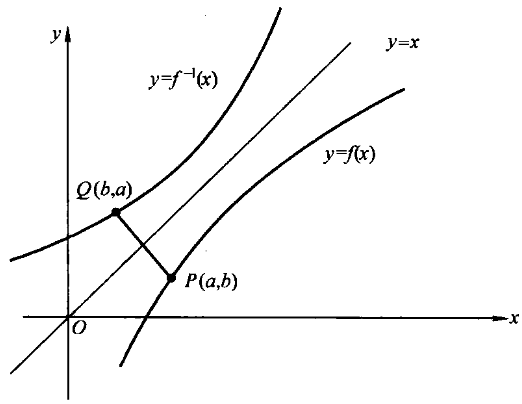


图 1－13

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数$u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g\subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], \qquad x\in D_g$$

称为由函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 构成的**复合函数**（composite function）. 这里，u 称为**中间变量**.

例如由 $y=u^3$，$u=2x+1$ 复合而成 $y=(2x+1)^3$，定义域是 $x\in(-\infty, +\infty)$. 而 $y=\arcsin(2x-1)$ 的定义域 $x\in[0, 1]$，它是由 $y=\arcsin u$，$u=2x-1$ 复合而成的. 但是函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=x^2+2$ 就不能构成复合函数. 这是因为对任一 $x\in R$，$u=x^2+2$ 都不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 内.

1.1.3 初等函数

下面我们来讨论微积分研究的主要对象：初等函数.

1. 基本初等函数

基本初等函数是构成一般初等函数的基本元素，列举如下：

幂函数：$y=x^{\mu}$ $(\mu\in\mathbf{R})$.

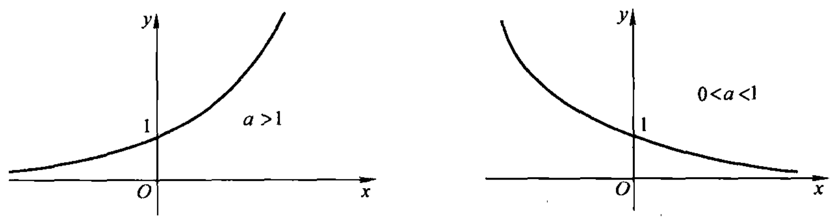
指数函数：$y=a^x(a>0, a\neq 1)$.

对数函数：$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$.

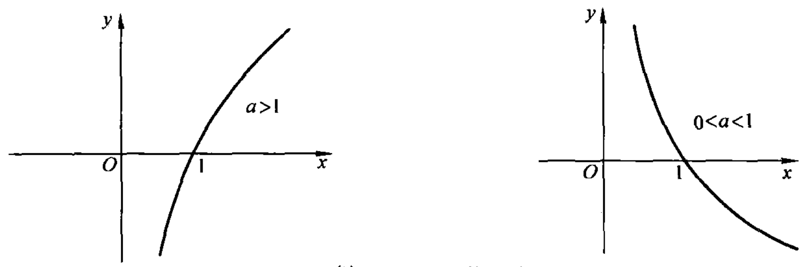
三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$.

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$.

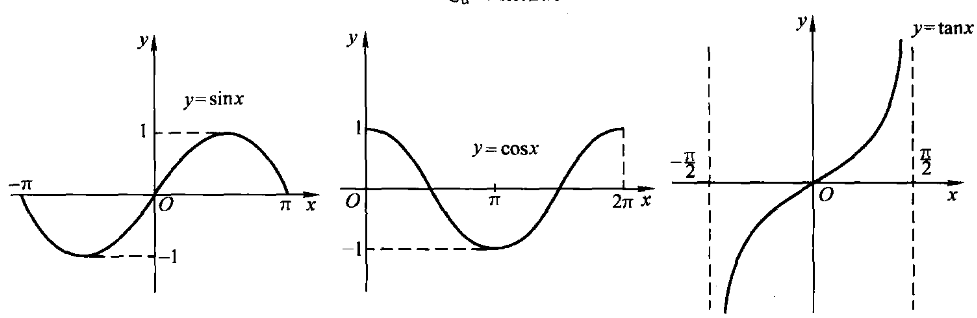
它们的图形如 1 - 14 所示.



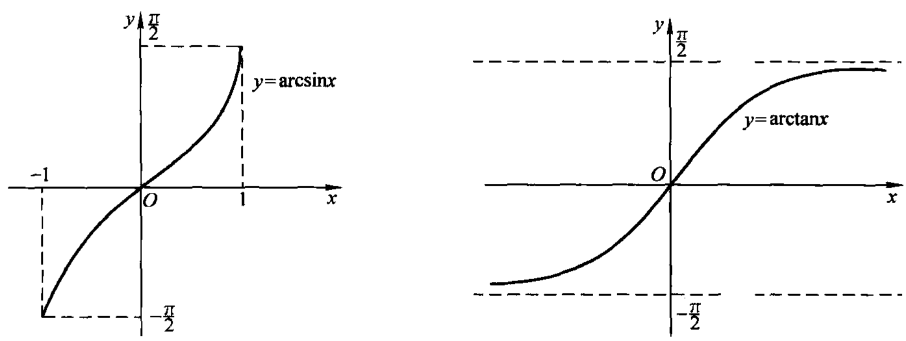
(a) $y=a^x$ 函数图形



(b) $y=\log_a x$ 函数图形



(c) 三角函数图形



(d) 反三角函数图形

图 1 - 14

下面给出高等数学中常用的一些公式:

(1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $(x^m)^n = x^{mn}$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ (m, $n \in IR$, p, $q \in E$, 且 p, q 互质).

(2) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$, $\log_a x^b = b\log_a x$ ($x>0$, $y>0$, $a>0$).

(3) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$；

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\ \csc x=\frac{1}{\sin x};$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

2. *初等函数*

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的，可以用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sin(\cos x-1)$，$y=\arccos(x^2-1)$，$y=3^{2x-1}$等都是初等函数. 本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

数学实验

在本书这部分内容中，列举了一些常见的 mathematica 命令，作为对课本内容的实践，更多的命令请参考相应的软件使用手册或软件帮助文件.

显示 $(x+3)^2+\sqrt{e^x}+\sin x+\ln x-4$，键入

```
Function[x, (x+3)^2+Sqrt[e^x]+Sin[x]+Ln[x]-4]
```

按 Shift + Enter，则输出

$$\{(x+3)^2+\sqrt{e^x}+\sin x+\ln x-4\}$$

画函数$f(x)=x^2(x\in[0,5])$ 图形，输入

```
Plot[x^2,{x,0,5}]
```

即可. 画函数$f(x)=\sin x(x\in[0,2\pi])$ 图形，键入

```
Plot[Sin[x],{x, 0, 2Pi}]
```

即可.

习题 1.1

一、思考题

1. 两个函数相同需要哪几个条件?

2. $y=|x|$ 是初等函数吗?

二、练习题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　(2) $y=\ln(3x-9)$;

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$;　(4) $y=\arcsin(x-1)$.

2. 作出下列函数的图形:

(1) $y=|x|$;　(2) $y=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$

3. 设$f(x)=\sin x$, $g(x)=e^x$, 求$f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

4. 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\cos(3x-1)$;　(2) $y=\ln\tan(x^2+1)$.

§1.2　极限概念及性质

我们先介绍数列极限的概念，并将之推广到一般函数的极限，然后研究函数极限性质及运算法则，进一步介绍无穷小无穷大等概念，并给出两个重要极限.

人物小传　柯西（Cauchy, Augustin Louis　1789—1857 年），出生于巴黎，是一位虔诚的天主教徒. 柯西在幼年时，他的父亲常带他到法国参议院内的办公室，并且在那里指导他进行学习，因此他有机会遇到参议员拉普拉斯和拉格朗日两位大数学家. 他们对他的才能十分赏识，拉格朗日认为他将来必定会成为大数学家.

柯西于 1802 年入中学. 在中学时，他的拉丁文和希腊文取得优异成绩，多次参加竞赛获奖，数学成绩也深受老师赞扬. 他于 1805 年考入综合工科学校，在那里主要学习数学和力学；1807 年考入桥梁公路学校，1810 年以优异成绩毕业，前往瑟堡参加海港建设工程. 柯西于 1816 年先后被任命为法国科学院院士和综合工科学校教授. 1821 年又被任命为巴黎大学力学教授，还曾在法兰西学院授课. 1857 年 5 月 23 日，他因热病突然去世，享年 68 岁. 临终前，他还在与巴黎大主教说话，他说的最后一句话是：“人总是要死的，但是，他们的功绩永存”.

柯西是一位多产的数学家，他的全集从 1882 年开始出版到 1974 年才出齐最后一卷，总计 28 卷. 他的主要贡献如下：

1. 单复变函数

柯西最重要和最有首创性的工作是关于单复变函数论的. 18 世纪的数学家们采用过上、下限是虚数的定积分，但没有给出明确的定义. 柯西首先阐明了有关概念，并且用这种积分来研究多种多样的问题，如实定积分的计算，用含参变量的积分表示微分方程的解等.

2. 分析基础

柯西在综合工科学校所授分析课程及所编有关教材给数学界造成了极大的影响. 自从牛

顿和莱布尼兹创立微积分（即无穷小分析，简称分析）以来，这门学科的理论基础是模糊的. 为了进一步发展，必须建立严格的理论，柯西为此首先成功地建立了极限论.

1821年柯西提出极限定义的 ε 方法，把极限过程用不等式来刻画，后经维尔斯特拉斯改进，成为现在所说的柯西极限定义或叫 $\varepsilon-\delta$ 定义. 当今所有微积分的教科书都还（至少是在本质上）沿用着柯西等人关于极限、连续、导数、收敛等概念的定义. 他对微积分的解释被后人普遍采用. 柯西对定积分作了最系统的开创性工作. 他把定积分定义为和的"极限". 在定积分运算之前，强调必须确立积分的存在性. 他利用中值定理首先严格证明了微积分基本定理. 通过柯西以及后来维尔斯特拉斯的艰苦工作，使数学分析的基本概念得到严格的论述，从而结束微积分二百年来思想上的混乱局面，把微积分从对几何概念、运动和直觉了解的完全依赖中解放出来，并使微积分发展成现代数学最基础、最庞大的数学学科.

3. 常微分方程

柯西在分析方面最深刻的贡献在常微分方程领域. 他首先证明了方程解的存在和唯一性. 在他以前，没有人提出过这种问题. 通常认为是柯西提出的三种主要方法，即柯西－利普希茨法、逐渐逼近法和强级数法，实际上以前也散见到用于解的近似计算和估计. 柯西最大的贡献就是看到通过计算强级数，可以证明逼近步骤收敛，其极限就是方程的所求解.

1.2.1 数列极限

观察以下数列及其通项：

(1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots,$ $\qquad x_n=\frac{n}{n+1}$.

(2) $2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \cdots,$ $\qquad x_n=2+(0.1)^n$.

(3) $2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots,$ $\qquad x_n=2^n$.

(4) $1, -1, 1, -1, \cdots,$ $\qquad x_n=(-1)^{n+1}$.

如图1－15所示，我们发现，当这里的 n 无限增大时，第一个数列的通项越来越接近于1；第二个数列的通项越来越接近于2；第三个数列的通项越来越大，不接近于任何的常数；第四个数列的通项始终在1和－1这两个数间来回摆动，而不趋近任何固定的常数. 这个事实我们可以用下面的定义来描述.

定义 1.2.1 给定数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于某个确定的常数 a，我们就称数列 $\{x_n\}$ 是**收敛**（convergence）的. 常数 a 称为当 $n\to\infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的**极限**（limit）. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty)$$

显然，上面定义中"无限增大"、"无限趋近"这些说法的确切含义并不明确，历史上正是这类概念的含糊不清导致了许多矛盾的结果，阻碍了微积分的发展，所以我们有必要使其数学含义明确化.

为此我们回到上面的第一个数列，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. 有人提出，为什么说该数列的极限不是0.99999999呢？我们不难发现，当 $n>10^8$ 时，x_n 并不能越来越接近于0.99999999，而且偏离越来越大. 事实上，描述两个数的接近程度应度量他们的距离，也就是考察 $|x_n-a|$ 的大